HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 8: **DETERMINANTES**

Ejercicio 1: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

Ejercicio 2: Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz inversa de A.
b) Calcula A^{127} y A^{128}.
c) Determina x y y tal que $A \cdot B = B \cdot A$.

Ejercicio 3: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la inversa de A^2 para $a=0$.

Ejercicio 4: Determina la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = X - B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5: Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas usado.

Ejercicio 6: Sea $A=\begin{pmatrix} senx & -\cos x & 0 \\ \cos x & senx & 0 \\ senx+\cos x & senx-\cos x & 1 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

Ejercicio 7: Determina la matriz X tal que $A \cdot X - 3 \cdot B = \theta$, siendo:
$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 8: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el determinante de las matrices $2A$, A^{31} y $\left(A^{31}\right)^{-1}$
b) Halla la matriz A^{-1}

Ejercicio 9: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro λ, la matriz A no tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda=-2$.

Ejercicio 10: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.
b) Para $\alpha=2$, resuelve la ecuación matricial $AX=B$.

Ejercicio 11: Sean A y B dos matrices que verifican:
$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Halla las matrices $(A+B)\cdot(A-B)$ y A^2-B^2.
b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$

Ejercicio 12: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A-2I$ tiene inversa.
b) Para $\lambda=-2$, resuelve la ecuación matricial $AX=2X+I$.

Ejercicio 13: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A|=\frac{1}{2}$ y $|B|=-2$, halla:

a) $|A^3|$ b) $|A^{-1}|$ c) $|-2A|$ d) $|A\cdot B^t|$ e) El rango de B

Ejercicio 14: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica $A^3=I$.
b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) Calcula razonadamente A^{100}.

Ejercicio 15: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $A\cdot B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.
b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X-B=BA$.

Ejercicio 16: De la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se sabe que $\det(A)=4$.

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{pmatrix}$
b) Calcula $\det(A^{-1}\cdot A^t)$.
c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3=I$, halla $\det(B)$.

Ejercicio 17: Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de B^{-1}.
b) El determinante de $\left(B^t\right)^4$.
c) El determinante de $2B$.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3, 3F_3$ y F_2

Ejercicio 18: Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - k \cdot I$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.
c) Determina las constantes α y β para los que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

Ejercicio 19: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.
b) Para $k = 0$, halla la matriz inversa de A.

Ejercicio 20: Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $\left|A^{-1}\right|$.
b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.
c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.