EJERCICIOS RESUELTOS DE DETERMINANTES

Ejercicio 1:

Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene sus dos filas iguales.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: (1ª) · 7 = (2ª)

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque sus dos columnas son proporcionales: (2ª) · (–20) = (1ª)

Ejercicio 2:

Calcula el valor de los siguientes determinantes teniendo en cuenta estos datos:

$$A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix} \qquad |A| = -13$$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $|6A|$ **c)** $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix}$ **d)** $|A^{-1}|$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $|6A| = \begin{vmatrix} 6l & 6m \\ 6n & 6p \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 36 \cdot (-13) = -468$

c) $\begin{vmatrix} l & 4m \\ n & 4p \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) = -52$

d) $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \quad \to \quad |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-13} = -\dfrac{1}{13}$

Ejercicio 3:

Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

Ejercicio 4:

Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Ejercicio 5:

Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3ª fila es proporcional a la 1ª (3ª = (–2) · 1ª) (propiedad 6).

c) La 3ª fila es combinación lineal de las dos primeras (3ª = 1ª + 10 · 2ª) (propiedad 9).

d) La 1ª fila es combinación lineal de las otras dos (1ª = 10 · 2ª + 3ª) (propiedad 9).

Ejercicio 6:

Teniendo en cuenta el resultado del determinante que se da, calcula el resto sin desarrollar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ejercicio 7:

Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollánd lo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 45$$

Desarrollando por la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

Ejercicio 8:

De las siguientes operaciones con determinantes de orden 2 × 2, señala las que son correctas y, en su caso, enuncia las propiedades que se utilizan:

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

a) Verdadero. Tiene las dos columnas iguales.

b) Verdadero. Si una fila está multiplicada por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

c) Falso; sería $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

d) Verdadero. Si la 2ª fila está multiplicada por 2, el determinante queda multiplicado por 2.

Ejercicio 9:

Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:

a) $\begin{vmatrix} m + 3n & p + 3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m + 3n & p + 3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3 \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

Ejercicio 10:

Resuelve estas ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$$

$$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

b) $\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} sen\ x & cos\ x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = sen\ x - cos\ x = 0 \quad \rightarrow \quad sen\ x = cos\ x \quad \rightarrow \quad \frac{sen\ x}{cos\ x} = 1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad tg\ x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad (k \in zc)$$

c) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 11:

Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran\ (C) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ La 2ª fila depende linealmente de las dos últimas.

Veamos si la 1ª fila depende de las dos últimas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0. \text{ Por tanto, } ran\ (C) = 3.$$

$$\text{b) } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego $ran\ (D) \geq 2$

Veamos si la 3ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \text{ Por tanto, } ran\ (D) = 3.$$

Ejercicio 12:

Halla los valores de a que anulan cada uno de los siguientes determinantes:

$$\textbf{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} \qquad \textbf{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \textbf{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} \qquad \textbf{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$$

☛ ***Desarrolla, iguala a 0 y resuelve la ecuación que obtengas.***

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \quad \to \quad a = 1$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$$

$$= (a-1)(3+a) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \quad \to \quad a^2 = 3 \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$$

$$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \quad \to$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \quad \to \quad a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$$

Ejercicio 13:

Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

a) La 1ª y la 3ª columnas son proporcionales (la 3ª es –5 por la 1ª).

b) Sumamos la 3ª fila a la 2ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (pues tiene dos filas iguales).}$$

Ejercicio 14:

Prueba, sin desarrollar, que $|A|$ es múltiplo de 3 y $|B|$ es múltiplo de 5:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{ Es múltiplo de 3.}$$

(1) Sumamos a la 3ª columna las otras dos.

(2) Si una columna se multiplica por un número, el determinante queda multipicado por ese número.

$$|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \text{ Es múltiplo de 5.}$$

(3) Sumamos a la 3ª fila la 2ª.

Ejercicio 15:

Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 2$

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $|A| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; a = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \dfrac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) \geq 2$

Por tanto:

- **Si $a = 1$** $\rightarrow$ $|B| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 2$
- **Si $a = -8$** $\rightarrow$ $|B| = 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 2$
- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -8$** $\rightarrow$ $|B| \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 3$

c) Por el ejercicio 11, sabemos que $|C| = 0 \;\rightarrow\; a = 2$, y que:

- **Si $a = 2$** $\rightarrow$ $ran\,(C) = 3$
- **Si $a \neq 2$** $\rightarrow$ $ran\,(C) = 4$

d) $D = \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

- **Si $a = 1$,** queda:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to ran\,(D) = 1$$

- **Si $a = -1$,** queda:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran\,(D) = 2$$

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$** $\to ran\,(D) = 2$

Ejercicio 16:

Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t:

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ **f)** $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix} = -t^3 + 1 + 1 + t - t - t = -t^3 - t + 2 = (t-1)(-t^2 - t - 2) = 0$

$$\begin{cases} t = 1 \\ -t^2 - t - 2 = 0 \to t^2 + t + 2 = 0 \to t = -\dfrac{1 \pm \sqrt{1-8}}{-2} \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

- **Si $t = 1$,** queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ como } |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

- **Si $t \neq 1$** $\rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = t^3 + 4t - 2t - 4t = t^3 - 2t = t(t^2 - 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases}$$

- **Si $t = 0$,** queda:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow ran(B) = 2$$

- **Si $t = \sqrt{2}$,** queda:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(B) = 2$$

- **Si $t = -\sqrt{2}$**, queda:

$$B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(B) = 2$$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq \sqrt{2}$ y $t \neq -\sqrt{2}$** $\rightarrow$ $|B| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\,(B) = 3$

c) $$|C| = \begin{vmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{vmatrix} = (t+3)\,(t-1)^2 - 16 + 4(t+3) =$$

$$= (t+3)\,(t^2 - 2t + 1) - 16 + 4t + 12 = t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 6t + 3 + 4t - 4 =$$

$$= t^3 + t^2 - t - 1 = (t-1)\,(t+1)^2 = 0 \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

- **Si $t = 1$**, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(C) = 2$$

- **Si $t = -1$**, queda:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Como } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(C) = 2$$

- **Si $t \neq 1$ y $t \neq -1$** $\rightarrow$ $|C| \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\,(C) = 3$

d) $$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -t & 6 & 3-t & 9-t \end{pmatrix}$$

Observamos que la 4ª columna se obtiene sumando la 2ª y la 3ª. Por tanto, para hallar el rango, podemos prescindir de una de esas tres columnas, por ejemplo de la 3ª.

Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -t & 6 & 9-t \end{vmatrix} = (9-t) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (9-t)\,(-1) = t - 9 = 0 \;\rightarrow\; t = 9$$

- **Si $t = 9$** $\rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ $\rightarrow$ $ran\,(D) = 2$

- **Si $t \neq 9$** $\rightarrow$ $ran\,(D) = 3$

e) $|E| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{vmatrix} = t(t+1)(t+3) + t(t-1)(-2t-1) - 2t(t+3) =$

$= t^3 + 4t^2 + 3t - 2t^3 + t^2 + t - 2t^2 - 6t = -t^3 + 3t^2 - 2t = t(-t^2 + 3t - 2) = 0$

$t = 0$

$-t^2 + 3t - 2 = 0 \rightarrow t = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2}$ $\begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- **Si $t = 0$,** queda:

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(E) = 2$

- **Si $t = 1$,** queda:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow ran(E) = 2$

- **Si $t = 2$,** queda:

$E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(E) = 2$

- **Si $t \neq 0$, $t \neq 1$ y $t \neq 2$** $\rightarrow |E| \neq 0 \rightarrow ran(E) = 3$

f) $F = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tenemos que: $\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 + 4 + 2 - 4t - t - 4 =$

$= 2t^2 - 5t + 2 = 0 \rightarrow t = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$ $\begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

- **Si $t = 2$,** queda:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ iguales. Además, } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(F) = 2$$

- **Si $t = \frac{1}{2}$,** queda:

$$F = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Tenemos que $\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(F) = 3$

- **Si $t \neq 2$ y $t \neq \frac{1}{2}$** $\;\rightarrow\; ran\,(F) = 3$

Ejercicio 17:

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a}]{\text{FILAS}} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \xrightarrow[\substack{1^a + 3^a \\ 2^a \\ 3^a}]{\text{FILAS}} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3ª fila.

Ejercicio 18:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

b) Calcula el rango de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix} = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc \cdot 0 = 0$$

Pero $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -ab + 2ab = ab \neq 0$, pues a y b son no nulos.

Por tanto:

a) Hay dos columnas en la matriz A que son linealmente independientes.

b) $ran\ (A) = 2$

Ejercicio 19:

Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de a, b y c:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 0$$

(1) Sumamos a la 2ª fila la 3ª.

(2) Sacamos $(a+b+c)$ factor común de la 2ª fila.

(3) Las dos primeras filas son proporcionales.

Luego, $ran\ (M) \leq 2$. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & b \end{vmatrix} = 5b - 5a = 0 \quad \rightarrow \quad b = a \qquad\qquad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ b & c \end{vmatrix} = 5c - 5b = 0 \quad \rightarrow \quad c = b$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ a & c \end{vmatrix} = 5c - 5a = 0 \quad \rightarrow \quad a = c$$

Por tanto:

- **Si $a = b = c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 1$
- **Si $a \neq b$ o $b \neq c$ o $a \neq c$** $\rightarrow$ $ran\ (M) = 2$

Ejercicio 20:

Estudia el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha & 0 \\ sen\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + sen^2\,\alpha = 1$$

(1) Desarrollamos el determinante por la 3ª fila o por la 3ª columna.

Por tanto, como $|A| \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 3$.

Ejercicio 21:

Escribe dos matrices A y $B \in M_{2\times 2}$ tales que:

a) $det(A+B) \neq det(A) + det(B)$

b) $det(A+B) = det(A) + det(B)$

a) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$|A| = 7$; $|B| = -11$; $|A+B| = 0 \neq |A| + |B| = -4$

b) Por ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

$|A| = 0$; $|B| = 0$; $|A+B| = 0 = |A| + |B|$

Ejercicio 22:

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$?

Justifica tu respuesta.

Tendremos en cuenta que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Entonces:

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \underset{(*)}{=} |B| \cdot |A| = |B \cdot A|$. Por tanto, sí se verifica la igualdad.

(*) Aunque el producto de matrices no es conmutativo, el producto de números (los determinantes son números), sí lo es.

Ejercicio 23:

Demuestra, sin desarrollar el determinante, que: $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

☛ ***Haz $c_1 - c_3$ y $c_2 - c_3$. Así podrás sacar factor común $(a-b)^2$. Después, haz $c_1 - 2c_2$.***

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ 1^{a} - 3^{a} \\ 2^{a} - 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \begin{vmatrix} a^2-b^2 & ab-b^2 & b^2 \\ 2a-2b & a-b & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+b)(a-b) & b(a-b) & b^2 \\ 2(a-b) & (a-b) & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b^2 \\ 2 & 1 & 2b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a+b & b \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2 (a+b-2b) = (a-b)^2 (a-b) = (a-b)^3$$

(1) Sacamos $(a-b)$ factor común de la 1ª y de la 2ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3ª fila.

Ejercicio 24:

Demuestra, sin desarrollar, que: $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$

☛ ***En el segundo miembro multiplica y divide la primera fila por a, la segunda por b y la tercera por c.***

Procediendo como se indica en la ayuda, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} bca & a^2 & a^3 \\ acb & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 25:

Prueba que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

☛ ***Este determinante se llama de Vandermonde.***

Haz $c_2 - c_1$ y $c_3 - c_1$. Extrae el factor $(b-a)$ de la 2ª columna y $(c-a)$ de la 3ª columna.

Siguiendo las indicaciones dadas, tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) \\ a^2 & (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Ejercicio 26:

Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow \text{existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Ejercicio 27:

Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad \text{Existe } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \to \quad \text{Existe } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Ejercicio 28:

Calcula la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices para aquellos valores de a que sea posible:

a) $\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \to |A| = a^2 + 1 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Luego, existe A^{-1} para cualquier valor de a. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2+1} & \dfrac{1}{a^2+1} \\ \dfrac{-1}{a^2+1} & \dfrac{a}{a^2+1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \to |A| = 2a \neq 0$ si $a \neq 0$. Solo existe A^{-1} si $a \neq 0$.

La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -1 \\ -a & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2a} & \dfrac{3}{2a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \to |A| = (a-2)\,a \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 2$

Existe A^{-1} solo cuando $a \neq 0$ y $a \neq 2$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a-2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio 29:

Consideramos la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

a) Existe A^{-1} solo cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Luego, existe A^{-1} para todo $x \neq 0$.

---

b) Para $x = 2$, tenemos que $|A| = 2 \neq 0$, luego existe A^{-1} en este caso. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio 30:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?

b) Calcula A^{-1} cuando exista.

c) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

a) $|A| = b$ será el seno de algún número real cuando $-1 \leq b \leq 1$.

b) Existirá A^{-1} cuando $|A| \neq 0$, es decir, cuando $b \neq 0$. La calculamos en este caso:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} = A^{-1}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a/b & 0 & 1/b \end{pmatrix} \to \begin{cases} a = -\dfrac{a}{b} \to ab + a = 0 \to a(b+1) = 0 \\ b = \dfrac{1}{b} \to b^2 = 1 \begin{cases} b = 1 \to a = 0 \\ b = -1 \to a \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

$$A = A^{-1} \text{ cuando } \begin{cases} \bullet\ a = 0 \text{ y } b = 1 \quad \to \quad (0, 1) \\ \bullet\ b = -1 \text{ y } a \text{ cualquier número real} \quad \to \quad (a, -1) \end{cases}$$

Ejercicio 31:

Sean A y B inversas una de otra. Si $|A| = 4$, ¿cuánto vale $|B|$?

Si A y B son inversas una de otra, entonces $A \cdot B = I$. Así:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 32:

¿Existe algún valor de a para el cual la matriz $\begin{pmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tenga inversa?

$\begin{vmatrix} a & a^2 - 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ para cualquier valor de a.

Por tanto, no existe ningún valor de a para el que la matriz dada no tenga inversa.
