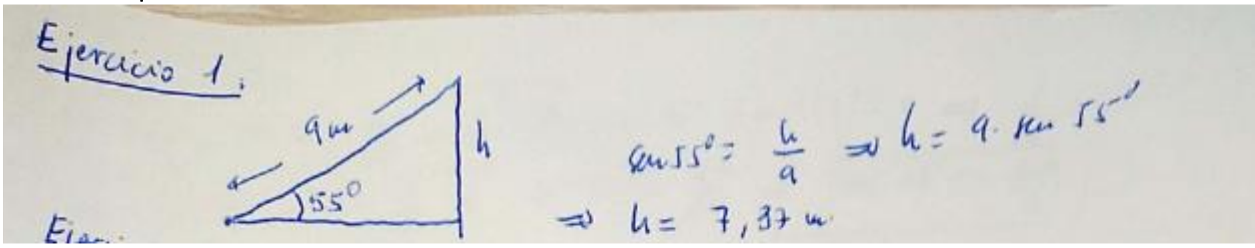
HOJA 1 DE EJERCICIOS
UNIDAD 2: TRIGONOMETRÍA II

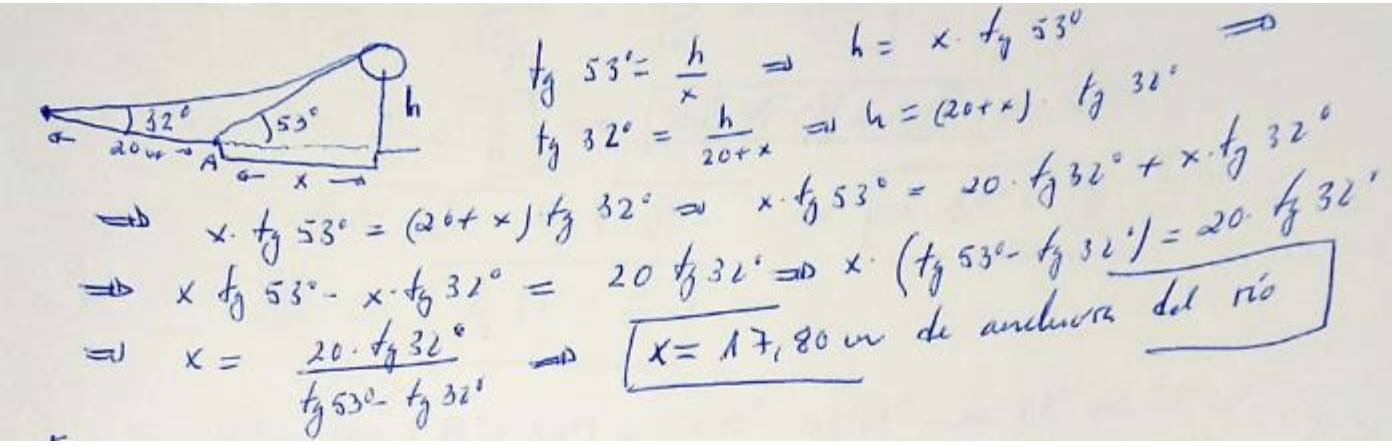
Ejercicio 1: Juan está volando una cometa. Ha soltado 9 m de cuerda, ésta forma un ángulo de 55° con el suelo. ¿A qué altura se encuentra la cometa?



Ejercicio2: Para hallar el ancho de un rio, realizamos las siguientes mediciones:

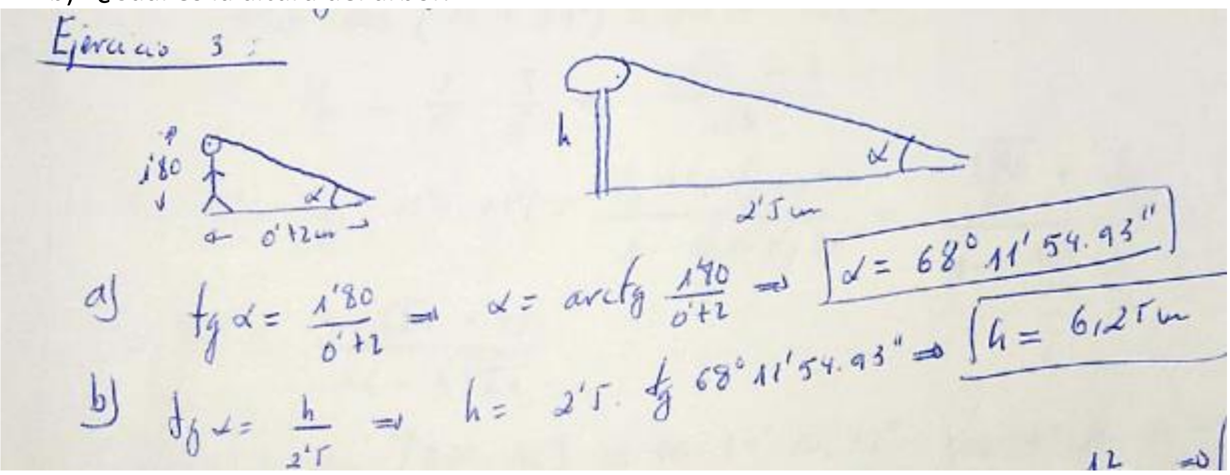
- En un punto A de la orilla medimos el ángulo bajo el cual se ve un árbol que está en la orilla opuesta. Este ángulo resulta ser de 53°.
- Nos alejamos 20 de la orilla en dirección perpendicular a ella y volvemos a medir el ángulo bajo el cual se ve el árbol, y éste es de 32°.

Calcula la anchura del rio.

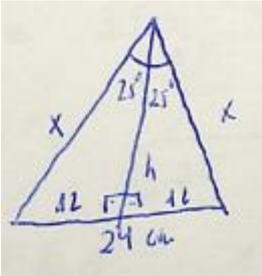


Ejercicio 3: Una persona de 1’80 m de altura proyecta una sombra de 72 cm, y en ese momento un árbol da una sombra de 2’5 m.

a) ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal?
b) ¿Cuál es la altura del árbol?



Ejercicio 4: Calcula los lados iguales y el área de un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 24 cm y el ángulo opuesto a ese lado mide 50°



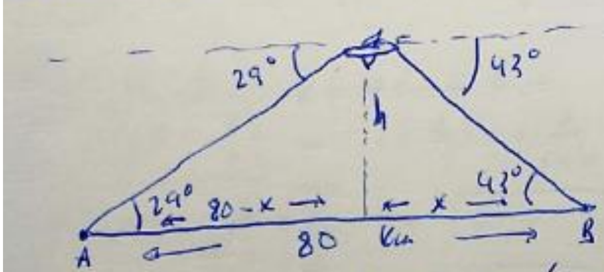
$\operatorname{sen} 25^\circ = \dfrac{12}{x} \Rightarrow x = \dfrac{12}{\operatorname{sen} 25^\circ} \Rightarrow \boxed{x = 28,39 \text{ cm cada lado}}$

$\operatorname{tg} 25^\circ = \dfrac{12}{h} \Rightarrow h = \dfrac{12}{\operatorname{tg} 25^\circ} \Rightarrow \boxed{h = 25,73 \text{ cm}}$

$\text{Área} = \dfrac{24 \cdot 25'73}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 308,76 \text{ cm}^2}$

Ejercicio 5: Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?

Ejercicio 5:



$\operatorname{tg} 29^\circ = \dfrac{h}{80-x} \Rightarrow h = (80-x)\cdot \operatorname{tg} 29^\circ$

$\operatorname{tg} 43^\circ = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 43^\circ$

$\Rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 43^\circ = (80-x)\cdot \operatorname{tg} 29^\circ$

$\Rightarrow x \operatorname{tg} 43^\circ = 80 \cdot \operatorname{tg} 29^\circ - x \cdot \operatorname{tg} 29^\circ \Rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 43^\circ + x \cdot \operatorname{tg} 29^\circ = 80 \cdot \operatorname{tg} 29^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (\operatorname{tg} 43^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ) = 80 \cdot \operatorname{tg} 29^\circ \Rightarrow x = \dfrac{80 \operatorname{tg} 29^\circ}{\operatorname{tg} 43^\circ + \operatorname{tg} 29^\circ}$

$\Rightarrow x = 29,83 \text{ Km} \Rightarrow h = 29,83 \cdot \operatorname{tg} 43^\circ \Rightarrow \boxed{h = 27,81 \text{ Km}}$

Ejercicio 6: Si $\operatorname{sen} 12^\circ = 0{,}2$ y $\operatorname{sen} 37^\circ = 0{,}6$, calcula sin usar la calculadora:

a) $\cos 49^\circ$ b) $\operatorname{tg} 49^\circ$ c) $\operatorname{sen} 25^\circ$ d) $\operatorname{cotg} 25^\circ$

Ejercicio 6:

$\boxed{\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 12^\circ + \cos^2 12^\circ = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{25} + \cos^2 12^\circ = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 12^\circ = 1 - \dfrac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 12^\circ = \dfrac{24}{25} \Rightarrow \boxed{\cos 12^\circ = \dfrac{\sqrt{24}}{5}}$

$\boxed{\operatorname{tg} 12^\circ = \dfrac{\operatorname{sen} 12^\circ}{\cos 12^\circ} = \dfrac{1/5}{\frac{\sqrt{24}}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{24}}{24}}$

$\boxed{\operatorname{sen} 37^\circ = 0'6 = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}} \Rightarrow \cos 37^\circ = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 37^\circ}$

$\Rightarrow \cos 37^\circ = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} \Rightarrow \boxed{\cos 37^\circ = \dfrac{4}{5}}$

$\operatorname{tg} 37^\circ = \dfrac{3/5}{4/5} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 37^\circ = \dfrac{3}{4}}$

a) $\cos 49^\circ = \cos(12^\circ + 37^\circ) = \cos 12^\circ \cdot \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ =$

$= \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{24} - 3}{25}$

b) $\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg}(12^\circ + 37^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 37^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{24} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{\sqrt{24}}{24} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{24} + 18}{24}}{\frac{96 - 3\sqrt{24}}{4 \cdot 96}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 49^\circ = \frac{4(\sqrt{24} + 18)}{96 - 3\sqrt{24}}$

c) $\operatorname{sen} 25^\circ = \operatorname{sen}(37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{sen} 37^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} -$

$- \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3\sqrt{24} - 4}{25}$

d) $\operatorname{cotg} 25^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 25^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg}(37^\circ - 12^\circ)} = \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ}{1 + \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 12^\circ}} =$

$= \frac{1 + \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 12^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ} = \frac{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{24}}{24}}{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{24}}{24}} = \frac{\frac{96 + 3\sqrt{24}}{96 \cdot 4}}{\frac{18 - \sqrt{24}}{24}} = \frac{96 + 3\sqrt{24}}{4 \cdot (18 - \sqrt{24})}$

Ejercicio 7: Si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ y α es del III Cuadrante, calcula sin usar la calculadora:

a) $\cos \alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $\operatorname{sen} 2\alpha$ d) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ e) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} 2\alpha$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ g) $\operatorname{sen}(\pi + \alpha)$ h) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ i) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

Ejercicio 7: $\alpha \in$ III Cuadrante.

$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$

$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}}$ (No válido) $\Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{-4}{5}} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{-4}{5} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \alpha = \frac{-3}{5}}$

a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

c) $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$

d) $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}}$

No olvides que $\frac{\alpha}{2} \in$ II Cuadrante

Como $\alpha \in$ III Cuadrante $\Rightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ \Rightarrow \frac{180^\circ}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{270^\circ}{2} \Rightarrow 90^\circ < \alpha < 135^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \in$ II Cuadrante.

$\Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$

e)

$$tg\,\frac{\alpha}{2} - tg\,2\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\sqrt{\frac{1-(-\frac{4}{5})}{1+(-\frac{4}{5})}} - \frac{2\cdot 3/4}{1-\frac{9}{16}}$$

No válido pues $\frac{\alpha}{2}\in$ II cuadrante

$$= -\sqrt{\frac{9/5}{1/5}} - \frac{3/2}{7/16} = -3 - \frac{24}{7} = \frac{-45}{7}$$

f)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cdot\cos\alpha - \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

g)

$$\sin(\pi+\alpha) = \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cdot\cos\alpha + \underbrace{\cos\pi}_{=-1}\sin\alpha = -\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

h)

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{10} = \frac{-4\sqrt{3}-3}{10}$$

i)

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{tg\,\frac{3\pi}{2} - tg\,\alpha}{1+tg\,\frac{3\pi}{2}\cdot tg\,\alpha}$$

$\nexists\ tg\,\frac{3\pi}{2}$

Tenemos que hacerlo de otra forma pues no se puede aplicar la fórmula.

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\left(-tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ suman 2π

$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ y $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ suman π

$$= cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$$

α y $\frac{\pi}{2}-\alpha$ son complementarios

OTRA FORMA,

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1}\cos\alpha - \underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0}\cdot\cos\alpha}{\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{=0}\cdot\cos\alpha + \underbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}_{=-1}\sin\alpha}$$

$$= \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$$

Ejercicio 8: Demuestra que: $\text{tg}\,(45^\circ-\alpha) - \text{tg}\,(45^\circ+\alpha) = -2\cdot\text{tg}\,2\alpha$

Ej. 8

$$tg(45^\circ-\alpha) - tg(45^\circ+\alpha) = \frac{\overbrace{tg\,45^\circ}^{=1} - tg\,\alpha}{1+tg\,45^\circ\cdot tg\,\alpha} - \frac{tg\,45^\circ + tg\,\alpha}{1-tg\,45^\circ\,tg\,\alpha} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2-(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}{(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1-\operatorname{tg}\alpha)} =$$

$$= \frac{(1-2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)-(1+2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{-4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -2\cdot\underbrace{\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)}_{=\operatorname{tg}2\alpha}$$

$$= -2\operatorname{tg}2\alpha.$$

Ejercicio 9: Demuestra que $\dfrac{\cos\ \alpha + \text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha - \text{sen}\ \alpha}\cdot\cos\ 2\alpha\ =\ 1+\text{sen}\ 2\alpha$

Ej. 9.

$$\frac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}\cdot\cos2\alpha = \frac{\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha}\cdot(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha) =$$

$$= \frac{(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)}{\cancel{(\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha)}}\cdot\cancel{(\cos\alpha-\text{sen}\,\alpha)}\cdot(\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha) = (\cos\alpha+\text{sen}\,\alpha)^2 =$$

$$= \underbrace{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}_{1} + \underbrace{2\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha}_{\text{sen}\,2\alpha} = 1+\text{sen}\,2\alpha.$$

Ejercicio 10: Si $\operatorname{tg}\ (\alpha+\beta)=4$ y $\operatorname{tg}\ \alpha=2$, calcula $\operatorname{tg}\ 2\beta$

Ej. 10:

$\operatorname{tg}\alpha = 2$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=4 \Rightarrow \frac{2+\operatorname{tg}\beta}{1-2\operatorname{tg}\beta}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+\operatorname{tg}\beta = 4-8\operatorname{tg}\beta \Rightarrow 9\operatorname{tg}\beta=2 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\beta=\frac{2}{9}}$$

Luego $$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2\cdot\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{81}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{77}{81}} = \frac{36}{77}$$

Ejercicio 11: Demuestra que $2{\cdot}\operatorname{tg} x\ \cdot\ \text{sen}^2\dfrac{x}{2}+\text{sen}\ x=\operatorname{tg}\ x$

Ej. 11.

$$2\operatorname{tg}x\cdot\text{sen}^2\frac{x}{2}+\text{sen}\,x = 2\cdot\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\right)^2+\text{sen}\,x =$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cancel{2}}+\text{sen}\,x = \frac{\text{sen}\,x-\text{sen}\,x\cos x}{\cos x}+\text{sen}\,x$$

$$= \frac{\text{sen}\,x-\cancel{\text{sen}\,x\cdot\cos x}+\cancel{\text{sen}\,x\cdot\cos x}}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = \operatorname{tg}x$$

Ejercicio 12: Comprueba que $1+\sec 2x = \dfrac{\text{tg } 2x}{\text{tg } x}$

Ej. 12.

$$1+\sec 2x = \frac{\text{tg } 2x}{\text{tg } x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\cos 2x} = \frac{\frac{\text{sen } 2x}{\cos 2x}}{\frac{\text{sen } x}{\cos x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x + 1}{\cancel{\cos 2x}} = \frac{\cos x \cdot \text{sen } 2x}{\cancel{\cos 2x} \cdot \text{sen } x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 1 = \frac{\cos x \cdot 2 \cdot \cancel{\text{sen } x} \cdot \cos x}{\cancel{\text{sen } x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 2\cos^2 x$$

c.q.d.

Ejercicio 13: Comprueba que $\text{tg } \dfrac{\alpha}{2} = \pm\dfrac{\text{sen } \alpha}{1+\cos\alpha}$

Ej. 13.

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\text{sen}^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \pm\frac{\text{sen }\alpha}{1+\cos\alpha}$$

c.q.d.

Ejercicio 14: Sabiendo que $\alpha \in \text{IV Cuadrante}$ y que $\text{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \dfrac{3}{2}$, calcula $\text{tg } \alpha$

Ej. 14.

$\alpha \in$ IV Cuadrante

$$\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{2}{3}$$

Como $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \underbrace{\text{sen }\frac{\pi}{2}}_{1}\cos\alpha + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\cos\alpha = \boxed{\cos\alpha = \frac{2}{3}}$

Por la igualdad fundamental: $\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$

$$\Rightarrow \text{sen }\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \boxed{\text{sen }\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

no válido pues $\alpha \in$ IV Cuadrante

Luego $\text{tg }\alpha = \dfrac{-\sqrt{5}/3}{2/3} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Ejercicio 15: Sabiendo que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y que $\text{tg}\,(\pi - \alpha) = 2$, calcula $\text{sen}\,\alpha$ y $\text{tg}\,(\pi + \alpha)$

Ej. 15:

$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$\text{tg}(\pi - \alpha) = 2 \Rightarrow \text{tg}(\pi-\alpha) \underset{A}{=} -\text{tg}\,\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{\text{tg}\,\alpha = -2}$

$\pi - \alpha$ y α son suplementarios

No válido

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 4 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt5}\cdot\dfrac{\sqrt5}{\sqrt5} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt5}{5}} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cdot \cos\alpha = -2\cdot -\dfrac{\sqrt5}{5} =$

$\Rightarrow \boxed{\text{sen}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt5}{5}}$; $\text{tg}(\pi + \alpha) = \dfrac{\overset{=0}{\text{tg}\,\pi} + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\pi\cdot\text{tg}\,\alpha} = \dfrac{\text{tg}\,\alpha}{1} = -2$

Ejercicio 16: Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 4$ cm, $B = 47^\circ$, $C = 59^\circ$

b) $a = 5{,}5$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $B = 117^\circ$

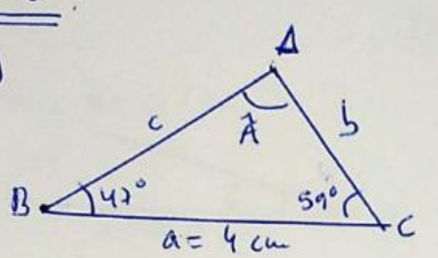
c) $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $A = 45^\circ$

d) $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm

e) $a = 20$ cm, $b = 60$ cm, $c = 30$ cm

Ejer. 16:

a)



$\hat{A} = 180^\circ - 47^\circ - 59^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 74^\circ}$

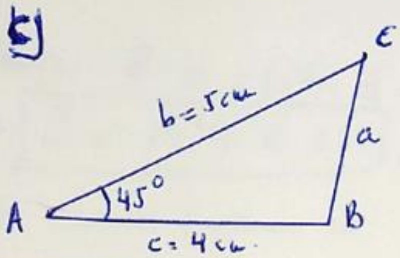
Y ahora por el teorema del seno:

$\dfrac{c}{\text{sen}\,59^\circ} = \dfrac{4}{\text{sen}\,74^\circ} \Rightarrow c = \dfrac{4\cdot\text{sen}\,59^\circ}{\text{sen}\,74^\circ}$

$\Rightarrow \boxed{c = 3{,}57 \text{ cm.}}$

$\dfrac{b}{\text{sen}\,47^\circ} = \dfrac{4}{\text{sen}\,74^\circ} \Rightarrow b = \dfrac{4\cdot\text{sen}\,47^\circ}{\text{sen}\,74^\circ} \Rightarrow \boxed{b = 3{,}04 \text{ cm}}$

c)



Por el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos\hat{A} = 4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5\cdot\cos 45^\circ$

$\Rightarrow a^2 = 41 - 40\cdot\dfrac{\sqrt2}{2} \Rightarrow a = \sqrt{41 - 20\sqrt2}$

$\Rightarrow \boxed{a = 3{,}56591205 \text{ cm}}$ Tomamos muchos decimales para aproximar mejor.

~~Ahora por el teorema del seno, calculamos $\hat{A}$~~

~~$\dfrac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} \Rightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{a\cdot\text{sen}\,\hat{B}}{b} = \dfrac{5\cdot\text{sen}\,45^\circ}{3{,}6591261}$~~

~~$\Rightarrow \hat{B} = \text{arcsen}$~~

Por el teorema del seno, calculamos el ángulo $\hat{B}$ (o el $\hat{C}$)

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{b} = \frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{a} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b\cdot\operatorname{sen}\hat{A}}{a} \Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\frac{b\cdot\operatorname{sen}\hat{A}}{a}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \operatorname{arcsen}\frac{5\cdot\operatorname{sen}45^\circ}{3,56591205} \Rightarrow \hat{B} = \begin{cases} 82^\circ 30' 57.11'' \\ 97^\circ 29' 2.89'' \end{cases}$$ (suplementario del anterior)

(como vemos nos salen dos soluciones para $\hat{B}$)

Vamos a calcular $\hat{B}$ con el teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\hat{B} \Rightarrow 2ac\cos\hat{B} = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c} \Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\right) \Rightarrow$$

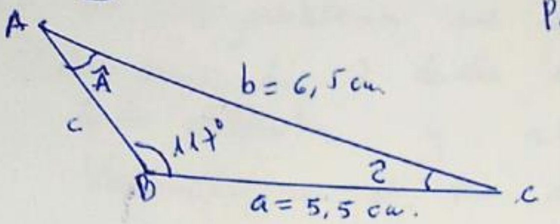
$$\Rightarrow \hat{B} = \arccos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a\cdot c}\right) = \arccos\left(\frac{3,56591205^2+4^2-5^2}{2\cdot 3,56591205\cdot 4}\right)$$

$\Rightarrow \boxed{\hat{B} = 82^\circ 30' 57.11''}$ que como vemos es una única solución entre 0° y 180° [El ángulo $97^\circ 29' 2.89''$ no es válido] ~~no vale~~

Ahora $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 45^\circ - 82^\circ 30' 57.11''$

$\Rightarrow \boxed{\hat{C} = 52^\circ 29' 2.89''}$

b)



Por el teorema del seno, calculamos $\hat{A}$

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{A}}{5'5} = \frac{\operatorname{sen}117^\circ}{6'5} \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{5'5\cdot\operatorname{sen}117^\circ}{6'5}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{5'5\cdot\operatorname{sen}117^\circ}{6'5}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{A} = \begin{cases} 48^\circ 55' 54.63'' \\ 131^\circ 4' 5.37'' \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\hat{A} = 48^\circ 55' 54.63''}$

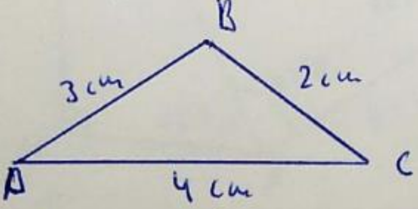
($131^\circ 4' 5.37''$: No válido pues sumado con $\hat{B}$ ya se pasa de 180°)

Ahora, $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 48^\circ 55' 54.63'' - 117^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\hat{C} = 14^\circ 4' 5.37''}$. Y por último, c por el teorema del seno o del coseno. (usamos el del seno): $\frac{c}{\operatorname{sen}14^\circ 4' 5.37''} = \frac{6,5}{\operatorname{sen}117^\circ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{c = 1,773268645 \text{ cm}}$

d)



Usamos el teorema del coseno para calcular $\hat{B}$

$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot \cos\hat{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 = 13 - 12\cos\hat{B} \Rightarrow 12\cos\hat{B} = -3$

$\Rightarrow \cos\hat{B} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 104^\circ 28' 39''}$

Nuevamente, por el teor. del coseno, calculamos $\hat{A}$:

$2^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cos\hat{A} \Rightarrow 4 = 25 - 24\cos\hat{A} \Rightarrow 24\cos\hat{A} = 2$

$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8} \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 28^\circ 57' 18.09''}$

Y por último, $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \Rightarrow \boxed{\hat{C} = 46^\circ 34' 2.91''}$

(*) Tb. se puede usar el teor. del seno para calcular $\hat{A}$ o $\hat{C}$.

e) Este problema no debe tener solución, pues en un triángulo, la suma de 2 lados siempre ha de ser mayor que el lado restante, y $a + c = 20 + 30 = 50 < 60 = b$.

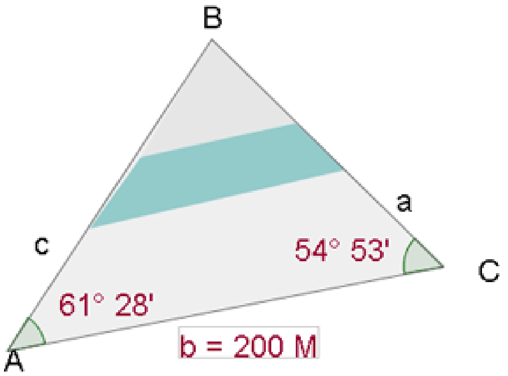
Veamoslo con el teor. del coseno al resolver, para calcular $\hat{A}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos\hat{A} \Rightarrow 20^2 = 60^2 + 30^2 - 2\cdot 60\cdot 30\cdot\cos\hat{A}$

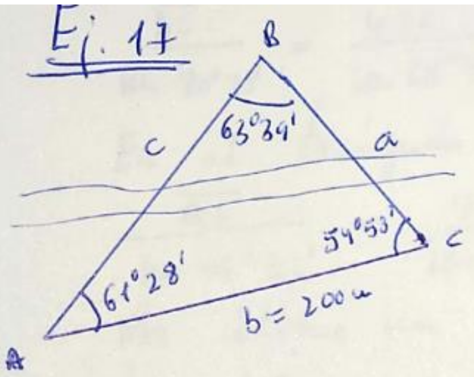
$\Rightarrow 400 = 3600 + 900 - 3600\cdot\cos\hat{A} \Rightarrow 3600\cos\hat{A} = 4500 - 400$

$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{4100}{3600} = 1,14 > 1 \Rightarrow$ Absurdo pues el coseno no puede ser > 1.

Ejercicio 17: Calcula la distancia que separa el punto A del punto inaccesible B.



Ej. 17



Tenemos que calcular c.

Primero el ángulo $\hat{B} = 180° - 61°28' - 54°53'$

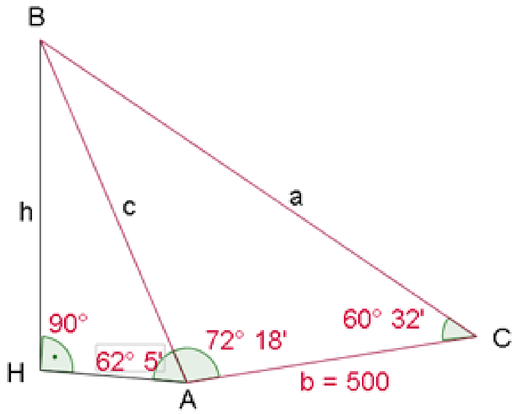
$\Rightarrow \hat{B} = 63°39'$

Y ahora por el teorema de los senos:

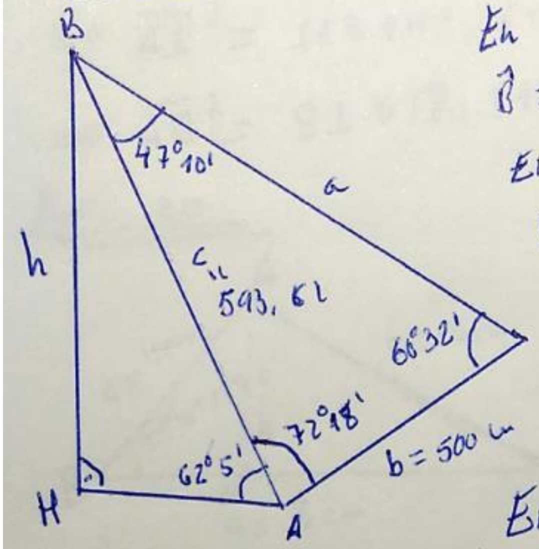
$$\frac{c}{\text{sen } 54°53'} = \frac{200}{\text{sen } 63°39'} \Rightarrow c = \frac{200 \cdot \text{sen } 54°53'}{\text{sen } 63°39'}$$

$$\boxed{c = 182'57 \text{ m}}$$

Ejercicio 18: Calcula la altura, h, de la figura:



Ej. 18 :



En el triángulo $\widehat{ABC}$, calculamos el ángulo B

$\hat{B} = 180° - 72°18' - 60°32' \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 47°10'}$

En el triángulo $\widehat{ABC}$, por el teor. de los senos, calculamos c:

$$\frac{c}{\text{sen } 60°32'} = \frac{500}{\text{sen } 47°10'} \Rightarrow c = \frac{500 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 47°10}$$

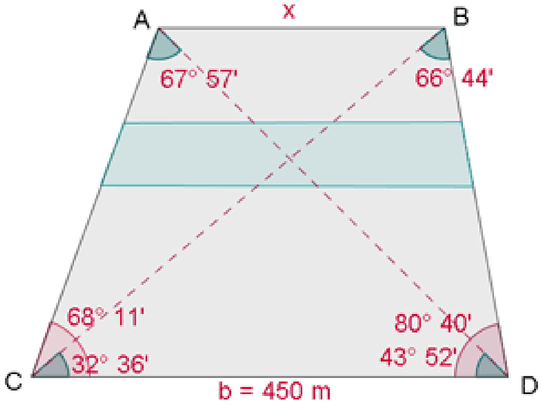
$$\Rightarrow \boxed{c = 593,62 \text{ m}}$$

En el triángulo $\widehat{ABH}$, que es rectángulo aplicando la definición de seno:

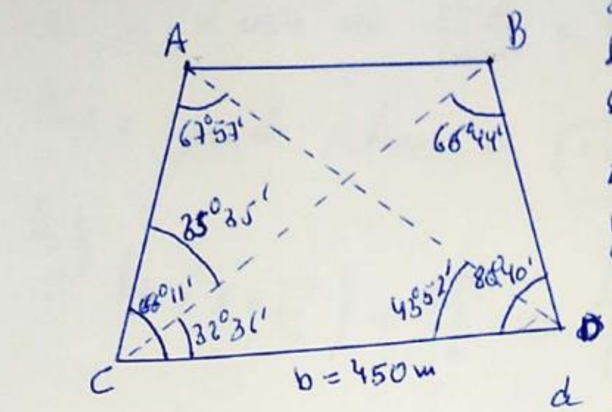
$$\text{sen } 62°5' = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } 62°5' = 593,62 \cdot \text{sen}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 524,54 \text{ m}}$$

Ejercicio 19: Calcula la distancia que separa entre dos puntos inaccesibles A y B.



Ejerc. 19:



Los ángulos de 67°57' y 66°44' no son necesarios que los de el problema, se puede calcular con los otros datos. En esta figura hay 8 triángulos y se puede hacer de varias formas.

Tomamos el triángulo $\widehat{BCD}$ y calculamos $\overline{BC}$ por el teorema de los senos:

$$\frac{\overline{BC}}{\text{sen } 80^\circ 40'} = \frac{450}{\text{sen } 66^\circ 44'} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{450 \cdot \text{sen } 80^\circ 40'}{\text{sen } 66^\circ 44'} \Rightarrow \boxed{\overline{BC} = 483,35 \text{ m}}$$

En el triángulo $\widehat{ACD}$, calculamos $\overline{AC}$ por el teor. de los senos:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 43^\circ 52'} = \frac{450}{\text{sen } 67^\circ 57'} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{450 \cdot \text{sen } 43^\circ 52'}{\text{sen } 67^\circ 57'} \Rightarrow \boxed{\overline{AC} = 336,45 \text{ m}}$$

Por último en el triángulo $\widehat{ABC}$, calculamos $\overline{AB}$ por el teor. del coseno:

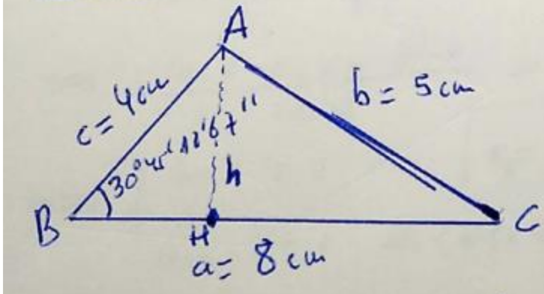
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 35^\circ 35'$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = 113198,6025 + 233627,2225 - 325246,215 \cdot \cos 35^\circ 35'$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = 82312,8164 \Rightarrow \boxed{\overline{AB} = 286,902 \text{ m}}$$

Ejercicio 20: Calcula el área de un triángulo cuyos lados son $a = 8$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm

Ejerc 20



Por el teor. del coseno, vamos a calcular el ángulo $\hat{B}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$

$25 = 64 + 16 - 64 \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 \cos \hat{B} = 80 - 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{55}{64} \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 30^\circ 45' 12.67''}$

En el triángulo rectángulo $\widehat{ABH}$, $\text{sen } 30^\circ 45' 12.67'' = \frac{h}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{h = 2,045 \text{ cm}}$

Luego $\text{Área} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 2,045}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Área} = 8,18 \text{ cm}^2}$

Ejercicio 21: Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen } x = \cos x$

b) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{sen } x = tg\ x$

e) $\text{sen}^2 x - 1 = 2 \cdot \cos^2 x$ con $0 \le x \le 2 \cdot \pi$

f) $\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6 \cdot \text{sen}^3 x$

Ej. 21

a) $\text{sen } x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1 \Rightarrow tg\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ \text{ó} \\ x_2 = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Que se puede reducir a $\boxed{x_1 = 45^\circ + k \cdot 180^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

b) $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c)

$\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ 2x+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ó} \\ 2x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi + 2k\pi \\ \text{ó} \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \text{ó} \\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

d)

$\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot (\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}} \\ \text{ó} \\ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$

e)

$\underbrace{\operatorname{sen}^2 x - 1}_{1-\cos^2 x} = 2\cos^2 x$ con $0 \le x \le 2\pi$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x \Rightarrow 0 = 3\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$ ó $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ pues con la restricción $0 \le x \le 2\pi$ sólo salen estas 2 soluciones

f)

$\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \cdot \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$

$\Rightarrow 6\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x = 0 \Rightarrow 6\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen} x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0$

$\Rightarrow 6\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}^3 x = 0 \Rightarrow 8\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot (4\operatorname{sen}^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}} \\ 4\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_5 = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Que se pueden agrupar y dejarlo como:

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \frac{\pi}{6} + k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\ x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\pi & \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

Ejercicio 22: Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} x = \cos\left(30^\circ + x\right)$ con $x \in$ III Cuadrante

b) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x$ con $270^\circ < x < 360^\circ$

c) $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

d) $2 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 5 \cdot \operatorname{sen} x + 1 = 0$

e) $4 \cdot \cos 2x + 3 \cdot \cos x = 1$ con $\pi \leq x \leq 2 \cdot \pi$

f) $2 \cdot \cos x - 1 + \operatorname{sen} x = 0$

Ej. 22.

a) $\operatorname{sen} x = \cos(30^\circ + x)$ con $x \in$ III Cuadrante

$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos 30^\circ \cdot \cos x - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cos x - \operatorname{sen} x \Rightarrow 3 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x}{3}}$

Sustituimos en la igualdad fundamental:

$\left(\frac{\sqrt{3} \cdot \cos x}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2 x}{3} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 x + 3\cos^2 x = 3 \Rightarrow 4\cos^2 x = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

No válido por $x \in$ III Cuad.

$\Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 210^\circ}$

b) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{tg} x$ con $270^\circ < x < 360^\circ$

$2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 2 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot (2 \operatorname{sen}^2 x - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \nexists \text{ sol. } 270^\circ < x < 360^\circ \\ 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ∄ sol. con $270^\circ < x < 360^\circ$

$\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 225^\circ \text{ que no es válida} \\ \boxed{x = 315^\circ \text{ que es válida}} \end{cases}$

c) $2\text{sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x_2 = 135^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \\ \text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 225^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x_4 = 315^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Todas las soluciones se pueden agrupar en una sola:

$$\boxed{x = 45^\circ + k\cdot 90^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$$

d) $2\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen } x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \begin{cases} \text{sen } x = \frac{5+\sqrt{17}}{4} = 2'28 \text{ ∄ sol} \\ \text{sen } x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} = 0'876894374 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = 61^\circ 16' 11.9'' + k\cdot 360^\circ \\ x_2 = 118^\circ 43' 48.1'' + k\cdot 360^\circ \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

e) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ con $\pi \le x \le 2\pi$

$\Rightarrow 4\cdot(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 3\cos x = 1 \Rightarrow 4\cdot(\cos^2 x - (1-\cos^2 x)) + 3\cos x = 1$

$\Rightarrow 4\cdot(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x = 1 \Rightarrow 8\cos^2 x - 4 + 3\cos x = 1$

$$\Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} \frac{10}{16} = \frac{-5}{8} \\ -1 \end{cases}$$

Si: $\cos x = -\frac{5}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 231^\circ\, 19'\, 4.13'' + k\cdot 360^\circ \\ x_2 = 308^\circ\, 40'\, 55.8'' + k\cdot 360^\circ \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Si: $\cos x = -1 \Rightarrow x_3 = 180^\circ + k\cdot 360^\circ$

f) $2\cos x - 1 + \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \boxed{\text{sen}\, x = 1 - 2\cos x}$

Sustituimos en la igualdad fundamental.

$$(1-2\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + 4\cos^2 x - 4\cos x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 5\cos^2 x - 4\cos x = 0 \Rightarrow \cos x\cdot(5\cos x - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = 90^\circ + k\cdot 180^\circ \\ 5\cos x = 4 \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 36^\circ\, 52'\, 11.63'' + k\cdot 360^\circ \\ x_3 = -36^\circ\, 52'\, 11.63'' + k\cdot 360^\circ \end{cases} \end{cases}$$ con $k \in \mathbb{Z}$

Ejercicio 23: Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \text{sen}\, x + \text{sen}\, y = \frac{3}{2} \\ \text{sen}\, x - \text{sen}\, y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{3}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$

d) $\begin{cases} \cos x - \text{sen}\, y = 0 \\ \cos x + \text{sen}^2\, y = \frac{3}{4} \end{cases}$ con $0 \le x, y \le 180^\circ$

e) $\begin{cases} \text{sen}\, x - \text{sen}\, y = \frac{1}{2} \\ x + y = 120^\circ \end{cases}$

f) $\begin{cases} \text{sen}^2\, x + \cos^2\, y = 1 \\ \cos^2\, x - sen^2\, y = 1 \end{cases}$

Ej. 23.

a) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{E_2+E_1} \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \\ 2\operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}}$

De la E_1: $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} y = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} y = 1}$

Resolvemos:

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ó } x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow y_1 = \frac{\pi}{2} + k2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\cos y = \frac{3}{2} - \cos x} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$ Sustituimos: $\cos x \cdot \left(\frac{3}{2} - \cos x\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\cos x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Si $\cos x = 1 \Rightarrow \cos y = \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = [illegible] + 2k\pi \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ y_2 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\ y_3 = [illegible] 2k\pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$

c) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ x + y = 90^\circ \Rightarrow \boxed{y = 90^\circ - x} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(90^\circ - x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = 1 - \cos x}$ Sustituimos en la igualdad fundamental: $(1-\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 2\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Longrightarrow x_1 = 90^\circ + k\cdot 180^\circ \Rightarrow y_1 = -k\cdot 180^\circ \\ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x_2 = k\cdot 360^\circ \Rightarrow y_2 = 90^\circ - k\,360^\circ \end{cases}$

Solución 1: $\boxed{x_1 = 90^\circ + k\cdot 180^\circ,\ y_1 = -k\cdot 180^\circ}$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{x_2 = k\cdot 360^\circ,\ y_2 = 90^\circ - k\cdot 360^\circ}$

d) $\begin{cases} \cos x - \operatorname{sen} y = 0 \\ \cos x + \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ con $0 \le x, y \le 180^\circ$

De la E_1: $\boxed{\cos x = \operatorname{sen} y}$ y sustituimos en E_2:

$\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y - \dfrac{3}{4} = 0 \Rightarrow 4\operatorname{sen}^2 y + 4\operatorname{sen} y - 3 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \Rightarrow \operatorname{sen} y = \dfrac{-4 \pm 8}{8} = \begin{cases} \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{12}{8} = -\dfrac{3}{2} < -1 \end{cases}$ No válida pues < -1

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos x = \dfrac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^\circ \\ y_2 = 150^\circ \end{cases}$

$\cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \{\, x_1 = 60^\circ$

e) $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} \\ x + y = 120^\circ \Rightarrow \boxed{y = 120^\circ - x} \end{cases}$ Sustituimos en E_1

$\Rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(120^\circ - x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x - [\underbrace{\operatorname{sen} 120^\circ}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos x - \underbrace{\cos 120^\circ}_{=-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sen} x] = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = 1 + \sqrt{3}\cdot\cos x}$ Sustituimos en la igualdad fundamental

$\Rightarrow (1 + \sqrt{3}\cos x)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cancel{1} + 2\sqrt{3}\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x = \cancel{1}$

$\Rightarrow 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x \cdot (\cos x + \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = 90^\circ + k\cdot 180^\circ \\ \text{ó} \\ \cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cos x = -\sqrt{3} \end{cases}$

$\Downarrow$

∄ solución

$-\sqrt{3} < -1$

Luego $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 90^\circ + k\cdot 180^\circ \\ y_1 = 30^\circ - k\cdot 180^\circ \end{array} \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$

f) $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \overbrace{\cos^2 y}^{=1-\operatorname{sen}^2 y} = 1 \\ \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \\ -\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \end{cases} \xRightarrow{E_2 + E_1} \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = 0 \\ -2\operatorname{sen}^2 y = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} y = 0} \end{cases}$

De la E_1: $\operatorname{sen}^2 x - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = 0}$

Resolvemos:

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow$
$\operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x = k\cdot 180^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ y = k\cdot 180^\circ \end{array}}$

Ejercicio 24: Comprueba que si A, B y C son los ángulos de un triángulo se cumple que:

a) $\text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C = \text{tg } A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } C$

b) $\text{tg } (A + B) + \text{tg } C = 0$

24) $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A + B)$

a) O sea, C y $(A+B)$ son suplementarios $\Rightarrow \text{tg } C = -\text{tg}(A+B)$

$\Rightarrow \text{tg } C = -\dfrac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \cdot \text{tg } B} \Rightarrow \text{tg } C \cdot (1 - \text{tg } A \cdot \text{tg } B) = -(\text{tg } A + \text{tg } B)$

$\Rightarrow \text{tg } C - \text{tg } A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } C = -\text{tg } A - \text{tg } B \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tg } C + \text{tg } A + \text{tg } B = \text{tg } A \cdot \text{tg } B \cdot \text{tg } C$ c.q.d

b) $\text{tg } (A+B) + \text{tg } C = 0 \Rightarrow \text{tg } C = -\text{tg } (A+B)$ como ya hemos visto en el apartado a), al ser C y $(A+B)$ suplementarios