EJERCICIOS DE INTEGRALES DEFINIDAS. ÁREAS

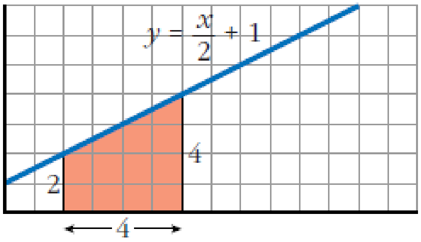
Ejercicio 1:

Halla gráficamente las siguientes integrales:

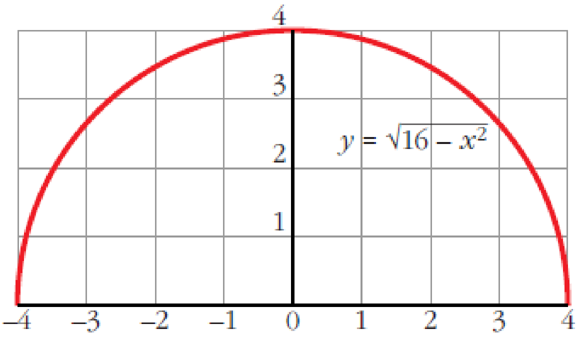
a) $\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ **b)** $\int_{-4}^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$

a) Es un trapecio cuyas bases miden 2 y 4 y cuya altura mide 4.

$$\text{Área} = \frac{2 + 4}{2} \cdot 4 = 12 \text{ u}^2$$



b) $y = \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4^2$ (Circunferencia)



El recinto cuya área queremos calcular es medio círculo de radio 4 u.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 =$$

$$= \frac{16}{2} \cdot \pi = 8 \cdot \pi = 25{,}1 \text{ u}^2$$

Ejercicio 2:

Sea la función: $F(x) = \int_0^x log(t^2 + 4)\, dt$. **Calcula** $F'(x)$.

$F(x) = \int_0^x log(t^2 + 4)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$, siendo $f(t) = log(t^2 + 4)$ continua.

Por el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = log(x^2 + 4)$$

Ejercicio 3:

Calcula la siguiente integral: $\int_0^{\pi/2} cos\, x\, dx$

$$\int_0^{\pi/2} cos\, x\, dx = [sen\, x]_0^{\pi/2} = sen\, \frac{\pi}{2} - sen\, 0 = 1 - 0 = 1$$

Ejercicio 4:

Calcula: $\int_1^6 (4x^3 - 4x^4 - 3)\, dx$

$$I = \left[x^4 - \frac{4}{5}x^5 - 3x\right]_1^6 = \left(6^4 - \frac{4}{5} \cdot 6^5 - 3 \cdot 6\right) - \left(1^4 - \frac{4}{5} \cdot 1^5 - 3 \cdot 1\right) =$$

$$= -4\,942{,}8 + 2{,}8 = -4\,940$$

Ejercicio 5:

Calcula: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$I = [arc\ tg\ x]_0^1 = arc\ tg\ 1 - arc\ tg\ 0 = \frac{\pi}{4}$$

Observación: $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{4a}$

Ejercicio 6:

Halla el área comprendida entre la función $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - x^2 - 6x = 0$

Son -2, 0 y 3.

II. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2$$

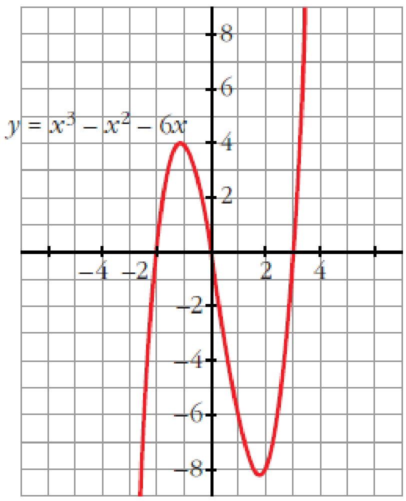
III. $G(-2) = \dfrac{-16}{3}$, $G(0) = 0$, $G(3) = \dfrac{-63}{4}$

IV. $G(0) - G(-2) = \dfrac{16}{3}$

$G(3) - G(0) = \dfrac{-63}{4}$

El área buscada es: $\dfrac{16}{3} + \left|\dfrac{-63}{4}\right| = \dfrac{253}{12}\ \text{u}^2$

(Se incluye la gráfica para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



Ejercicio 7:

Halla el área comprendida entre las funciones $y = x^4 + x^3$ e $y = x^4 + x^2 + 6x$.

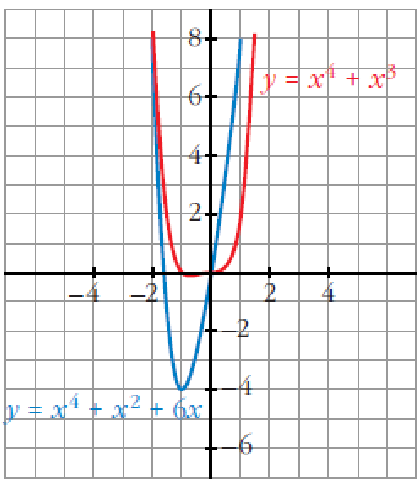
Se obtiene la función diferencia:

$$y = (x^4 + x^3) - (x^4 + x^2 + 6x) = x^3 - x^2 - 6x$$

Ahora se calcula el área comprendida entre esta función y el eje X, lo cual se ha hecho ya en el ejercicio anterior.

Por lo tanto, el área buscada es $\dfrac{253}{12}\ \text{u}^2$.

(También aquí es innecesaria la gráfica para obtener el área buscada).



Ejercicio 8:

Calcula el área comprendida entre la curva: $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje X.

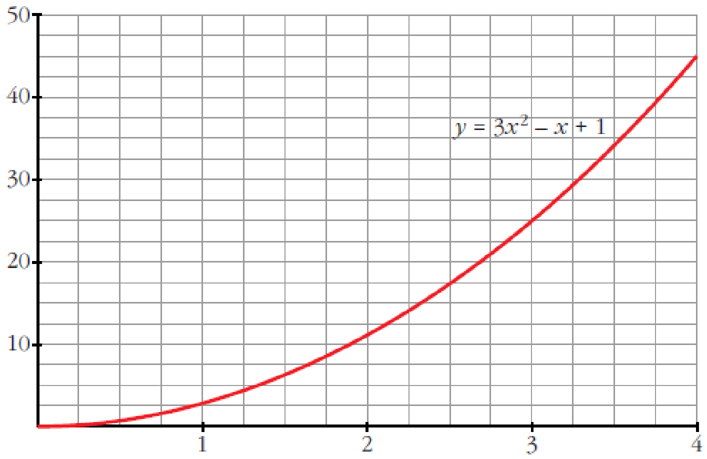
II. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\,dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0$, $G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es 60 u^2.



Ejercicio 9:

Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre $x = -1$ y $x = 1$.

I. Hallamos la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$. Es $\frac{2}{3}$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos: $-1, \frac{2}{3}, 1$.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\,dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

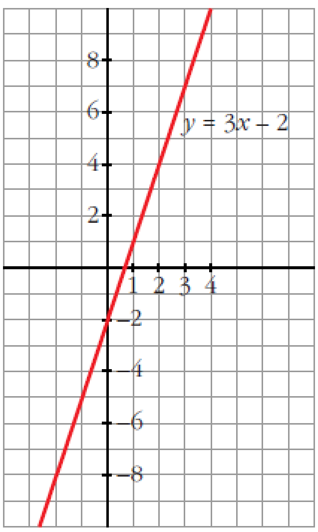
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$, $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$, $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

El área buscada es: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su area).



Ejercicio 10:

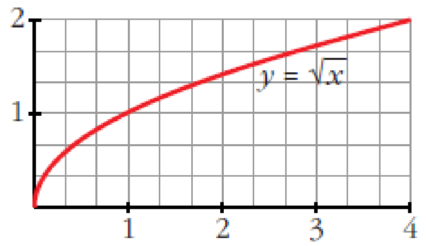
Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

I. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

$$G(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0, \quad G(4) = \dfrac{2}{3} \cdot 8 = \dfrac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \dfrac{16}{3} - 0 = \dfrac{16}{3}$



El área buscada es: $\dfrac{16}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el area).

Ejercicio 11:

Halla el área comprendida entre $y = x^2 - 5$ e $y = -x^2 + 5$.

I. Buscamos las soluciones de: $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

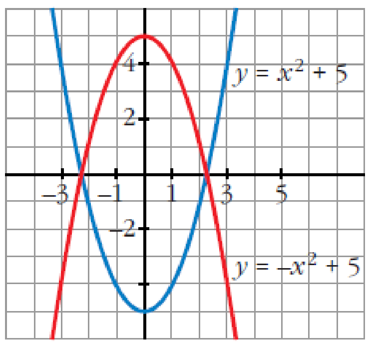
II. Se obtiene la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\, dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(-\sqrt{5}) = \dfrac{-20}{3}\sqrt{5}, \quad G(\sqrt{5}) = \dfrac{20}{3}\sqrt{5}$



V. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \dfrac{20}{3}\sqrt{5} + \dfrac{20}{3}\sqrt{5} = \dfrac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es: $\dfrac{40}{3}\sqrt{5}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).

Ejercicio 12:

Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

d) $y = x(x-1)(x-2)$; $y = 0$

e) $y = x^2$; $y = 1$

f) $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son -2 y 2.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

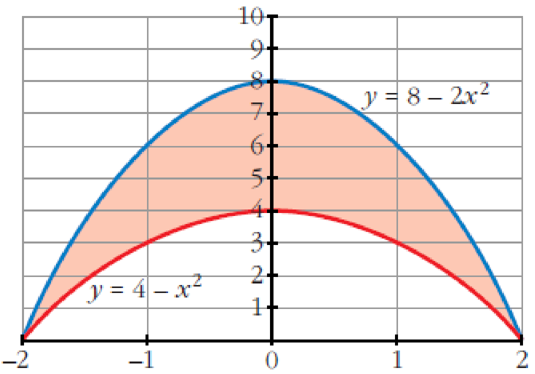
$$G(x) = \int (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \dfrac{8}{3} = -\dfrac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \dfrac{16}{3} - \left(-\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$.

Son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

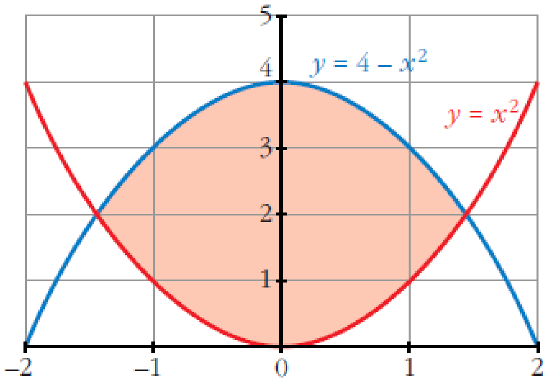
$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).



c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$. Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

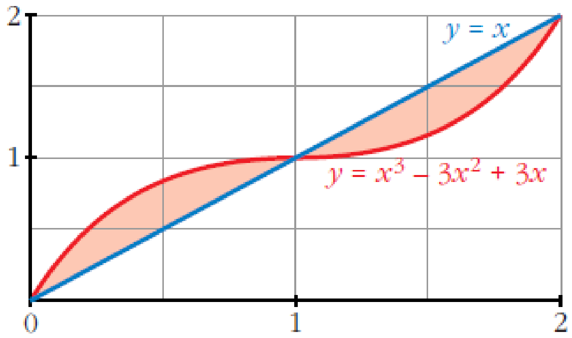
IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \frac{1}{4}$, $G(2) = 0$

$$G(1) - G(0) = \frac{1}{4}$$

$$G(2) - G(1) = \frac{-1}{4}$$

El área buscada es: $\frac{1}{4} + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2}$ u^2.

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de: $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0$. Son 0, 1 y 2.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es: $\frac{1}{2}$ u^2.

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 1$. Son -1 y 1.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = x^2 - 1$$

III. Calculamos su primitiva:

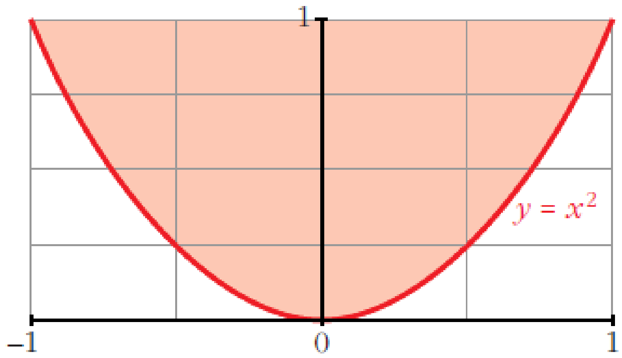
$$G(x) = \int (x^2 - 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV. $G(-1) = \frac{2}{3}$, $G(1) = \frac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Son 0 y 3.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$$

III. Calculamos su primitiva:

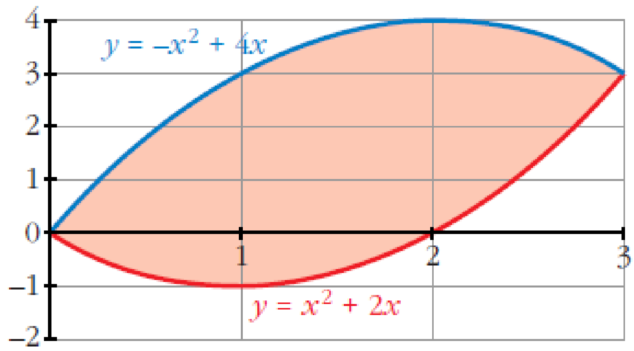
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es: $|-9| = 9$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$. Son -1 y 3.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3.$$

III. Calculamos su primitiva:

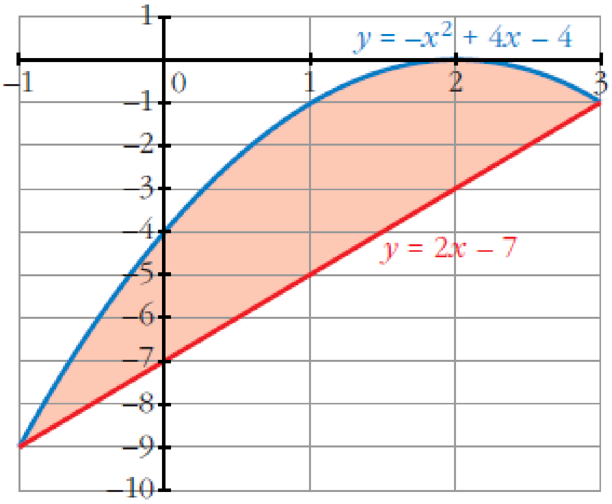
$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\,dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV. $G(-1) = \frac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

V. $G(3) - G(-1) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$

El área buscada es: $\frac{32}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



Ejercicio 13:

Calcula: $\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx$

$$\int_0^{\pi/4} sen\ x \cdot cos\ x\ dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$$

Aplicamos el siguiente cambio:

$sen\ x = t;\quad cos\ x \cdot dx = dt$

para $x = 0;\ \ t = 0$

para $x = \frac{\pi}{4};\ \ t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ejercicio 14:

Halla el valor de la integral definida de la función $f(x) = \frac{1}{x+1} - 3\ cos\ (2\pi x)$ **en el intervalo** $I = [0, 2]$.

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3 \cdot cos\ (2\pi x)\right) dx = \left[ln\ (x+1) - \frac{3 \cdot sen\ (2\pi x)}{2 \cdot \pi}\right]_0^2 =$$

$$= ln\ (3) - ln\ (1) = ln\ (3)$$

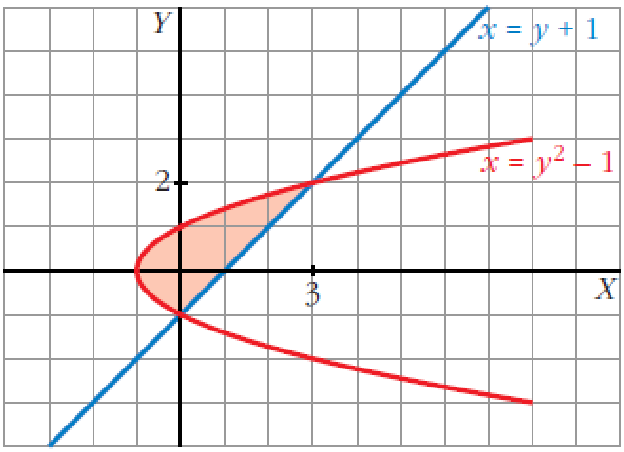
Ejercicio 15:

Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $y^2 - 1 = y + 1$.

(Esta ecuación resulta de despejar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$).

Sus soluciones son $y = -1$ y 2.



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(y) = \int (y^2 - y - 2)\, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \dfrac{7}{6}$, $G(2) = \dfrac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \dfrac{-10}{3} - \dfrac{7}{6} = \dfrac{-9}{2}$

El área buscada es $\left|\dfrac{-9}{2}\right| = \dfrac{9}{2}$ u².

Ejercicio 16:

Comprueba que $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\, dx = \frac{5}{2}$.

$$\int_0^2 |2x - 1| \cdot dx = \int_0^{1/2} (-2x + 1)\, dx + \int_{1/2}^2 (2x - 1)\, dx =$$

$$= \left[-x^2 + x\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^2 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 17:

Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que corta al eje de abscisas.

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son 0 y 2.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por $(0, 0)$ tiene pendiente $f'(0) = 2$, por tanto es $y = 2x$.

La tangente que pasa por $(2, 0)$ tiene pendiente $f'(2) = -2$, por tanto es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

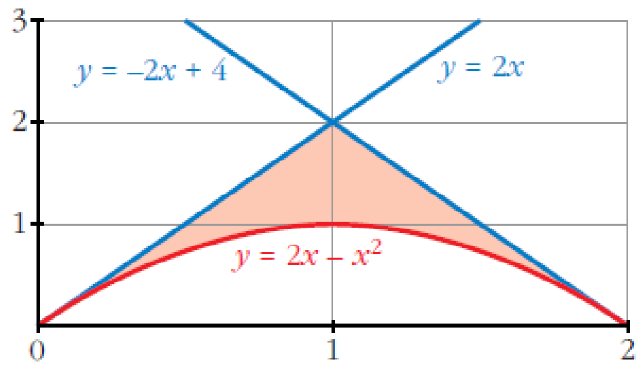
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = \frac{1}{3}$, $G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3}$, $G_2(2) = \frac{8}{3}$, $G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

El área buscada es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



Ejercicio 18:

Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto $(0, 0)$, para ello calculamos la derivada de nuestra función:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y'(0) = 1 \quad \text{(pendiente)}$$

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son 0 y 2 (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$$

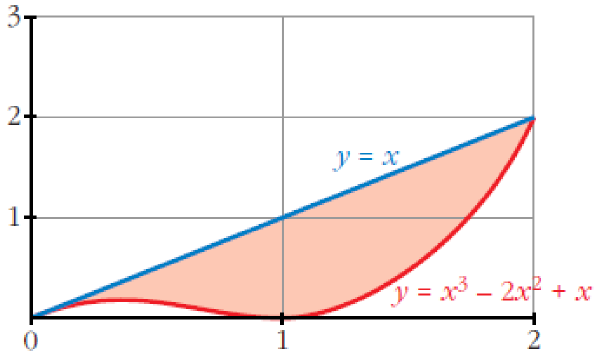
IV. Buscamos su primitiva: $G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \frac{-4}{3}$

$$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$$

El área buscada es: $\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



Ejercicio 19:

Halla el área comprendida entre la curva $y = \frac{4}{9 + 2x^2}$, el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

I. Buscamos los puntos de inflexión, para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9 + 2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9 + 2x^2 - 8x^2)}{(9 + 2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de x la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ y $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9 + 2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)$$

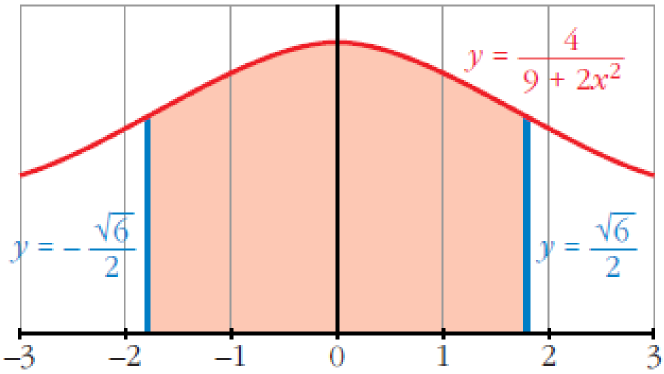
III. $G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

El área buscada es: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\ tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\ tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



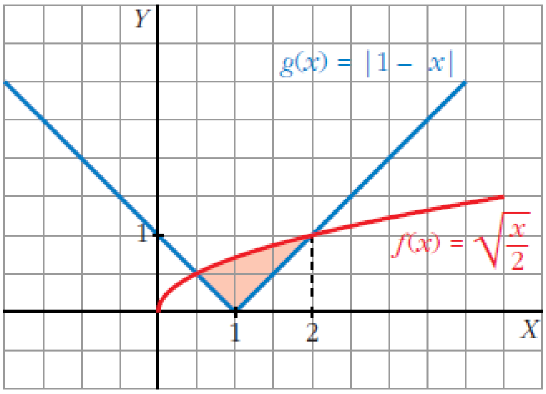
Ejercicio 20:

Si $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:

a) Dibuja las dos gráficas en un mismo plano y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.

a) $g(x) = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \le 1 \\ x - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1 - x)$$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2. (Límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: $\frac{1}{2}$ a 1 y 1 a 2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1 - x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$h_2(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x - 1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2} - 3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$, $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

$H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

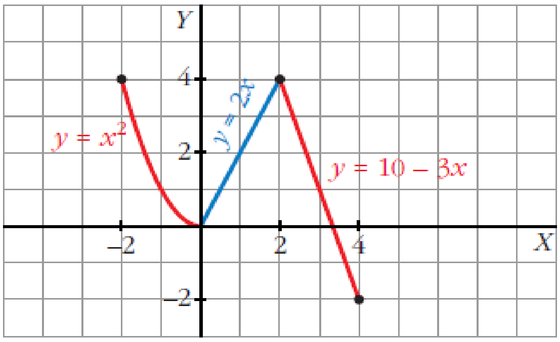
Ejercicio 21:

Se considera la función:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$$



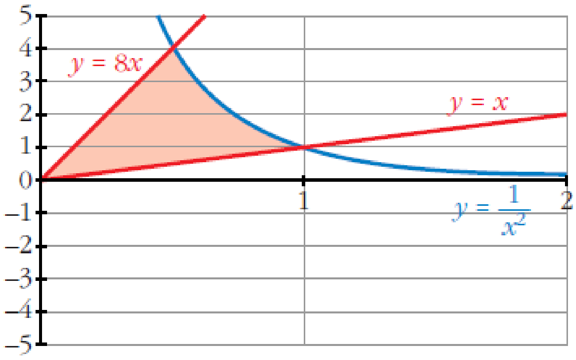
$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_0^1 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\,dx = \left[x^2\right]_1^2 + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_2^4 = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

Ejercicio 22:

Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$\frac{1}{x^2} = x$: Solución $x = 1$.

$\frac{1}{x^2} = 8x$: Solución $x = \frac{1}{2}$.

$x = 8x$: Solución $x = 0$.

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$$f_1(x) = 8x - x$$

Y en el segundo intervalo:

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int (8x - x)\,dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$$

V. $G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

$$G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

Ejercicio 23:

Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.

Como el polinomio pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 0)$, una raíz es $x = 3$, por tanto: $y = (x - 3) \cdot (ax - b)$

Por otro lado, cuando $x = 0$, $y = 1$, así: $1 = -3 \cdot (-b) = 3b$, $b = \frac{1}{3}$

Quedando: $y = (x - 3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right)$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes X e Y (positivos), los límites de integración son 0 y 3.

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x-3) \cdot \left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que $a = \dfrac{1}{27}$

Por tanto, el polinomio es: $y = (x-3) \cdot \left(\dfrac{1}{27}x - \dfrac{1}{3}\right)$

Ejercicio 24:

Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero: $y' = 2x + 2 = 0$, el punto es $(-1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 1$ es $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 6x - 2$ es $(2, 10)$; y de $y = 1$ con $y = 6x - 2$ es $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Distinguimos dos intervalos de integración: de -1 a $\dfrac{1}{2}$ y de $\dfrac{1}{2}$ a 2.

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

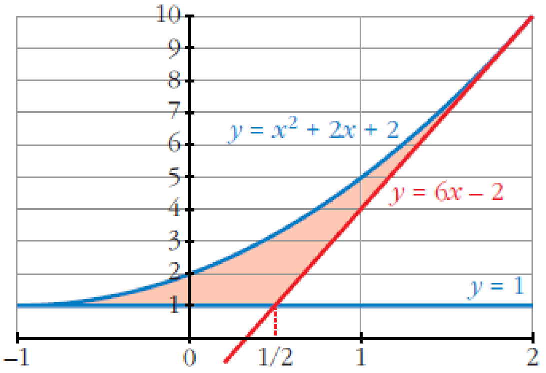
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3},\ G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24},\quad G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



Ejercicio 25:

De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$.

Calcula a, b, c y d.

Sabemos que pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0$, de donde averiguamos que $d = 0$.

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en $x = 1$, esto es que $f'(1) = 0$, es decir: $3a + 2b + c = 0$.

También tiene un punto de inflexión en (0, 0), por lo que $f''(0) = 0$, de donde $b = 0$.

Como $3a + 2b + c = 0$ y $b = 0$, se tiene que $3a + c = 0 \quad \rightarrow \quad c = -3a$.

Así, nuestra función queda reducida a la función: $f(x) = ax^3 - 3ax$.

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0,\ \ G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es $-\frac{5a}{4}$ que es igual a $\frac{5}{4}$, de donde deducimos que $a = -1$ y por tanto $c = 3$.

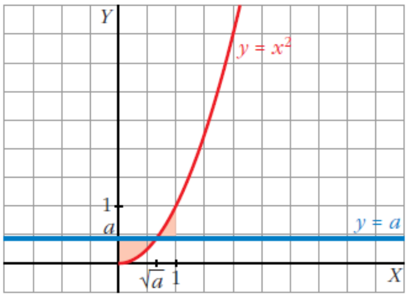
La función buscada es $f(x) = -x^3 + 3x$.

Ejercicio 26:

Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

El punto de corte es $(\sqrt{a}, a)$.

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:



Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\sqrt{a}$ y de $\sqrt{a}$ a 1.

La función diferencia para el primer intervalo es:

$$f_1(x) = a - x^2$$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0,\ \ G_1\left(\sqrt{a}\right) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el primer intervalo es $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2\left(\sqrt{a}\right) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a},\ \ G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área en el segundo intervalo es $\frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que $a = \frac{1}{3}$

Ejercicio 27:

Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

I. Hallamos la función diferencia:

$$y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$$

II. Buscamos su primitiva:

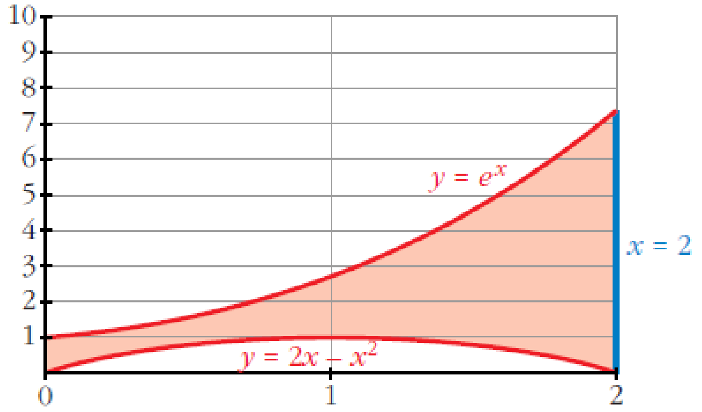
$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es $\left(e^2 - \frac{4}{3} - 1\right)$ u^2.



Ejercicio 28:

Halla el área de la región del plano limitado por la curva $y = \ln x$, la recta $y = 2$ y los ejes de coordenadas.

La curva $y = \ln x$ e $y = 2$ se cortan en $x = e^2$, por tanto los límites de integración son 1 y e^2. Por otro lado, la región comprendida entre 0 y 1.

Así que distinguimos dos intervalos: de 0 a 1 y de 1 a e^2.

En e primer intervalo, la función diferencia es: $y = 2 - 0 = 2$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = 2x$$

$$G_1(0) = 0, \quad G_1(1) = 2$$

$$G_1(1) - G_1(0) = 2$$

El área para el primer intervalo es 2 u^2.

En el segundo intervalo, la función diferencia es:

$$y = 2 - \ln x$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = 2x - (x \cdot \ln |x| - x) = 3x - x \ln |x|$$

$$G_2(e^2) = 3 \cdot e^2 - e^2 \cdot 2 = e^2$$

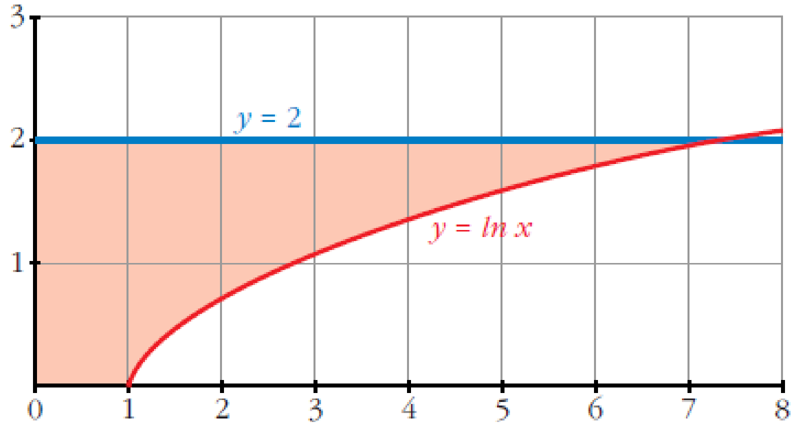
$$G_2(1) = 3$$

$$G_2(e^2) - G_2(1) = e^2 - 3$$

El área para el segundo intervalo es $(e^2 - 3)$ u^2.

Por tanto, el área total es:

$$(2 + e^2 - 3) = (e^2 - 1) \text{ u}^2.$$



Ejercicio 29:

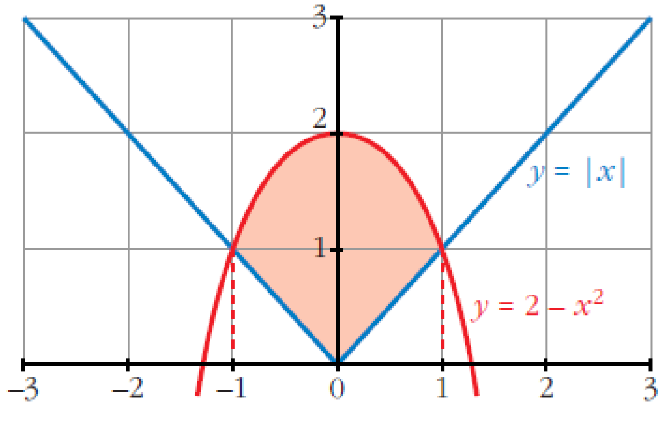
Calcula el área de la figura limitada por las curvas que se dan en los siguientes casos:

a) $y = 2 - x^2, \quad y = |x|$

b) $x y + 8 = 0, \quad y = x^2, \quad y = 1$

c) $y = sen\, x, \quad y = cos\, x, \quad x = 0$

a)



Se cortan en $x = -1$ y $x = 1$.

En el intervalo de -1 a 0, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - (-x) = 2 - x^2 + x$$

En el intervalo de 0 a 1, la función diferencia es:

$$y = 2 - x^2 - x$$

Por simetría, basta calcular el área en uno de los dos intervalos, por ejemplo, en el segundo. Buscamos su función primitiva:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$$

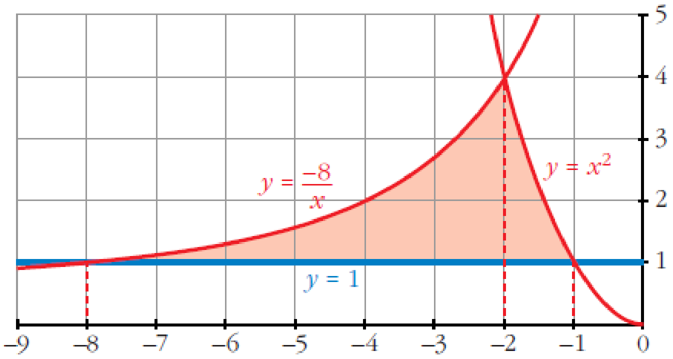
$$G(1) = \frac{7}{6}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(1) - G(0) = \frac{7}{6}$$

El área total es $2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$ u^2.

b)



Las tres funciones se cortan 2 a 2 en: –8, –2 y –1.

Por tanto, calculamos el área en dos intervalos, de –8 a –2 y de –2 a –1.

La función diferencia en el primer intervalo es: $y = \frac{-8}{x} - 1$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = -8 \cdot ln\ |x| - x$$

$$G_1(-8) = -8 \cdot ln\ (-8) + 8$$

$$G_1(-2) = -8 \cdot ln\ (-2) + 2$$

$$G_1(-2) - G_1(-8) = -8 \cdot ln\ (-2) + 2 + 8 \cdot ln\ (-8) - 8 =$$

$$= -8 \cdot \left(ln\ (-2) - ln\ (-8)\right) - 6 = -8 \cdot ln\left(\frac{1}{4}\right) - 6 = 8ln\ 4 - 6$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$y = x^2 - 1$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

$$G_2(-2) = \frac{-2}{3}$$

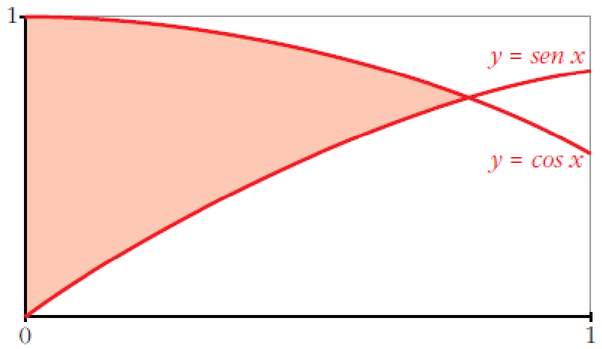
$$G_2(-1) = \frac{2}{3}$$

$$G_2(-1) - G_2(-2) = \frac{4}{3}$$

El área buscada es: $\left(8ln\ 4 - 6 + \frac{4}{3}\right) = \left(8ln\ 4 - \frac{14}{3}\right)$ u^2

Ejercicio 30:

c)



Las dos curvas se cortan en $x = \frac{\pi}{4}$.

Por tanto, nuestros límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Buscamos la función diferencia:

$$y = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$G(0) = 1$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) - G(0) = \sqrt{2} - 1$$

El área buscada es $(\sqrt{2} - 1)\ u^2$.

Ejercicio 31:

Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.

La curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ se cortan en el punto de abscisa $x = b$ y en $x = 0$.

Así, nuestros límites de integración son 0 y b.

La función diferencia es:

$$y = bx - x^2$$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$G(0) = 0$$

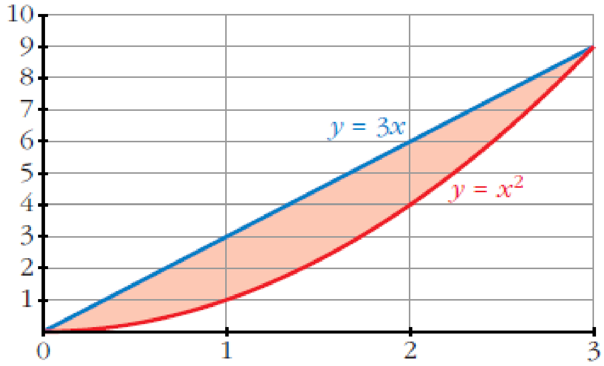
$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$

Como el área es $\frac{9}{2}$, se tiene que:

$$\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2},$$

de donde obtenemos que $b = 3$.



Ejercicio 32:

Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.

La curva corta al eje X en los puntos de abscisa 0 y a (estos son los límites de integración).

Su primitva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

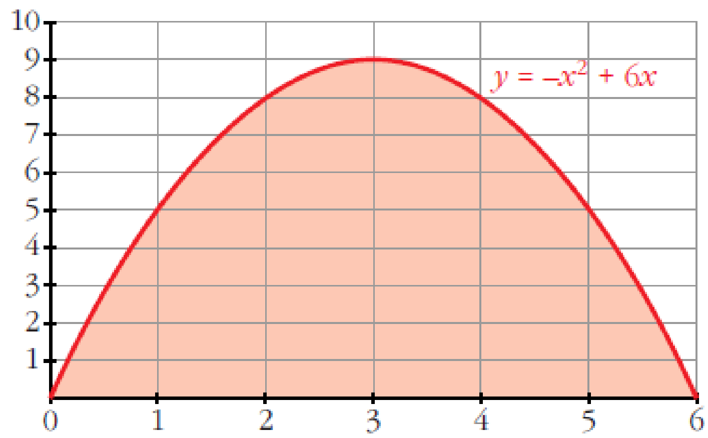
$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que:

$$\frac{a^3}{6} = 36,$$

de donde averiguamos que $a = 6$.



Ejercicio 33:

Dada la función $y = \frac{2}{x+1}$, calcula el valor de a para que el área limitada por esa curva y las rectas $x = 0$ y $x = a$ sea igual a 2.

Buscamos su primitiva:

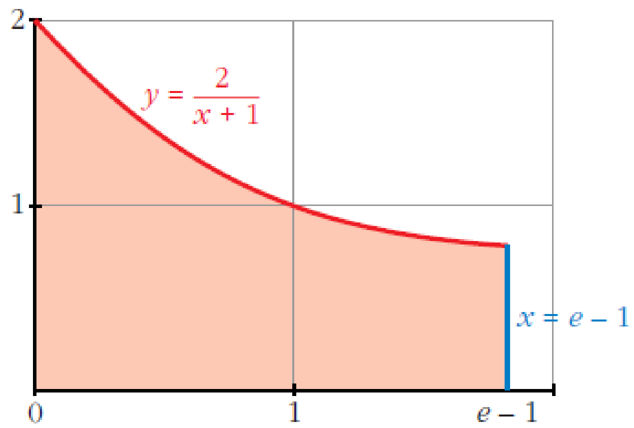
$$G(x) = 2 \cdot ln\ (x + 1)$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = 2 \cdot ln\ (a + 1)$$

$$G(a) - G(0) = 2 \cdot ln\ (a + 1)$$

Como el área es igual a 2, se tiene que: $2 \cdot ln\ (a + 1) = 2$, de donde averiguamos que $a = e - 1$.



Ejercicio 34:

Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

a) Si $k = 1$, nuestros límites de integración son 0 y 1.

Hallamos la función diferencia: $y = e^{2x} - e^x$

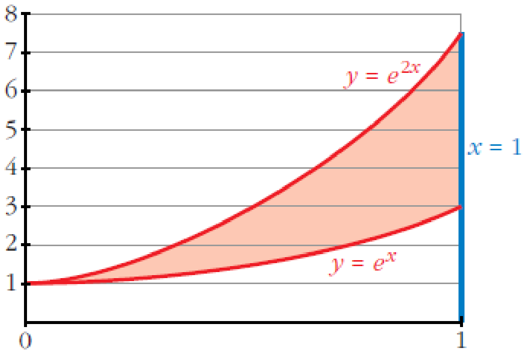
Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - e^x$$

$$G(0) = \frac{-1}{2}, \quad G(1) = \frac{e^2}{2} - e$$

$$G(1) - G(0) = \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$$

El área buscada es $\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right)$ u^2.



b) Ahora nuestros límites de integración son 0 y k. Como la función diferencia y su primitiva son las mismas que en el apartado a), se tiene que:

$$G(0) = \frac{-1}{2}$$

$$G(k) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k$$

$$G(k) - G(0) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Como el área es 2, se tiene que: $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2} = 2$

Resolviendo la ecuación, averiguamos que $k = ln\ (3)$.

Ejercicio 35:

Dadas $y = -x^2 + 1$ y la recta $y = a$, $a < 0$, determina el valor de a de modo que el área entre la curva y la recta sea $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ u^2.

La curva y la recta se cortan en los puntos de abscisa $x = -\sqrt{1-a}$ y $x = \sqrt{1-a}$.

La función diferencia es: $y = -x^2 + 1 - a$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + x - ax$$

$$G(-\sqrt{1-a}\,) = \frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} - \sqrt{1-a} + a \cdot \sqrt{1-a}$$

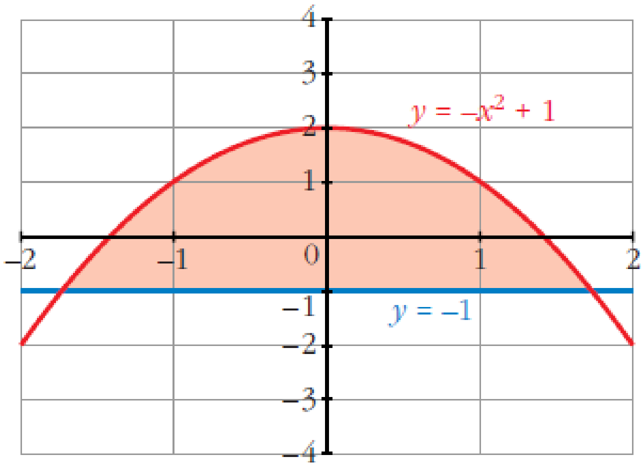
$$G(\sqrt{1-a}\,) = -\frac{(\sqrt{1-a})^3}{3} + \sqrt{1-a} - a \cdot \sqrt{1-a}$$

$$G(\sqrt{1-a}\,) - G(-\sqrt{1-a}\,) = \frac{4}{3}(1 - a) \cdot \sqrt{1-a}$$

Como el área es $\frac{8\sqrt{2}}{3}$, igualamos:

$$\frac{4}{3}(1 - a) \cdot \sqrt{1-a} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que $a = -1$.



Ejercicio 36:

Sea $F(x) = \int_1^x cos^2\, t\; dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Como $f(x) = cos^2\, x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$$F'(x) = cos^2\, x$$

Esta tiene sus extremos en los valores de x en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.