EJERCICIOS RESUELTOS GEOMETRÍA EN EL PLANO – HOJA 2

Cuestión 1:

Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (-3, -14)\\ \overrightarrow{QR} = (6, 28)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \rightarrow A,\ B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

Cuestión 2:

Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

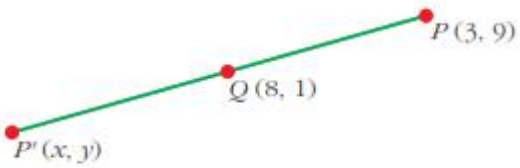
c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overline{PA}/\overline{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overline{PB}/\overline{PQ} = 1/5$.

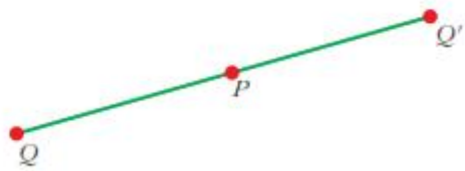
a) $M\left(\dfrac{3+8}{2}, \dfrac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13\\[2mm] \dfrac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11\end{array}\right\} \rightarrow P'(13, -11)$$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así: $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2\\[2mm] \dfrac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19\end{array}\right\} Q'(-2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l}x-3 = \dfrac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5\\[2mm] y-9 = \dfrac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5\end{array}\right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l}x-3 = 1 \rightarrow x = 4\\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7\end{array}\right\} B(4, 7)$$

Cuestión 3:

Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) Que pasa por $A(-3, 7)$ y tiene una dirección paralela al vector $\vec{d}(4, -7)$.

b) Que pasa por $M(5, 2)$ y es paralela a $\vec{d}'(2, 2)$.

En ambos casos, dando valores al parámetro, obtén otros cinco puntos de la recta.

a) $\vec{OX} = \vec{OA} + t\vec{d} \rightarrow (x, y) = (a_1, a_2) + t(d_1, d_2) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 7t \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2	3
(x, y)	$(-11, 21)$	$(-7, 14)$	$(-3, 7)$	$(1, 0)$	$(5, -7)$	$(9, -14)$

b) $\vec{OX} = \vec{OM} + t\vec{d}' \rightarrow (x, y) = (m_1, m_2) + t(d'_1, d'_2) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = m_1 + td'_1 \\ y = m_2 + td'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

t	-2	-1	0	1	2	3
(x, y)	$(1, -2)$	$(3, 0)$	$(5, 2)$	$(7, 4)$	$(9, 6)$	$(11, 8)$

Cuestión 4:

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por:

a) $P(5, -2)$ y $Q(0, 4)$

b) $M(3, 7)$ y $N(3, 0)$

c) $A(0, 0)$ y $B(7, 0)$

d) $R(1, 1)$ y $S(3, 3)$

a) El vector dirección es: $\vec{PQ} = (-5, 6) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - 5t \\ y = -2 + 6t \end{cases}$

b) $\vec{d} = \vec{MN} = (0, -7) \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 7t \end{cases}$

c) $\vec{d} = \vec{AB} = (7, 0) \rightarrow \begin{cases} x = 7t \\ y = 0 \end{cases}$

d) $\vec{d} = \vec{RS} = (2, 2) \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Cuestión 5:

Halla k para que $S(-5, k)$ pertenezca a $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$

$$\left. \begin{cases} -5 = 1 + 3t \rightarrow t = -6/3 = -2 \\ k = 2 - 4t \end{cases} \right\} \rightarrow k = 2 - 4(-2) = 10$$

Cuestión 6:

En cada caso, calcula la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) $A(2, -5)$ y $B(1, -3)$ b) $A(3, -3)$ y $B(-3, -3)$ c) $A(1, 4)$ y $B(1, -3)$ d) $A(-2, -4)$ y $B(3, -2)$

a) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ y la recta pasa por $A(2, -5)$.

Por tanto: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x - 4 = -y - 5 \Rightarrow AB \equiv 2x + y + 1 = 0$

b) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (-6, 0)$ y la recta pasa por $A(3, -3)$.

Por tanto: $\begin{cases} x - 3 = -6\lambda \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow AB \equiv y = -3$

c) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (0, -7)$ y la recta pasa por $A(1, 4)$.

Por tanto: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 4 = -7\lambda \end{cases} \Rightarrow AB \equiv x = 1$

d) El vector director es $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ y la recta pasa por $A(-2, -4)$.

Por tanto: $\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 5y + 20 \Rightarrow AB \equiv 2x - 5y - 16 = 0$

Cuestión 7:

Calcula las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices: $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ y $C(0, -3)$.

Las medianas son las rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

En primer lugar se calculan los puntos medios de los lados:

Lado AB: $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; lado BC: $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; lado CA: $N(1 \quad 0)$

La mediana correspondiente al lado AB pasa por C y M, y su vector director es: $\overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \parallel \vec{u} = (1, 9)$.

Luego la ecuación de la recta es $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{9} \Rightarrow 9x = y + 3 \Rightarrow CM \equiv 9x - y - 3 = 0$.

La mediana correspondiente al lado BC pasa por A y P, y su vector director es: $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{5}{2} \quad -\frac{9}{2}\right) \parallel (5, 9)$.

Luego la ecuación de la recta es $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{9} \Rightarrow 9x - 18 = 5y - 15 \Rightarrow AP \equiv 9x - 5y - 3 = 0$.

La mediana correspondiente al lado CA pasa por B y N, y su vector director es: $\overrightarrow{NB} = (2, 0)$.

Luego la ecuación de la recta es $BN \equiv y = 0$.

Cuestión 8:

. **Calcula las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto $A(-3, 5)$.**

La recta paralela al eje OX que pasa por A es $y = 5$, y la recta paralela al eje OY que pasa por A es $x = -3$.

Cuestión 9:

Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que tiene por ecuación:

$$5x - 3y + 8 = 0$$

Sea $x = t \rightarrow 5t - 3y + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 8/3 + (5/3)t \end{cases}$

NOTA – 2º MÉTODO

El vector $(5, -3)$ es perpendicular a r. Por tanto, el vector $(3, 5)$ es paralelo a r. Podemos tomarlo como vector dirección:

$$\vec{d} = (3, 5)$$

Si $x = 0 \rightarrow y = \frac{8}{3}$. Luego $\left(0, \frac{8}{3}\right) \in r$

Así, las ecuaciones paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = 3t \\ y = 8/3 + 5t \end{cases}$$

(equivalente a la obtenida por el otro método).

Cuestión 10:

Halla la ecuación implícita de la recta: $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y las sumamos:

$$\begin{aligned} 2x &= 10 - 6t \\ 3y &= -3 + 6t \\ \hline 2x + 3y &= 7 \rightarrow r\text{: } 2x + 3y - 7 = 0 \end{aligned}$$

NOTA – 2º MÉTODO: $\left.\begin{aligned} x = 5 - 3t &\rightarrow t = \dfrac{x-5}{-3} \\ y = -1 + 2t &\rightarrow t = \dfrac{y+1}{2} \end{aligned}\right\} \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+1}{2}$

$$2x - 10 = -3y - 3$$

$$r\text{: } 2x + 3y - 7 = 0$$

Cuestión 11:

Escribe la ecuación de la recta de pendiente 3 y cuya ordenada en el origen es –5.

$\left.\begin{aligned} &m = 3 \\ &P(0, -5) \in r \end{aligned}\right\} \rightarrow r\text{: } y = -5 + 3(x - 0) \rightarrow$

$\rightarrow r\text{: } y = 3x - 5 \rightarrow$ ECUACIÓN EXPLÍCITA

$\rightarrow r\text{: } 3x - y - 5 = 0 \rightarrow$ ECUACIÓN IMPLÍCITA

Cuestión 12:

Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes pares de puntos:

a) (–7, 11), (1, 7) **b) (3, –2), (1, 4)**

c) (6, 1), (11, 1) **d) (–2, 5), (–2, 8)**

a) $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{7 - 11}{1 - (-7)} = \dfrac{-4}{8} = \dfrac{-1}{2}$ Tomando el punto (1, 7) $\Big\}$ $y - 7 = \dfrac{-1}{2}(x - 1)$; $x + 2y - 15 = 0$

b) $m = \dfrac{4 + 2}{1 - 3} = \dfrac{6}{-2} = -3$ Tomando el punto (1, 4) $\Big\}$ $y - 4 = -3(x - 1)$; $3x + y - 7 = 0$

c) $m = \dfrac{1 - 1}{11 - 6} = 0$ Tomando el punto (6, 1) $\Big\}$ $y - 1 = 0 \rightarrow y = 1$

d) $m = \dfrac{8 - 5}{-2 + 2}$ ¡Imposible! Entonces, no tiene pendiente.

No se puede poner de forma explícita. Es la recta $x = -2$, paralela al eje Y.

Cuestión 13:

Halla dos puntos de la recta $y = -3x + 4$. Calcula a partir de ellos su pendiente, y comprueba que es la que corresponde a esa ecuación.

Si $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0, 4) \in r$

Si $x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow B(1, 1) \in r$

$$m = \frac{1-4}{1-0} = \frac{-3}{1} = -3$$

Efectivamente, es la de la recta $y = -3x + 4$.

Cuestión 14:

Halla un vector director y otro normal de la recta que pasa por el punto $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ y por el origen de coordenadas.

Vector director: $\overrightarrow{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) \parallel \vec{u} = (-6, 1)$

Vector normal: $(1, 6)$

Cuestión 15:

Una recta tiene como vector normal $\vec{n} = (2, -3)$ y pasa por el punto $A(-1, 2)$.
Escribe su ecuación normal, su ecuación normal canónica y su ecuación general.

Ecuación general:

La ecuación general es de la forma $2x - 3y + k = 0$. Como la recta pasa por A, ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.
Por tanto, la ecuación general de la recta es: $2x - 3y + 8 = 0$.

Ecuación normal:

Si $X(x, y)$ es un punto de la recta, se verifica que $\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (x+1,\ y-2) \cdot (2,\ -3) = 0 \Rightarrow 2(x+1) - 3(y-2) = 0$

Ecuación normal canónica:

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y + \frac{8}{\sqrt{13}} = 0$$

Cuestión 16:

Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(0, -2)$ y $B(1, 4)$ y que pasa por el punto $C(3, 0)$.

$\overrightarrow{AB} = (1, 6)$ es un vector normal a la recta. Por tanto, la ecuación de la recta es de la forma $x + 6y + k = 0$. Como pasa por el punto C, ha de ser $3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$. Por tanto, la ecuación pedida es $x + 6y - 3 = 0$.

Cuestión 17:

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-2, 4)$ y tiene de pendiente $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la recta es de la forma $y = \frac{1}{2}x + n$. Como pasa por A, ha de ser $4 = \frac{1}{2}(-2) + n \Rightarrow n = 5$.
Por tanto, la ecuación pedida es $y = \frac{1}{2}x + 5$, o bien en su forma general: $x - 2y + 10 = 0$.

Cuestión 18:

Estudia la posición relativa de las rectas:

a) $2x + 5y - 5 = 0$ y $3x - 5y + 5 = 0$

b) $3x + 5y - 5 = 0$ y $9x + 15y + 5 = 0$

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow$ son rectas secantes. Se cortan en: $\begin{cases} 3x + 5y - 5 = 0 \\ 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 10y - 10 = 0 \Rightarrow y = 1,\ x = 0 \Rightarrow P(0\quad 1)$.

b) $\frac{3}{9} = \frac{5}{15} \neq \frac{-5}{5} \Rightarrow$ son rectas paralelas.

Cuestión 19:

Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta r: $2x + y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas s: $x - y + 5 = 0$ y t: $x + y + 1 = 0$.

Se calcula el punto de intersección de s y t: $\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(-3, 2)$

Todas las paralelas a r son de la forma $2x + y + k = 0$. Como tiene que pasar por $(-3, 2)$, se tiene: $-6 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = 4$

La ecuación de la recta buscada es $2x + y + 4 = 0$

Cuestión 20:

Halla el ángulo que forman las siguientes rectas:

$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$ $\qquad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

Los vectores directores de r_1 y r_2 son, respectivamente, $\vec{d_1}(-2, 1)$ y $\vec{d_2}(-4, 3)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{|\vec{d_1}|\,|\vec{d_2}|} = \frac{8+3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{25}} = \frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{25} \approx 0{,}984 \rightarrow \alpha = 10^\circ\ 18'\ 17{,}4''$$

Cuestión 21:

Averigua la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} -x + 3y + 4 = 0 \\ 3x - 9y - 12 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 5x + y + 3 = 0 \\ x - 2y + 16 = 0 \end{cases}$

Se puede resolver el sistema o bien observar los coeficientes y el término independiente de ambas ecuaciones:

a) $\frac{A}{A'} = \frac{-1}{3} = \frac{3}{-9} = \frac{B}{B'} = \frac{4}{-12} = \frac{C}{C'}$

Es decir: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \rightarrow$ Son la misma recta.

b) $\frac{5}{1} \neq \frac{1}{-2} \rightarrow \frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Para calcular el punto de corte, bastará con resolver el sistema.

Despejando en la primera ecuación: $y = -3 - 5x$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-3 - 5x) + 16 = 0 \rightarrow x + 6 + 10x + 16 = 0 \rightarrow 11x = -22 \rightarrow x = -2$$

Con lo que:

$$y = -3 - 5(-2) = 7 \rightarrow (x, y) = (-2, 7) \rightarrow \text{Punto de corte}$$

Cuestión 22:

¿Cuál es la posición relativa de estos dos pares de rectas?

a) $\begin{cases} 3x + 5y - 8 = 0 \\ 6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ **b)** $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

a) $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \rightarrow$ Son paralelas.

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - 4 = 0 \\ x - y \quad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + x - 4 = 0 \\ x \quad = y \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x = 4 \rightarrow x = 4/3 \\ y = 4/3 \end{array}$

Son dos rectas que se cortan en el punto $(4/3, 4/3)$

Cuestión 23:

. Halla la distancia de $Q(-3, 4)$ a las siguientes rectas:

a) $2x + 3y = 4$ **b)** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5}$ **c)** $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$ **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

a) $2x + 3y - 4 = 0$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|-6 + 12 - 4|}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} \approx 0{,}55$$

b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x - 5 = 2y - 8 \rightarrow 5x - 2y + 3 = 0$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{|-15 - 8 + 3|}{\sqrt{29}} = \frac{20\sqrt{29}}{29} \approx 3{,}71$$

c) $\left.\begin{array}{l} t = \frac{x-1}{-2} \\ t = \frac{y-3}{-6} \end{array}\right\} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-6} \rightarrow -6x + 6 = -2y + 6 \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 3x - y = 0$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) - 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{|-9 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10} \approx 4{,}11$$

d) $3x + 2y = 6 \rightarrow 3x + 2y - 6 = 0$

$$dist\,(Q, r) = \frac{|3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-9 + 8 - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} \approx 1{,}94$$

Cuestión 24:

Calcula el ángulo que forman las rectas:

a) r: $3x - 4y = 0$ y s: $2x + 2y + 3 = 0$ b) r: $y = x - 5$ y s: $y = 2x + 2$

a) Los vectores normales son $\vec{n}_1 = (3, -4)$ y $\vec{n}_2 = (2, 2)$. Luego:

$$\cos\,(\widehat{r, s}) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|6 - 8|}{\sqrt{9+16}\,\sqrt{4+4}} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0{,}141 \Rightarrow \alpha = 81°52'$$

b) Las pendientes son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$.

Luego $\operatorname{tg} \alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{1 - 2}{1 + 2}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18°26'$

__Cuestión 25__:

Calcula el simétrico de $P(-2, 3)$ respecto del punto $M(1, -4)$.

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado. M es el punto medio del segmento PP'. Por tanto:

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow \frac{-2 + a}{2} = 1 \Rightarrow a = 4 \qquad \frac{3 + b}{2} = -4 \Rightarrow b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

__Cuestión 26__:

Calcula el simétrico de $P(5, -1)$ respecto de la recta r: $x - y + 3 = 0$.

En primer lugar se calcula la recta perpendicular a r que pasa por P. Dicha recta tiene como vector director el vector normal de r, $n = (1, -1)$, luego:

$$s \equiv \frac{x - 5}{1} = \frac{y + 1}{-1} \Rightarrow -x + 5 = y + 1 \Rightarrow s \equiv x + y - 4 = 0$$

El punto de intersección de ambas rectas es:

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Sea $P'(a, b)$ el punto buscado. M es el punto medio del segmento PP'. Por tanto:

$$\frac{5 + a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -4 \qquad \frac{-1 + b}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow b = 8 \Rightarrow P'(-4, 8)$$

__Cuestión 27__:

Calcula la recta simétrica del eje de ordenadas respecto de $y = x + 1$.

Primero calculamos el punto Q de intersección de ambas rectas ya que es el único invariante por la simetría: $r \equiv y = x + 1$

$$Q = r \cap OY \equiv \begin{cases} y = x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0, 1)$$

Para calcular la recta simétrica indicada basta con determinar el simétrico P' de otro punto cualquiera, P, del eje de ordenadas, ya que la recta buscada será de determinada por los puntos Q y P'.

El punto $P(0, 3)$ pertenece al eje Y. El vector director de r es $(1, 1)$, luego el de la recta perpendicular es $(1, -1)$.

La recta perpendicular a r por el punto P es $y = -x + 3$, que corta a r en $M(1, 2)$. Para hallar el punto P', simétrico de P respecto de r, se utiliza que M es el punto medio del segmento PP', con lo que debe ser $P'(2, 1)$. Por lo tanto, la recta simétrica del eje Y respecto de r es la que pasa por Q y P', cuya ecuación es $y = 1$.

__Cuestión 28__:

. **Halla el extremo B del segmento $\overline{AB}$ siendo $A(2, 1)$, y la mediatriz del segmento es r: $x + 2y - 9 = 0$.**

Sea $B(a, b)$. Como la mediatriz es perpendicular al segmento: $\overline{AB} = (a - 2, b - 1) = k(1, 2)$

El punto medio de AB pertenece a r, por lo que $\dfrac{2 + (2 + k)}{2} + 2\,\dfrac{1 + (1 + 2k)}{2} - 9 = 0 \Rightarrow k = 2$

Por tanto, el extremo es $B(4, 5)$.

__Cuestión 29__:

Escribe las ecuaciones paramétricas de las siguientes rectas:

a) Su vector de posición es $\vec{a}(-3, 1)$ y su vector de dirección $\vec{v}(2, 0)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ y es paralela a: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) Es perpendicular al segmento PQ en su punto medio, siendo $P(0, 4)$ y $Q(-6, 0)$, en su punto medio.

a) La ecuación vectorial será:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (pues debe ser paralela a ella).

Luego: $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por $A(5, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta r: $2x - 3y + 6 = 0$ es:

$$m_r = \frac{2}{3} \rightarrow m_s = \frac{-3}{2} \quad (\text{pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector director puede ser $\vec{s} = (2, -3)$.

Además, $A(1, 3) \in s$.

Por tanto, $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punto medio de PQ es $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-6, -4)$

$\rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}(4, -6) \text{ es un vector director de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \overrightarrow{PQ} \end{cases}$

Luego, $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

Cuestión 30:

Halla la distancia del punto $P(2, -3)$ a las siguientes rectas:

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$ **b)** $y = \frac{9}{4}$ **c)** $2x + 5 = 0$

a) Veamos primero la ecuación implícita de la recta:

$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x + 2y = 0$

Entonces:

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b) $y = \frac{9}{4} \rightarrow y - \frac{9}{4} = 0$

Por tanto:

$$dist(P, r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c) $dist(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \frac{9}{2}$

Cuestión 31:

Calcula la distancia del origen de coordenadas a las siguientes rectas:

a) $3x - 4y + 12 = 0$ **b)** $2y - 9 = 0$

c) $x = 3$ **d)** $3x - 2y = 0$

a) $dist(0, r) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{12}{5}$

b) $dist(0, r) = \dfrac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{2}$

c) $dist(0, r) = \dfrac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \dfrac{3}{1} = 3$

d) $dist(0, r) = \dfrac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{13}} = 0$

(es decir, la recta $3x - 2y = 0$ pasa por el origen).

Cuestión 32:

Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{2} \rightarrow$

  $\rightarrow A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow$

  $\rightarrow B(5, 0)$ es el punto de corte con el eje X

- Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = (5 - 0)^2 + \left(0 - \dfrac{5}{2}\right)^2 =$

  $= 25 + \dfrac{25}{4} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

Cuestión 33:

Halla la distancia entre las rectas $r: x - 2y + 8 = 0$ y $r': -2x + 4y - 7 = 0$.

☛ ***Comprueba que son paralelas; toma un punto cualquiera de r y halla su distancia a r'.***

Sus pendientes son $m_r = \dfrac{1}{2} = m_{r'} \rightarrow$ Son paralelas.

Entonces, la distancia entre r y r' será:

$$dist(P, r') \text{ donde } P \in r$$

Sea $x = 0$.

Sustituyendo en $r \to y = \frac{-8}{-2} = 4 \to P(0, 4) \in r$

Así:

$$dist(r, r') = dist(P, r') = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

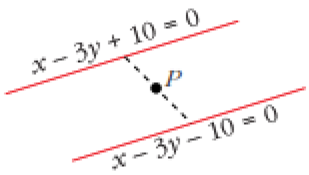
Cuestión 34:

Determina c para que la distancia de la recta $x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades. (Hay dos soluciones).

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \to c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \to c_2 = -10 \end{cases}$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



Cuestión 35:

Calcula el valor de a para que la distancia del punto $P(1, 2)$ a la recta $ax + 2y - 2 = 0$ sea igual a $\sqrt{2}$.

$$dist(P, r) = \sqrt{2} \to \frac{|a \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \to$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = \sqrt{2} \to a + 2 = \sqrt{2(a^2 + 4)} \\ \dfrac{a + 2}{\sqrt{a^2 + 4}} = -\sqrt{2} \to a + 2 = -\sqrt{2(a^2 + 4)} \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado obtenemos la misma ecuación en ambos casos.

$$\to (a + 2)^2 = 2(a^2 + 4) \to a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 8 \to$$

$$\to a^2 - 4a + 4 = 0 \to a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$

Cuestión 36:

Calcula un vector de dirección y otro normal a cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por los puntos $A(2, -5)$ y $B(-5, -1)$.

b) Pasa por $O(0, 0)$ y por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ con $A(2, 6)$ y $B(-2, -4)$.

c) Mediatriz del segmento de extremos $P(3, 5)$ y $Q(5, 2)$.

a) Vector de dirección: $\overrightarrow{AB} = (-5 - 2, -1 + 5) = (-7, 4)$; vector normal: $(4, 7)$

b) El punto medio es $M\left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{6 - 4}{2}\right) = (0, 1)$. Por tanto, un vector de dirección es $(0, 1)$, y uno normal, $(-1, 0)$.

c) Un vector normal a la mediatriz es $\overrightarrow{PQ} = (5 - 3, 2 - 5) = (2, -3)$. Un vector director es $(3, 2)$.

Cuestión 37:

. Halla las ecuaciones paramétricas de las rectas:

a) $r \equiv y = -2x + 3$ c) $t \equiv \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$

b) $s \equiv 4x + 3y - 6 = 0$ d) La recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene de pendiente $m = -2$.

a) La recta pasa por el punto $P(0, 3)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (2, 1)$, un vector director es $\vec{u} = (1, -2)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

b) La recta pasa por el punto $P(0, 2)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (4, 3)$, un vector director es $\vec{u} = (-3, 4)$.

Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$

c) La recta pasa por el punto $P(2, 0)$. Como un vector normal es $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \parallel (2, 3)$, un vector director es $\vec{u} = (-3, 2)$. Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta es $y = 1 - 2x$. Pasa por el punto $(0, 0)$. Como un vector normal es $\vec{n} = (2, 1)$, un vector director es $\vec{u} = (1, -2)$. Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases}$

Cuestión 38:

Calcula la pendiente de las siguientes rectas:

a) r: $y = -2x + 3$

b) r: $2x - 3y + 5 = 0$

c) r: $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0$

d) Recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$.

e) Recta que pasa por los puntos $P(1, a)$ y $Q(1, 3a)$.

f) Recta cuyo vector director es $\vec{u} = (-3, 5)$.

g) Recta cuyo vector normal es $\vec{n} = (2, -7)$.

h) r: $\begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

a) La recta está en forma explícita, luego $m = -2$.

b) $2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{5}y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{2}x + 25 \Rightarrow m = \frac{15}{2}$

d) La dirección es la del vector $\overrightarrow{PQ} = (2, 1) \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

e) $m = \frac{3a - a}{1 - 1} = \frac{2a}{0}$. Es una recta vertical (si $a = 0$ no es una recta, al ser P y Q el mismo punto).

f) $m = -\frac{5}{3}$

g) Su dirección es la del vector $\vec{u} = (7, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{7}$

h) Su dirección es la del vector $\vec{u} = (5, 2) \Rightarrow m = \frac{2}{5}$

Cuestión 39:

Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 6)$ y es paralela a r: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}$, $t \in R$

La ecuación tiene el mismo vector de dirección que la recta dada y pasa por P, luego:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 6 - t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 6}{-1} \Rightarrow -x + 2 = 2y - 12 \Rightarrow x + 2y - 14 = 0$$

Cuestión 40:

Estudia las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 3 + \frac{t}{2} \\ y = 1 - \frac{t}{2} \end{cases}$

b) $r: 3x - 2y = 7;$ $\quad s: 2x - 3y = 8$

c) r: $2x - y - 5 = 0$ $\quad s: -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - 5 = 0$

d) $r: x + y = 7$ $\quad s: -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

e) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$ $\quad s: 4x + y - 8 = 0$

f) $r: y = -2x + 3$ $\quad s: y = \frac{x}{2}$

a) Los vectores de dirección de las rectas son $\vec{u}_r = (1, -1) \parallel \vec{u}_s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Como el punto $P(3, 1)$ de s no pertenece a r, ya que $\begin{cases} 3 = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = 2 \\ 1 = 1 - \lambda \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$, las rectas son paralelas.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Las rectas son secantes. Se cortan en $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ -6x + 9y = -24 \end{cases} \Rightarrow y = -2\,x = 1 \Rightarrow P(1, -2)$.

c) s, se puede escribir como: $-2x + y - 15 = 0$ y al ser $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-5}{-15} \Rightarrow$ Las rectas son paralelas.

d) s, se escribe como $x + y - 7 = 0$, que es la misma expresión de r, por lo que las rectas son coincidentes.

e) $4(1 + \lambda) - 2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$. Las rectas son secantes en $\begin{cases} x = 1 + 3 = 4 \\ y = -2 - 6 = -8 \end{cases} \Rightarrow P(4, -8)$.

f) Las rectas son secantes. Se cortan en el punto $\frac{x}{2} = -2x + 3 \Rightarrow x = -4x + 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}\, y = \frac{3}{5} \Rightarrow P\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Cuestión 41:

Calcula el punto de intersección de los siguientes pares de rectas secantes:

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases}$

b) $r: 2x - 5y = -\frac{23}{2}$ $\quad s: 3x - 4y = -12$

c) $r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ $\quad s: -\frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0$

d) $s: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}$ $\quad s: 2x - y - 6 = 0$

Para calcular el punto de intersección basta resolver los sistemas de ecuaciones dados por las rectas.

a) $r = \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow s = \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - 4\mu \\ 1 + \lambda = 2 + 2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ 3\lambda - 6\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3\lambda + 4\mu = -1 \\ 3\lambda - 6\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$ El punto de intersección es P(5, 0).

b) $\begin{cases} r \equiv 2x - 5y = -\frac{23}{2} \\ s \equiv 3x - 4y = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 15y = -\frac{69}{2} \\ -6x + 8y = 24 \end{cases} \Rightarrow -7y = -\frac{21}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} x = -2 \Rightarrow P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} r \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \\ s \equiv \frac{x}{8} + \frac{2y}{3} + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{2}{3}y = 2 \\ -x + \frac{16y}{3} = -12 \end{cases} \Rightarrow 6y = -10 \Rightarrow y = -\frac{5}{3} x = \frac{28}{9} \Rightarrow P\left(\frac{28}{9}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv 2x - y - 6 = 0 \Rightarrow 2(2 - 3\lambda) + 2 - 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow$ P(2, −2)

Cuestión 42:

Calcula la ecuación de las siguientes rectas:

a) Paralela a $2x + 5y - 5 = 0$ y que pasa por el punto $A(-2, 6)$.

b) Paralela al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

c) Paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 4)$.

d) Paralela a r: $2x - y + 12 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Paralela a r: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, 4)$.

f) Paralela a r: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-2, -2)$.

g) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante y que tiene ordenada en el origen igual a 5.

a) La recta es de la forma $2x + 5y + k = 0$. Como pasa por A, ha de ser $-4 + 30 + k = 0 \Rightarrow k = -26$. Por tanto, la ecuación buscada es $2x + 5y - 26 = 0$.

b) La recta es $y = 4$.

c) La recta es $x = -1$.

d) La recta es de la forma $2x - y + k = 0$. Como pasa por $(0, 0)$, $k = 0$. Luego la ecuación es $2x - y = 0$.

e) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 + t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x + 2 = 2y - 8 \Rightarrow x - 2y + 10 = 0$$

f) La recta tiene la misma dirección que la dada, luego $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow y = -2$

g) La pendiente de la recta es $m = 1$, y la ordenada en el origen, $n = 5$. Luego la recta es $y = x + 5$.

Cuestión 43:

. Calcula la ecuación de las siguientes rectas:

a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ y que pasa por el punto $A(2, -1)$.

b) Perpendicular al eje de abscisas y que pasa por el punto $A(-4, 8)$.

c) Perpendicular al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A(-1, 3)$.

d) Perpendicular a r: $3x - 3y + 1 = 0$ y que pasa por el origen de coordenadas.

e) Perpendicular a $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ y que pasa por el punto $P(-1, 0)$.

f) Perpendicular al segmento $\overline{AB}$ con $A(-1, -3)$ y $B(2, -5)$ y que pasa por $P(-3, 2)$.

a) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, -2)$ y pasa por A, luego

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x + 4 = y + 1 \Rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

b) El vector de dirección es $\vec{u} = (0, 1)$ y pasa por A, luego $\begin{cases} x = -4 \\ y = 8 + t \end{cases} \Rightarrow x = -4$

c) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, 0)$ y pasa por A, luego $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3$

d) El vector de dirección es $\vec{u} = (3, -3)$ y pasa por $(0, 0)$, luego

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{3} = \frac{y}{-3} \Rightarrow -3x - 3y = 0 \Rightarrow 3x + 3y = 0$$

e) El vector de dirección es $\vec{u} = (1, -2)$ y pasa por P, luego

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-2} \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$$

f) $\overrightarrow{AB} = (3, -2)$; por tanto, el vector de dirección de la recta es $\vec{u} = (2, 3)$ y pasa por P,

luego $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{3} \Rightarrow 3x + 9 = 2y - 4 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

<u>Cuestión 44</u>:

En cada caso, calcula el valor del parámetro k para que las rectas tengan la posición relativa indicada.

a) r: $x - ky + 1 = 0$; s: $kx - 4y - 3 = 0$, paralelas.

b) r: $kx - 2y - 4k = 0$; s: $x - 3y - 4 = 0$, coincidentes.

c) r: $2kx + 5y - 1 = 0$; s: $3x - ky + 2 = 0$, paralelas.

a) Ha de verificarse que $\dfrac{1}{k} = \dfrac{-k}{-4} \neq \dfrac{-1}{3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

b) Ha de verificarse que $\dfrac{k}{1} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

c) Ha de verificarse que $\dfrac{2k}{3} = \dfrac{-5}{k} \neq \dfrac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Imposible, luego no pueden ser paralelas.

<u>Cuestión 45</u>:

Halla la distancia del punto $A(2, -3)$ al punto de intersección de las rectas $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$, s: $2x + y - 3 = 0$

El punto de intersección es $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 + y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1, 1) \Rightarrow d(A, P) = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}\,u$

<u>Cuestión 46</u>:

Calcula las coordenadas de los vértices y el perímetro del triángulo determinado por las rectas:

r: $x - 3y + 1 = 0$

s: $3x - 2y - 4 = 0$

t: $2x + y + 2 = 0$

En primer lugar se calculan los vértices, que son los puntos de corte de las rectas.

$$\begin{cases} r \equiv x - 3y + 1 = 0 \\ s \equiv 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 9y - 3 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y - 7 = 0 \Rightarrow y = 1\ x = 2 \Rightarrow A(2\quad 1)$$

$$\begin{cases} r \equiv x - 3y + 1 = 0 \\ t \equiv 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y - 2 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7y = 0 \Rightarrow y = 0\ x = -1 \Rightarrow B(-1\quad 0)$$

$$\begin{cases} s \equiv 3x - 2y - 4 = 0 \\ t \equiv 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 8 = 0 \\ -6x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow -7y - 14 = 0 \Rightarrow -7y - 14 = 0 \Rightarrow y = -2\ x = 0 \Rightarrow C(0\quad -2)$$

A continuación se calculan las longitudes de los lados:

$\overline{AB} = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

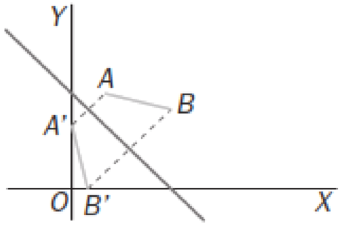
$\overline{CB} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$\overline{AC} = \sqrt{(-2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

El perímetro es: $P = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13}\ u$.

Cuestión 47:

Calcula las coordenadas de los extremos del segmento simétrico del $\overline{AB}$ respecto de la simetría axial de eje r siendo: $A(1, 3)$, $B\left(3, \frac{5}{2}\right)$ y r: $x + y = 3$.



Sea $\overline{A'B'}$ el segmento simétrico de $\overline{AB}$. Por tratarse de una simetría axial, la recta que pasa por A y A' es perpendicular a r. Su ecuación general es: $AA' \equiv x - y + k = 0 \Rightarrow 1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

El punto de corte de dicha recta con r es:

$$M \equiv AA' \cap r \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

M es el punto medio de A y A', luego:

$$A(1, 3), M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } A'(a, b) \Rightarrow \frac{1 + a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0; \frac{3 + b}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow A'(0, 2)$$

Siguiendo un proceso análogo para el punto B se tiene:

$$BB' \equiv x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0;$$

$$N \equiv BB' \cap r \Rightarrow \begin{cases} x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4}, \quad y = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

N es el punto medio de B y B', luego:

$$B\left(3, \frac{5}{2}\right), N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) \text{ y } B'(a, b) \Rightarrow \frac{3 + a}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; \frac{\frac{5}{2} + b}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = 0 \Rightarrow B'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

Cuestión 48:

Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ y $C(3, -2)$:

a) Calcula las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

b) Calcula las coordenadas del punto que equidista de A, B y C.

En primer lugar se calculan las ecuaciones de las rectas correspondientes a los lados del triángulo:

$$\overline{AB} \equiv \frac{x - 1}{-4} = \frac{y - 4}{-4} \Rightarrow x - y + 3 = 0$$

$$\overline{AC} \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-6} \Rightarrow -3x + 3 = y - 4 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$$

$$\overline{BC} \equiv \frac{x + 3}{6} = \frac{y}{-2} \Rightarrow -x - 3 = 3y \Rightarrow x + 3y + 3 = 0$$

a) La mediatriz es la perpendicular al lado que pasa por el punto medio, luego:

$M_{\overline{AB}} \equiv x + y + k = 0$ pasa por el punto $(-1, 2) \Rightarrow -1 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow x + y - 1 = 0$

$M_{\overline{AC}} \equiv x - 3y + k = 0$ pasa por el punto $(2, 1) \Rightarrow 2 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$

$M_{\overline{BC}} \equiv 3x + y + k = 0$ pasa por el punto $(0, -1) \Rightarrow 1 + k = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$

b) Se trata de calcular el circuncentro (punto donde se cortan las tres mediatrices): $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Cuestión 49:

Halla el punto de la recta r: $2x + y + 1 = 0$ y que equidista de los puntos $A(2, 2)$ y $B(-2, 4)$.

El punto buscado será la intersección de la recta r con la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es: $\frac{x}{1} = \frac{y - 3}{2} \Rightarrow 2x = y - 3 \Rightarrow y - 3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0.$

El punto de intersección es: $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 1)$

Cuestión 50:

Calcula el área del triángulo de vértices los puntos de corte de las rectas:

r: $x + 3y = 14$

s: $3x - 5y = -14$

t: $2x - y = -7$

Los vértices del triángulo son:

$\begin{cases} x + 3y = 14 \\ 3x - 5y = -14 \end{cases} \Rightarrow A(2, 4)$ $\quad \begin{cases} x + 3y = 14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-1, 5)$ $\quad \begin{cases} 3x - 5y = -14 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow C(-3, 1)$

La longitud de la base es: $d(A, B) = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}\ u$

La longitud de la altura es: $d(C, \overline{AB}) = \dfrac{|-3 + 3 - 14|}{\sqrt{10}} = \dfrac{14}{\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}\ u$

El área es: $S = \dfrac{\sqrt{10} \cdot \dfrac{14}{\sqrt{10}}}{2} = 7\ u^2$

Cuestión 51:

Calcula el valor de k para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes coordenados un triángulo de 5 unidades cuadradas de área.

La recta corta a los ejes coordenados en $(k, 0)$ y $(0, k)$. El área del triángulo será, por tanto, $\frac{k^2}{2}$.

$\frac{k^2}{2} = 5 \Rightarrow k = \sqrt{10}$.

Cuestión 52:

Halla las coordenadas de los puntos de la recta r: $x + 2y - 2 = 0$ y que distan 2 unidades de la recta s: $4x - 3y + 13 = 0$.

Sea X un punto genérico de r. Sus coordenadas son:

$$r \equiv x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow X(2 - 2t, t)$$

$$d(X, s) = \frac{4 \cdot (2 - 2t) - 3t + 13}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Rightarrow \pm\frac{21 - 11t}{5} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 21 - 11t = 10 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow P_1(0, 1) \\ 21 - 11t = -10 \Rightarrow t = \dfrac{31}{11} \Rightarrow P_2\left(-\dfrac{40}{11}, \dfrac{31}{11}\right) \end{cases}$$

Cuestión 53:

Calcula m y n en las rectas de ecuaciones:

$$r: mx - 2y + 5 = 0 \qquad s: nx + 6y - 8 = 0$$

sabiendo que son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(1, 4)$.

☛ ***Las coordenadas de P deben verificar la ecuación de r. Así calculas m. Expresa la perpendicularidad con vectores o con pendientes y halla n.***

- $P(1, 4) \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ (m, -2) \perp r \\ \ \ (n, 6) \perp s \\ \ \ \text{Como deben ser } r \perp s\end{array}\right\} \to (m, -2) \perp (n, 6) \to$$

$$\to (m, -2) \cdot (n, 6) = 0 \to m \cdot n + (-2) \cdot 6 = 0 \to$$

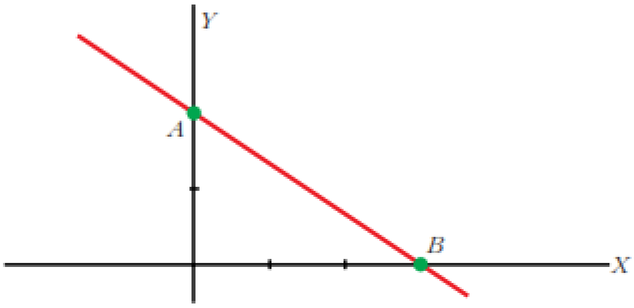
$$\to 3n - 12 = 0 \to n = 4$$

Cuestión 54:

La recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, al cortar a los ejes de coordenadas, un segmento AB.

Halla la ecuación de la mediatriz de AB.

Después de hallar los puntos A y B, halla la pendiente de la mediatriz, inversa y opuesta a la de AB. Con el punto medio y la pendiente, puedes escribir la ecuación.



- $A = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to 3y - 6 = 0 \to y = 2 \to A(0, 2)$

- $B = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to 2x - 6 = 0 \to x = 3 \to B(3, 0)$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \overrightarrow{AB} = (3, -2) \perp m_{AB} \text{ (mediatriz de } AB) \to \overrightarrow{m_{AB}} = (2, 3) \\ \ \ m_{AB}\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ (punto medio de } AB) \in \text{mediatriz}\end{array}\right\} \to$$

$$\to y - 1 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \to y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \to m_{AB}: 6x - 4y - 5 = 0$$

Cuestión 55:

Determina los puntos que dividen al segmento AB, $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, en tres partes iguales.

Si P y Q son esos puntos, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Escribe las coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ y de $\overrightarrow{AB}$ y obtén P. Q es el punto medio de $\overline{PB}$

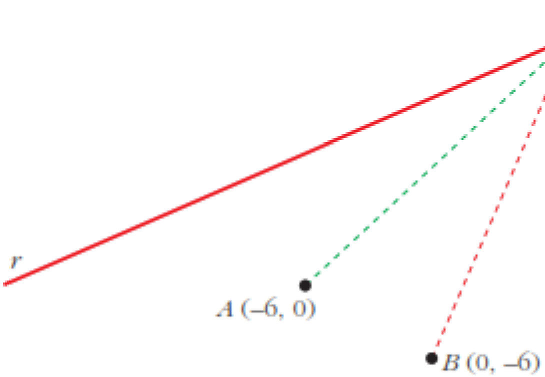
- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \rightarrow (x+2, y-1) = \frac{1}{3}(7, 3) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2 = \frac{7}{3} \rightarrow x = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \\ y - 1 = \frac{3}{3} \rightarrow y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \rightarrow P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

- Q es un punto medio de $PB \rightarrow Q\left(\frac{1/3+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \rightarrow Q\left(\frac{8}{3}, 3\right)$

Cuestión 56:

Halla el punto de la recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de $A(-6, 0)$ y $B(0, -6)$.



$P(x, y)$ debe verificar dos condiciones:

1. $P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

2. $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow 3x - 4x + 8 = 0 \rightarrow x = 8 = y \rightarrow P(8, 8)$

Cuestión 57:

Halla los puntos de la recta $y = -x + 2$ que equidistan de las rectas $x + 2y - 5 = 0$ y $4x - 2y + 1 = 0$.

Sean r_1, r_2 y r_3 las tres rectas del ejercicio, respectivamente.

Buscamos los puntos $P(x, y)$ que cumplan:

$$\begin{cases} P \in r_1 \Rightarrow y = -x + 2 \\ dist(P, r_2) = dist(P, r_3) \rightarrow \frac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{20}} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|x + 2(-x+2) - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2(-x+2) + 1|}{2\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\rightarrow |-x-1| = \frac{|6x-3|}{2} \rightarrow \begin{cases} -x-1 = \dfrac{6x-3}{2}, \text{ o bien} \\ -x-1 = \dfrac{-6x+3}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x-2 = 6x-3, \text{ o bien} \\ -2x-2 = -6x+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x = 1 \\ 4x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 5/4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{8} + 2 = \dfrac{15}{8} \\ y_2 = -\dfrac{5}{4} + 2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_1\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{15}{8}\right) \\ P_2\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

Cuestión 58:

Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta $x - 2y - 4 = 0$.

- $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}$ donde P' es el simétrico de P respecto a esa recta y $\vec{v}$ es el vector director de la misma.

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (x-1, y-1) \cdot (2, 1) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2(x-1) + (y-1) = 0 \rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

- Además, el punto medio de PP', m, debe pertenecer a la recta. Luego:

$$m\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \in r \rightarrow \frac{x+1}{2} - 2\,\frac{y+1}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + 1 - 2y - 2 - 8 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x - 2y - 9 = 0$$

- Así, teniendo en cuenta las dos condiciones:

$$\left.\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \rightarrow x = 9 + 2y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

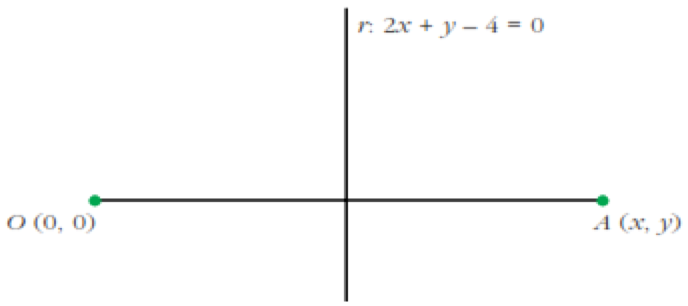
$$\rightarrow 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 — 18 + 4y + y - 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\rightarrow x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

Luego: $P' = (3, -3)$

Cuestión 59:

La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0, 0)$. Halla las coordenadas del otro extremo.



Un vector director de la recta es el $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \vec{OA} = \vec{v} \cdot \vec{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \rightarrow x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \rightarrow 4y + y - 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{8}{5} \rightarrow x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

Cuestión 60:

De todas las rectas que pasan por el punto $A(1, 2)$, halla la pendiente de aquella cuya distancia al origen es 1.

La ecuación $y = 2 + m(x - 1)$ representa a todas esas rectas. Pásala a forma general y aplica la condición $d(O, r) = 1$.

- Esas rectas tienen por ecuación:

$$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$$

- $d(0, r) = 1 \rightarrow \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$