HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 4: **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES**

Ejercicio 1: Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f .

b) Estudia la posición de la gráfica de f respecto de sus asíntotas.

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ si $x\neq 1$

Asíntotas y posición:

$\boxed{x=1}$ es A.V. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=\left(\frac{1}{0}\right)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$

$\nexists$ A.H. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

A.O. $\displaystyle m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+2}{x^2-x}=1$

$\displaystyle n=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}$

$\displaystyle =\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x}{x-1}=-1$

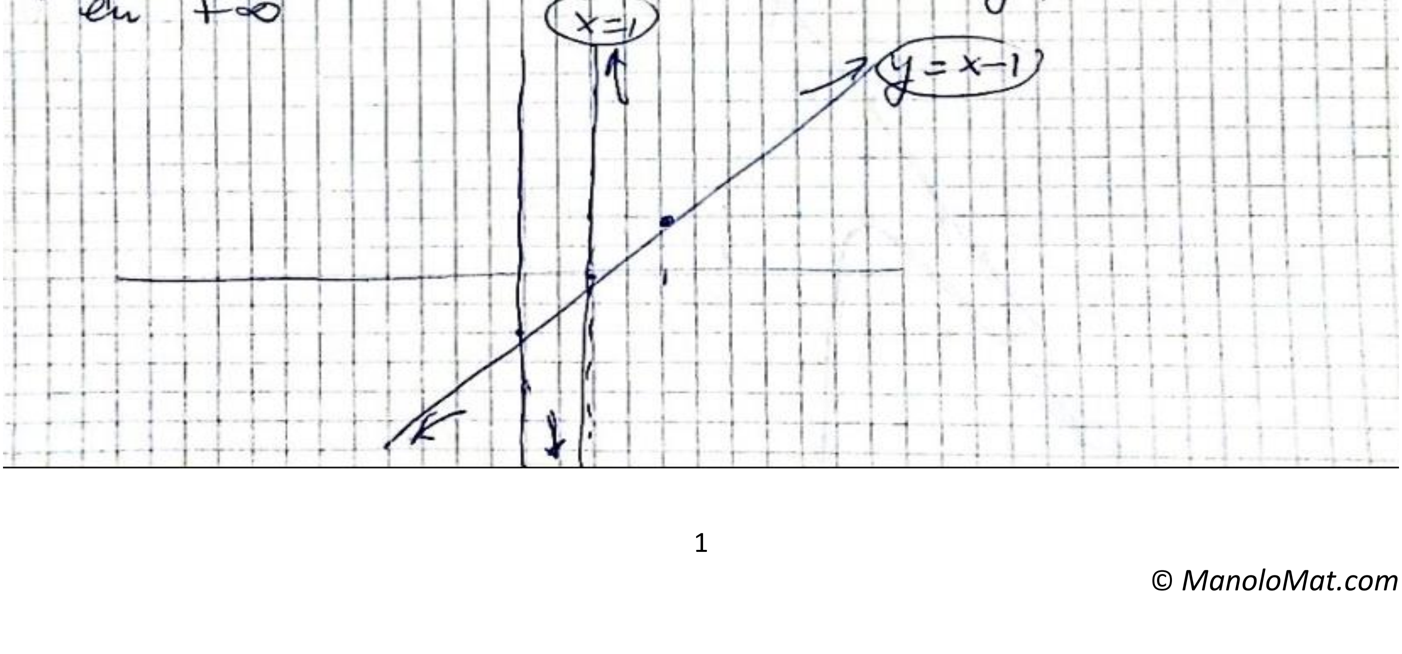
$\boxed{y=x-1}$ es A.O.

Posición: $\displaystyle f(x)-(mx+n)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}-(x-1)=$

$\displaystyle =\frac{x^2-2x+3-(x^2-2x+1)}{x-1}=\frac{2}{x-1}$ $\to 0^-$ en $-\infty$; $\to 0^+$ en $+\infty$

- f por debajo de $y=x-1$ en $-\infty$
- f por encima de $y=x-1$ en $+\infty$

x	1	0	2
y	0	-1	1



Ejercicio 2: Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$. Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

Asíntotas de $f(x)=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

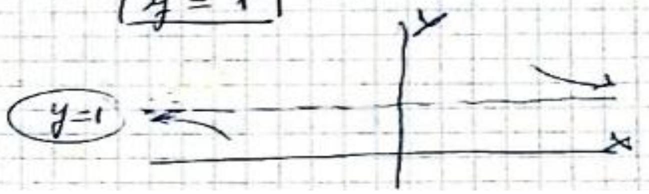
A.V. ∄ $\quad Dom f=\mathbb{R}$

A.H. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1 \qquad e^{\frac{2x}{x^2+1}}-1\to 0^+$ (en $+\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{2x}{x^2-1}} = e^0 = 1 \qquad e^{\frac{2x}{x^2+1}}-1\to 0^-$ (en $-\infty$)

$f(x)$ por encima de A.H. $\qquad \boxed{y=1}$

A.O. ∄ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^{\frac{2x}{x^2+1}}}{x} = \pm\infty$



Ejercicio 3: Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{9x-3}{x^2-2x}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 2$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de f.

$f(x)=\dfrac{9x-3}{x^2-2x} \qquad x\neq 0,\ x\neq 2$

a) Asíntotas:

A.V. $\boxed{x=0}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x-3}{x^2-2x} = \left(\dfrac{-3}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{9x-3}{x(x-2)} = \dfrac{-3}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{9x-3}{x(x-2)} = \dfrac{-3}{0^-} = +\infty$

$\boxed{x=2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x-3}{x^2-2x} = \left(\dfrac{15}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{9x-3}{x(x-2)} = \dfrac{15}{0} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{9x-3}{x(x-2)} = \dfrac{15}{0} = +\infty$

A.H. $\boxed{y=0}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x-3}{x^2-2x} = 0 \quad$ (0^+ por la derecha, en $+\infty$)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x-3}{x^2-2x} = 0 \quad$ (0^- por la izqda, en $-\infty$)

b) Monotonía y extremos:

$f'(x)=\dfrac{9(x^2-2x)-(9x-3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{9x^2-18x-(18x^2-6x-18x+6)}{(x^2-2x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{9x^2-\cancel{18x}-18x^2+6x+\cancel{18x}-6}{(x^2-2x)^2} \qquad f'(x)=\dfrac{-9x^2+6x-6}{(x^2-2x)^2}$

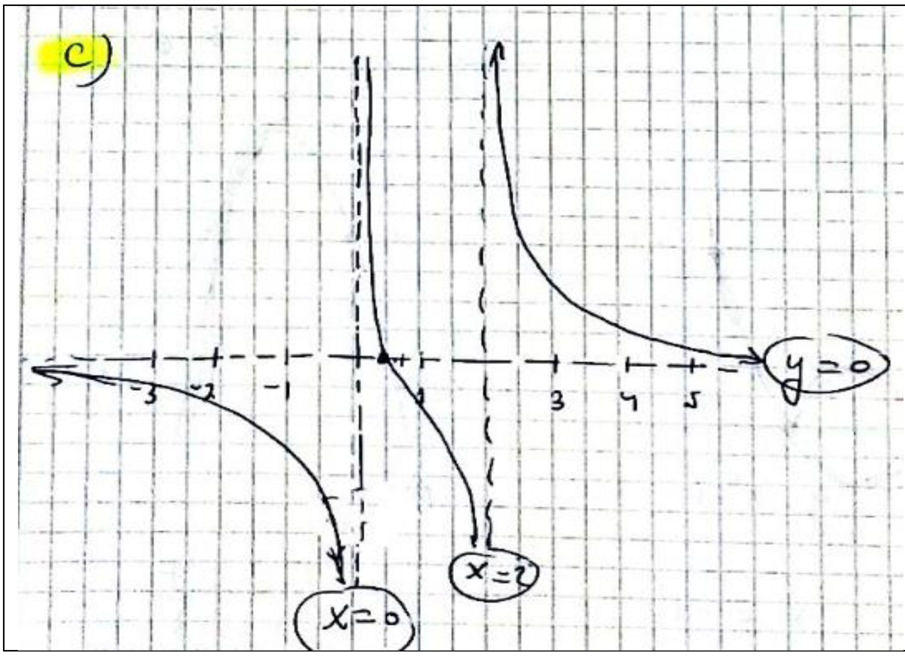
$f'(x)=0 \Rightarrow -9x^2+6x-6=0$

$3x^2-2x+2=0 \qquad x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 3\cdot 2}}{6}\notin\mathbb{R}$

No hay extremos relativos

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$	∄	$-$	∄	$-$	
f		↘	∄	↘	∄	↘	

Punto de



Punto de corte con eje X

$y=0 \Rightarrow 9x-3=0$

$x=\frac{3}{9}$

$(1/3, 0)$

Ejercicio 4: Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y=-(x-2)^2-2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x=3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas.

1) $y=-(x^2+4-4x)-2$; $y=-x^2+4x-6$

- orientación $-$
- Puntos corte eje x: $-x^2+4x-6=0$; $x=\frac{-4\pm\sqrt{16-24}}{-2}$
  - No corta al eje x
  - Eje y: si $x=0 \Rightarrow y=-4-2=-6$; $(0,-6)$
- Vértice

  $x_V=-\frac{b}{2a}$; $x_V=\frac{-4}{2\cdot(-1)}=2$ $\quad \boxed{V(2,f(2))=(2,-2)}$

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-11	-6	-3	-2	-3	-6	-11

V

2) r_t en $x=3$ $\quad (3,f(3))=(3,-3)$

$\left.\begin{array}{l} m=f'(3)=-2 \\ f'(x)=-2x+4 \end{array}\right\}$ $\quad y+3=-2(x-3)$

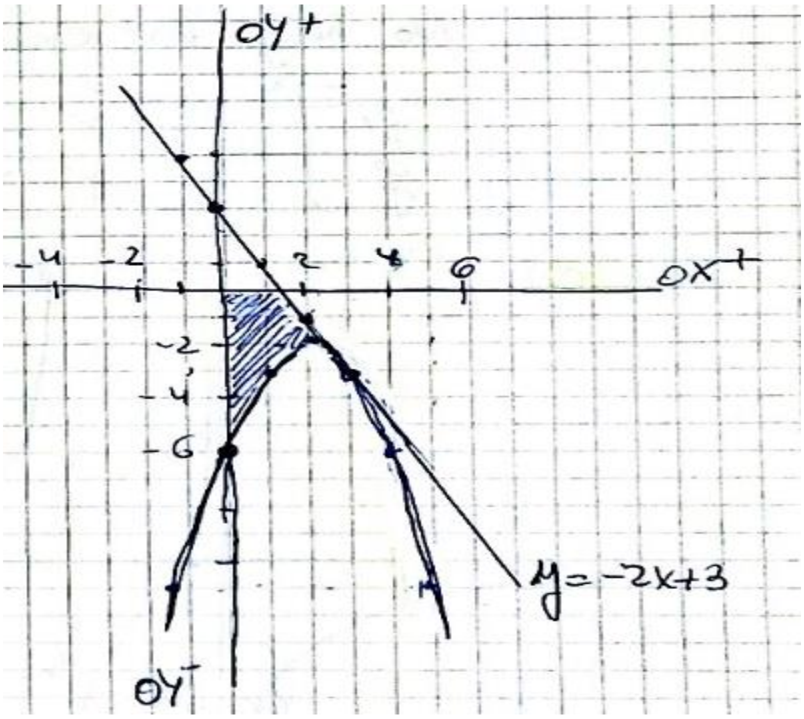
$y=-2x+6-3$

$y=-2x+3$

x	-1	0	1	2
y	5	3	1	-1

3) semieje OX +

4) Semieje OY −



Ejercicio 5: Sea la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f .

c) Esboza la gráfica de f .

a) Asíntotas:

A.V. $\boxed{x=1}$: $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x^2}{x-1} = \left(\dfrac{1}{0}\right)$; $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2}{x-1} = +\infty$

A.H. $\nexists$: $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = -\infty$

A.O. : $m = \lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-1} = 2$

$n = \lim_{x\to \pm\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\dfrac{2x^2}{x-1} - 2x\right) =$

$= \lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 2x}{x-1} = 2$ $\quad \boxed{y = 2x+2}$

Posición: $f(x) - (mx+n) = \dfrac{2x^2}{x-1} - (2x+2) =$

$= \dfrac{2x^2 - (2x+2)(x-1)}{x-1} = \dfrac{2x^2 - (2x^2-2)}{x-1}$

$= \dfrac{2}{x-2}$ $\to 0^-$ (en $-\infty$) por debajo ; $\to 0^+$ (en $+\infty$) por encima

b) Monotonía y puntos extremos relativos

$$f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0 \iff 2x^2-4x=0$; $x(2x-4)=0 \to x=0$, $x=2$

	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	1	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
f'	+	−	∄	−	+
f	↗	↘	∄	↘	↗

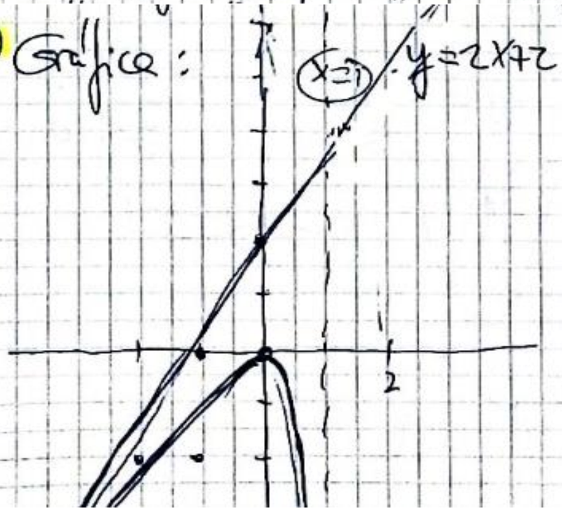
$x=0$ es un MAX. RELATIVO $(0,0)$

$x=2$ es un MÍN. RELATIVO $(2,8)$

f creciente en $(-\infty,0)$ y $(2,+\infty)$

f decreciente en $(0,1)$ y $(1,2)$

c) Gráfica:



$x=1$ A.V.

$y=2x+2$ A.O.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2	0	2	4	6

Ejercicio 6: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\left|x^2-1\right|$

a) Esboza la gráfica de la función
b) Estudia la derivabilidad de la función.

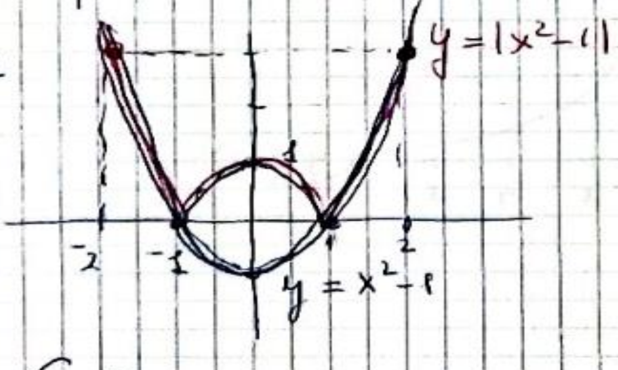
$f(x) = |x^2-1|$

$y = x^2-1$

$V(0,-1)$

$(-1,0)$

$(+1,0)$



$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ -x^2+1 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

Ejercicio 7: Considera la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 4x & si \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & si \quad 1<x<3 \\ 4-x & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

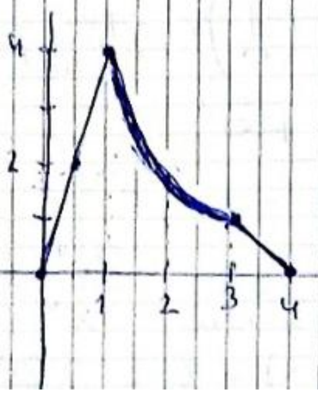
Esboza la gráfica de f.

$f(x)=\begin{cases} 4x & si \quad 0\le x\le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & si \quad 1<x<3 \\ 4-x & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$

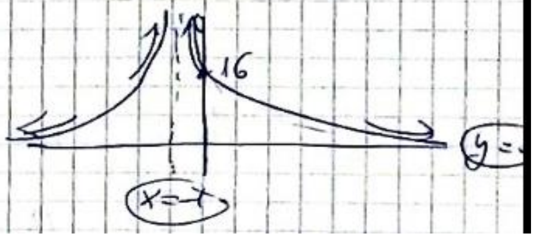
x	0	$\frac{1}{2}$	1
y	0	2	4

x	1	2	3
y	4	$\frac{16}{9} \approx 1'78$	1

x	3	4
y	1	0



$y=\dfrac{16}{(x+1)^2}$



Ejercicio 8: Esboza el recinto limitado por la curva $y=\dfrac{1}{2}+\cos x$, los ejes coordenados y la recta $x=\pi$.

8) $f(x)=\frac{1}{2}+\cos x$, ejes $(x=0,\ y=0)$ y recta $x=\pi$

f es una traslación vertical de $1/2$ unidad de la función $y=\cos x$

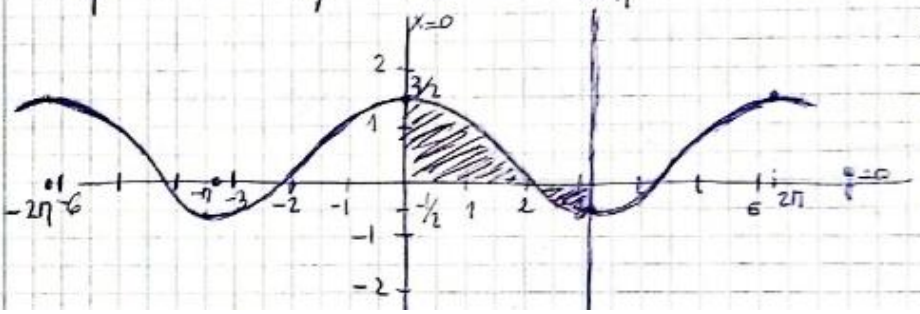
Dom $f=\mathbb{R}$

Periódica : $T=2\pi$

Continua en $\mathbb{R}$

Máximos : $x=0,\ 2\pi,\ \dots$

Mínimos : $x=\pi,\ 3\pi,\ \dots$



Ejercicio 9: Considera la funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=x^2-2x$. Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

$f(x)=6x-x^2 \Rightarrow x_V=\frac{-6}{-2}=3,\ y_V=18-9=9 \quad V_1(3,9)$ orient −

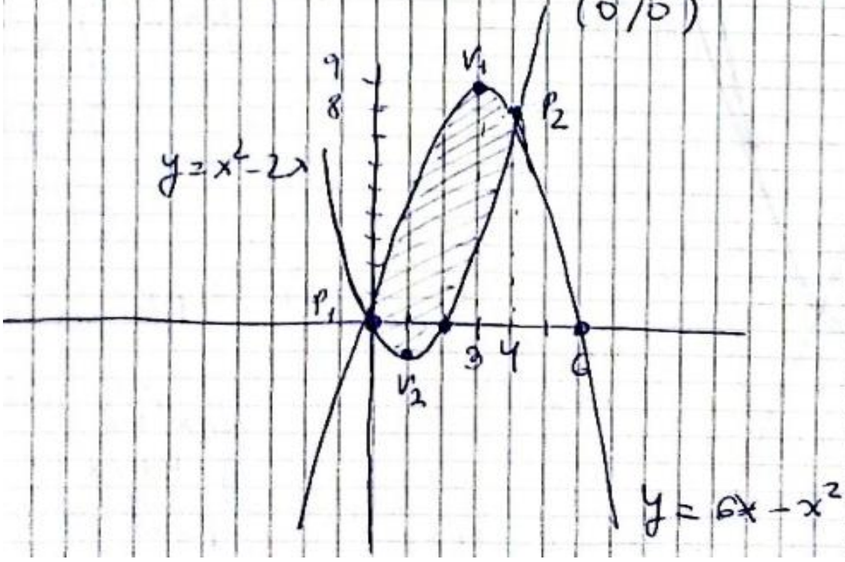
Ptos corte ejes : $(6,0)$ $(0,0)$

$g(x)=x^2-2x$

orient +

$x_V=\frac{2}{2}=1,\ y_V=-1 \quad V_2(1,-1)$

Ptos corte con ejes: (2,0) (0,0)



$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

$6x - x^2 = x^2 - 2x$

$0 = 2x^2 - 8x$

$0 = 2x(x-4)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 4 \Rightarrow y = 8$

$\left.\begin{array}{l} P_1\,(0,0) \\ P_2\,(4,8) \end{array}\right\}$ ptos cortes

Ejercicio 10: Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$ para $x \neq 0$.

a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función
b) Estudia la monotonía y los extremos relativos.
c) Esboza su gráfica

$f(x) = \dfrac{3x^4+1}{x^3}$

a) Asíntotas
b) Monotonía y extremos

a) A.V. $\boxed{x=0}$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^4+1}{x^3} = \left(\dfrac{1}{0}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x^4+1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^4+1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

A.H. $\nexists$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^4+1}{x^3} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^4+1}{x^3} = -\infty$

A.O. $\quad m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^4+1}{x^4} = 3$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x^4+1}{x^4} - 3x = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^4} \to 0$

$\boxed{y = 3x}$ es A.O.

Posición $f(x) - 3x = \dfrac{1}{x^4} \to 0^+$

Siempre f por encima de la A.O. $y = 3x$

b) Monotonía y extremos

$f'(x) = \dfrac{12x^3 \cdot x^3 - (3x^4+1)\cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{12x^6 - 9x^6 - 3x^2}{x^6} = \dfrac{3x^6 - 3x^2}{x^6}$

$f'(x) = \dfrac{3(x^4-1)}{x^4}$ $\qquad f'(x) = 0 \iff x = 1,\ x = -1$

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
f'	+	−	−	+
f	↗	↘	↘	↗

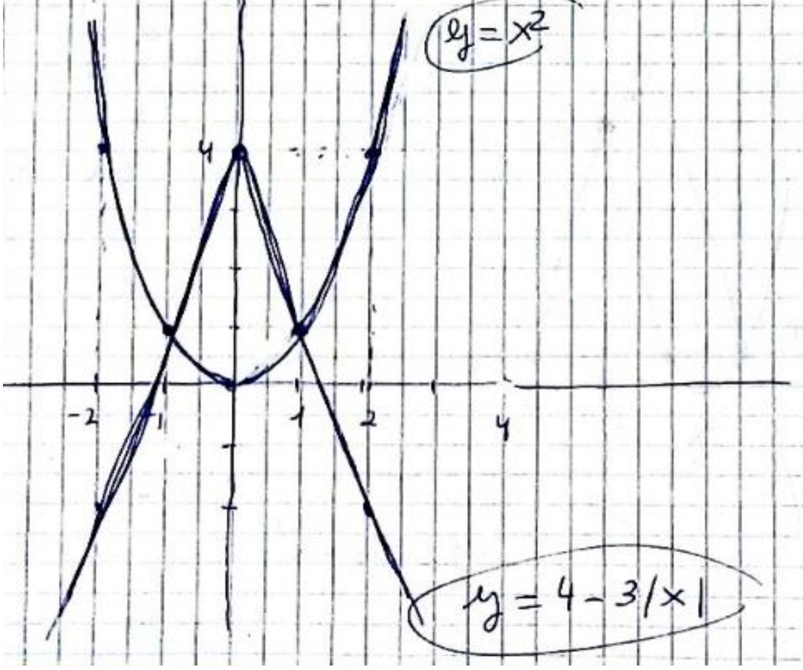
$x = -1$ MÁX. RELATIVO
$x = 1$ MÍN. RELATIVO

f estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$
f estrictamente decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$

Ejercicio 11: Considera la funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$. Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte.

$f(x) = 4 - 3|x|$ Esboza gráficas

$g(x) = x^2$ y ptos de corte.



$$f(x) = \begin{cases} 4 + 3x & x \leq 0 \\ 4 - 3x & x > 0 \end{cases}$$

x	-2	-1	0
y	-2	1	4

x	0	1	2
y	4	1	-2

Ptos corte: $(-1, 1)$

$(1, 1)$

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 + 3x \end{array}\right\}$ $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 - 3x \end{array}\right\}$

Ejercicio 12: Sea $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \ln(x+1)$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY, y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

$f(x) = \ln(x+1)$, eje OX y la recta $y = 1$. Calcula los ptos de corte.

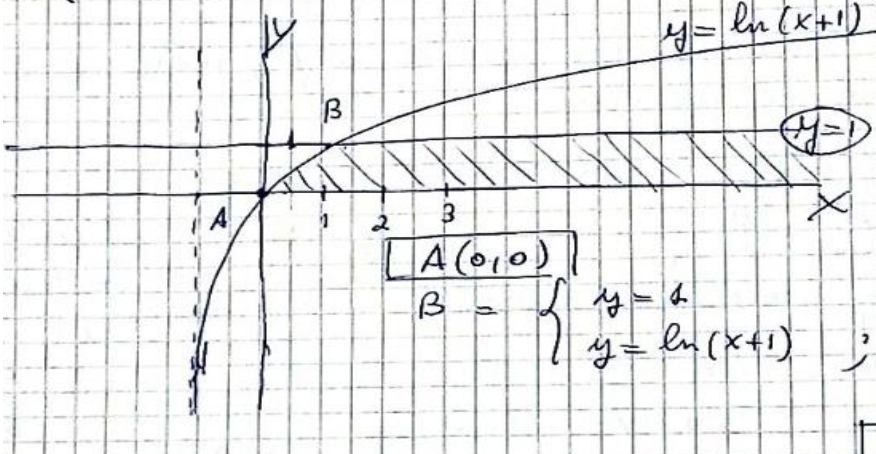
$y = \ln(x+1)$ Domf $= (-1, +\infty)$

A.V. $x = -1$ $\lim_{x \to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$

A.H. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ ($\nexists$ A.H.)

A.O. $\nexists$ $\left(m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0\right)$

Es una traslación horizontal de 1u. a la izqda de $y = \ln(x)$



Pto corte ejes:

si $x = 0 \Rightarrow y = \ln 1 = 0$

si $y = 0 \Rightarrow 0 = \ln(x+1)$

$e^0 = x + 1$

$x = 0$

$(0, 0)$.

$\boxed{A(0,0)}$

$B = \begin{cases} y = 1 \\ y = \ln(x+1) \end{cases}$; $1 = \ln(x+1)$

$e = x + 1$; $x = e - 1$

$\boxed{B(e-1, 1)} \simeq (1'72, 1)$

Ejercicio 13: Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)\cdot(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$.

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
c) Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

$f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 2$

a)

A. VERTICALES

Posibles A.V. son $x=-1$ ó $x=2$ que anulan el denominador.

$x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^-\cdot(-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{2}{0^+\cdot(-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

Luego, $x=-1$ es A.V. hacia $+\infty$ por la izquierda y hacia $-\infty$ por la derecha

$x=2$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{3\cdot 0^-}=\frac{8}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}=\frac{8}{3\cdot 0^+}=\frac{8}{0^+}=+\infty$$

Luego $x=2$ es A.V, hacia $-\infty$ por la izquierda y hacia $+\infty$ por la derecha.

A. HORIZONTALES

En $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{(x+1)\cdot(x-2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2$$

Luego $y=2$ es A.H. en $+\infty$

En $-\infty$

Análogo, $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2-x-2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2$ es A.H. en $-\infty$

A. OBLICUAS

No tiene pues tiene horizontales

b) Tomamos $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-x-2}$ y derivamos

$$f'(x) = \frac{4x\cdot(x^2-x-2) - 2x^2\cdot(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{4x^3} - 4x^2 - 8x - \cancel{4x^3} + 2x^2}{(x^2-x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

Igualamos a 0: $-2x^2-8x=0 \Rightarrow -2x\cdot(x+4)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$

Realizamos la tabla de signos de f'

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$-2x^2-8x$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

f decreciente en $(-\infty,-4)$, $(0,2)$ y $(2,+\infty)$

f creciente en $(-4,-1)$ y $(-1,0)$

En $x=-4$, la función tiene un mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(-4)=\dfrac{32}{(-3)\cdot(-6)}=\dfrac{16}{9}$

En $x=0$, la función tiene un máximo relativo y el valor que alcanza es $f(0)=0$

c) Resolvemos $\begin{cases} y=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2x^2}{x^2-x-2}=2$

$\Rightarrow \cancel{2x^2}=\cancel{2x^2}-2x-4 \Rightarrow \boxed{x=-2} \Rightarrow \boxed{y=2}$

Hay un punto de corte en $\boxed{(-2,2)}$

Ejercicio 14: Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ para $x\neq 1$.

a) Estudia las asíntotas y la monotonía de la gráfica de f.

b) Esboza la gráfica de la función f.

$f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$, $x\neq 1$

a) Dom $f=\mathbb{R}-\{1\}$

$\boxed{x=1}$ Es A.V. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\left(\dfrac{\frac{1}{e}}{0}\right)$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{\frac{1}{e}}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\dfrac{\frac{1}{e}}{0^-}=-\infty$

A.H. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x(1-x)}=0$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{-x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{1+x}=+\infty$

$y=0$, sólo en $+\infty$ (f por definición de A.H.)

A.O. $\nexists$

Ptos corte con ejes: si $x=0 \Rightarrow f(0)=1$ $(0,1)$

si $y=0 \Rightarrow 0=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$; $e^{-x}=0$ sin solución

$f'(x)=\dfrac{-e^{-x}\cdot(1-x)-e^{-x}\cdot(-1)}{(1-x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-e^{-x}(1-x-1)}{(1-x)^2}$

$f'(x)=\dfrac{e^{-x}\cdot x}{(1-x)^2}$

$x=0$ posible extremo relativo

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$+$	
f	↘	↗	↗	

$f'(x)>0$, f estrict. creciente en $(0,+\infty)-\{1\}$

$f'(x)<0$, f estrict. decreciente en $(-\infty,0)$

Ejercicio 15: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$

a) Recta tg a la gráfica de f en $x=1$

$P(1,f(1))=(1,2)$; $f'(x)=-\dfrac{2x}{4}=-\dfrac{x}{2}$

$f'(1)=-\dfrac{1}{2}=m_{rt}$ pendiente de la recta tangente en $x=1$

r_t : $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$; $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

b) Recinto limitado por gráfica de f, recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas

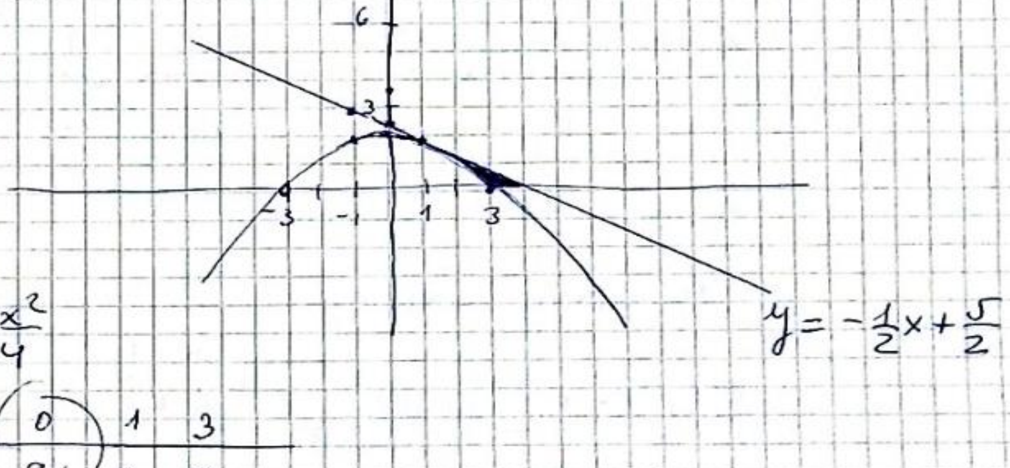
$f(x)=\dfrac{9}{4}-\dfrac{x^2}{4}$ es una parábola cóncava

- $x_v=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{0}{2\cdot -1/4}=0$; $y_v=\dfrac{9}{4}$ $V\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$ vértice
- $a=-1/4$ orientación negativa $\cap$ (cóncava)
- Ptos corte : con OX : $\dfrac{9}{4}-\dfrac{x^2}{4}=0$; $x=\pm 3$ $A(3,0)$ y $B(-3,0)$

  con OY : $f(0)=\dfrac{9}{4}$ $C\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$

Recta : $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ $m=-\dfrac{1}{2}$, decreciente

x	-1	0	1
y	3	5/2	2



Parábola

$y=\dfrac{9}{4}-\dfrac{x^2}{4}$

x	-3	-1	0	1	3
y	0	2	9/4	2	0

V

Ejercicio 16: Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x\cdot(x-2)$. Represéntala gráficamente.

$f(x)=e^x\cdot(x-2)$. Representa gráficamente.

$\text{Dom} f=\mathbb{R}$

- No periódica
- No simétrica

Asíntotas: A.V. $\nexists$

A.H.: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\cdot(x-2)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x-2}{e^x}=0$

$y=0$ es A.H. por la izqda.

Posición: $f(x)-b=e^x(x-2)\longrightarrow 0^-$ si $x\to-\infty$

$f(x)$ por debajo de $y=0$ (en $-\infty$)

A.O. $\nexists$

- Puntos de corte con los ejes:

con OX: $e^x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow e^x=0$ sin solución; $x-2=0$; $x=2$ $(2,0)$

con OY: $f(0)=e^0\cdot(-2)=-2$

$(0,-2)$

- Monotonía y extremos relativos:

$f'(x)=e^x\cdot(x-2)+e^x=e^x(x-2+1)=e^x(x-1)$

$f'(x)=0 \iff x=1$ posible extremo

	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f'(x)=e^x(x-1)$

$f'(0)=-1<0$

$f'(2)=e^2>0$

- f estrict. creciente en $(1,+\infty)$
- f estrict. decreciente en $(-\infty,1)$
- f presenta un MÍNIMO REL en $x=1 \Rightarrow P(1,-e)$

- Curvatura y puntos de inflexión:

$f''(x)=e^x(x-1)+e^x=e^x(x-1+1)=x\cdot e^x$

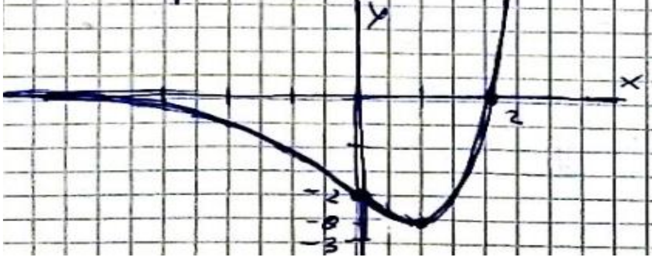
$f''(x)=0 \iff x=0$ posible punto de inflexión.

	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

$f''(x)=e^x\cdot x$

- f es cóncava en $(-\infty,0)$
- f es convexa en $(0,+\infty)$
- f presenta un punto de inflexión en $x=0$ $I(0,-2)$

- Representación:



Ejercicio 17: Sean las funciones $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x)=2\sqrt{x}$. Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.

$f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ $\quad$ Dom $f=\mathbb{R}$

$g(x)=2\sqrt{x}$ $\quad$ Dom $g=[0,+\infty)$

Puntos de corte

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x^2}{4} \\ y=2\sqrt{x}\end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

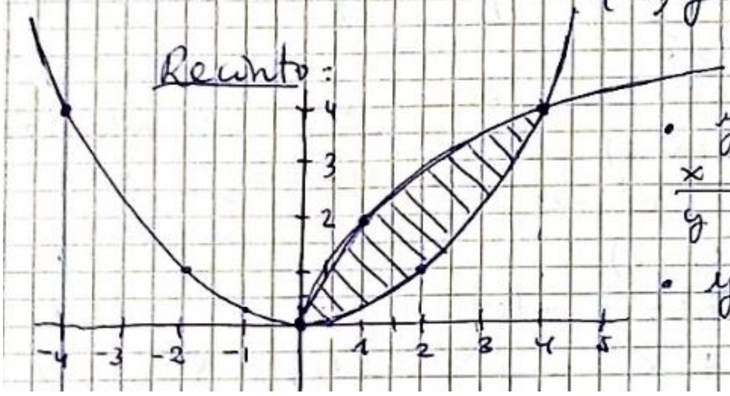
$$\frac{x^2}{4}=2\sqrt{x}\ ;\quad \frac{x^2}{8}=\sqrt{x}\ ;\quad \frac{x^4}{64}=x\ ;\quad x^4=64x$$

$$x^4-64x=0\ ;\quad x(x^3-64)=0 \begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=\sqrt[3]{64}=4 \rightarrow y=4\end{cases}$$

Puntos de corte: $(0, f(0)=g(0))$

$(4, f(4)=g(4))$, son $(0,0)$ y $(4,4)$

Recinto:



• $y=\dfrac{x^2}{4}$ parábola convexa $\cup$

x	-4	-2	0	2	4	5
y	4	1	0	1	4	$\frac{25}{4}$

vértice

• $y=2\sqrt{x}$

x	0	1	2	4
y	0	2	$2\sqrt{2}$	4

Ejercicio 18: Sea f la función definida para $x\neq 0$ por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) Estudia la monotonía y los extremos relativos de f.

c) Esboza la gráfica de f.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ $\quad x\neq 0$

a) Asíntotas:

• A. vertical: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\left(\frac{1}{0}\right) \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{cases}$

$\boxed{x=0}$ es A.V.

• A. Horizontal: $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$ $\quad$ $\nexists$ A.H.

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$

- A. Oblicua: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$

$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - x\right)$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$y = x$ es la asíntota oblicua

Posición: $f(x) - x = \frac{x^2+1}{x} - x = \frac{1}{x}$ → 0^- (si $x\to-\infty$), → 0^+ (si $x\to+\infty$)

f por debajo de $y=x$ en $-\infty$

f por encima de $y=x$ en $+\infty$

b) Monotonía y extremos

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ $\quad$ $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2-1}{x^2} = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x = \pm 1$ posibles extremos

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f'	+	−	−	+
f	↗	↘	↘	↗

$f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

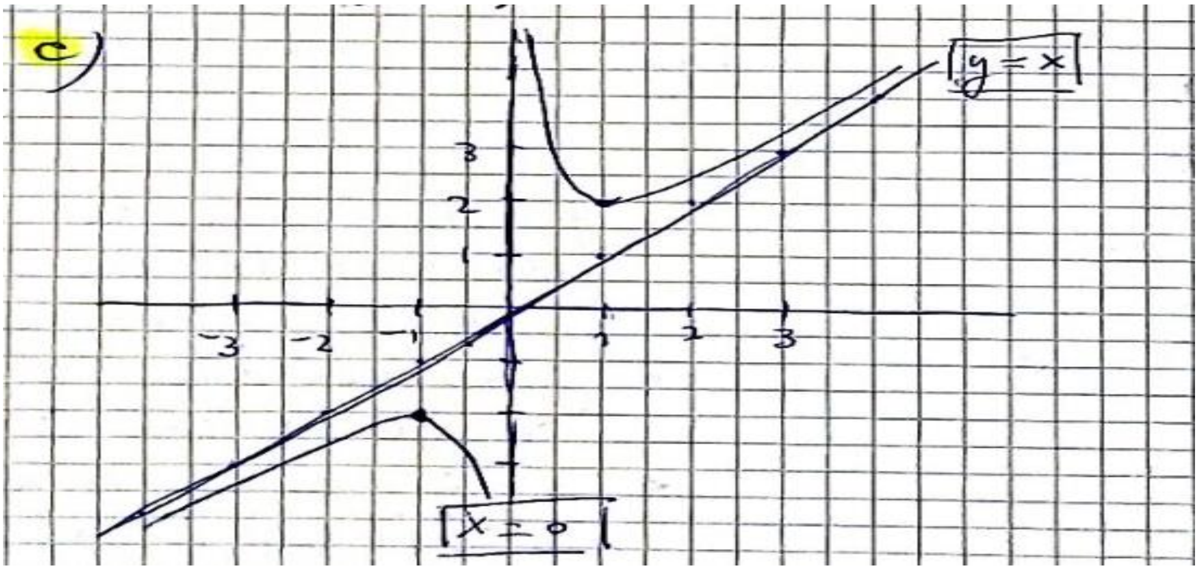
$f'(-2) = \frac{3}{4} > 0$

$f'(-0'3) = \frac{0'09-1}{0'09} < 0$

$f'(0'1) = \frac{0'01-1}{0'01} < 0$

$f'(3) = \frac{9-1}{9} = \frac{8}{9} > 0$

- f es estrict. creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$
- f estrictamente decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$
- f presenta un MÁXIMO REL. en $x=-1$ ⇒ $M(-1, f(-1)) = (-1, -2)$
- f presenta un MÍNIMO RELATIVO en $x=1$, $m(1, f(1))$
  $m(1, 2)$



Ejercicio 19: Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

a) Halla sus asíntotas.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Determina los intervalos de concavidad y convexidad (curvatura).
d) Esboza su gráfica.

19) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$, $x \neq 1$

a) • Asíntotas verticales:

$\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x}{x-1} = \left(\dfrac{e}{0}\right)$ → $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e}{0^+} = +\infty$

$\boxed{x=1}$ es A. Vertical

• Asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = +\infty$ (e^x es un infinito superior)

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x-1} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{e^x(-x-1)} = 0$

$\boxed{y=0}$ es A. Horizontal por la izquierda

Posición: $f(x) - b = \dfrac{e^x}{x-1} - 0 = \dfrac{e^x}{x-1} \to 0^-$ (si $x \to -\infty$)

por tanto, f por debajo de $y=0$

• Asíntota oblicua:

No existe: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x}=+\infty$

y por la izqda, f posee A. Horizontal

b) Monotonía

$f(x)=\frac{e^x}{x-1}$, $x\neq 1$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\frac{e^x\cdot(x-2)}{(x-1)^2}$ $\qquad f'(x)=0 \iff e^x(x-2)=0$

$\begin{cases} \cdot\ e^x=0 \text{ sin solución} \\ \cdot\ x-2=0;\ x=2 \end{cases}$ pto crítico

	$-\infty$	1		2		$+\infty$
f'	$-$	$\nexists$	$-$		$+$	
f	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$	

$f'(0)=-2<0$

$f'(1'5)<0$

$f'(3)=\frac{e^3\cdot 1}{4}>0$

• f estrictamente decreciente en $(-\infty,1)$ y $(1,2)$

• f estrictamente creciente en $(2,+\infty)$

• $x=2$ es un Mínimo Rel $(2,f(2))=(2,e^2)$

c) Curvatura

$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\neq 1$

$$f''(x)=\frac{\left[e^x(x-2)+e^x\right]\cdot(x-1)^2-e^x(x-2)\cdot 2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{(x-1)\cdot\left[e^x(x-1)(x-2)+e^x(x-1)-2e^x(x-2)\right]}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=\frac{e^x\left(x^2-3x+2+x-1-2x+4\right)}{(x-1)^3}=\frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3} \qquad x \neq 1$$

$f''(x) = 0 \iff x^2-4x+5=0$

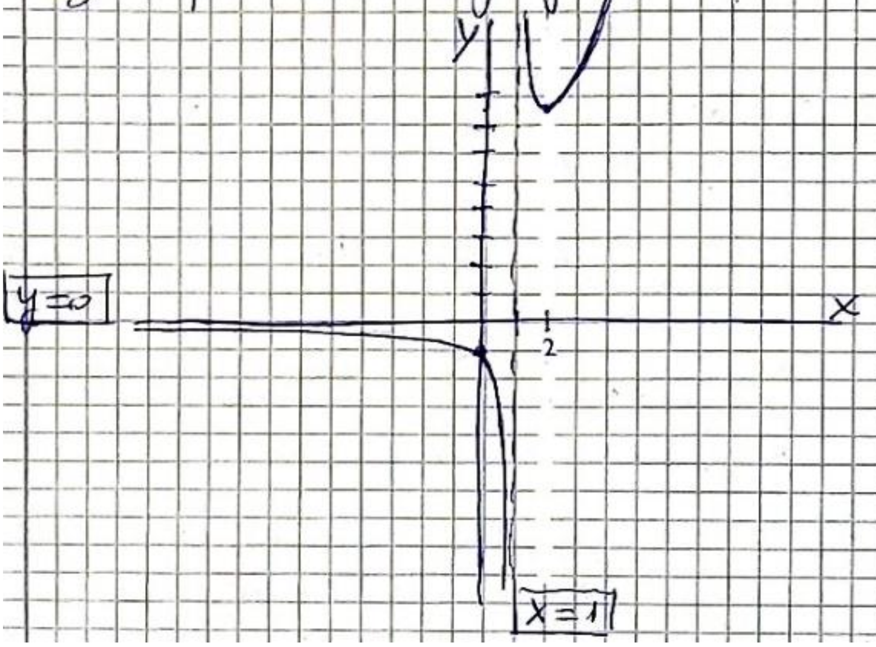
No tiene solución real $\Rightarrow \nexists$ P.I.

No hay puntos de inflexión

	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

- f es cóncava en $(-\infty, 1)$
- f es convexa en $(1, +\infty)$
- f no presenta punto de inflexión.

d) Representación gráfica:



Mínimo:
$(2, e^2) \simeq (2, 7'39)$

Punto corte OY:
$(0, f(0)) = (0, -1)$

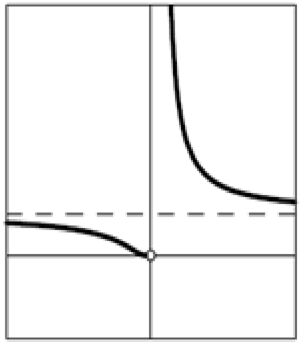
Punto corte OX:
No existe
$\frac{e^x}{x-1} = 0$; $e^x = 0$ sin solución

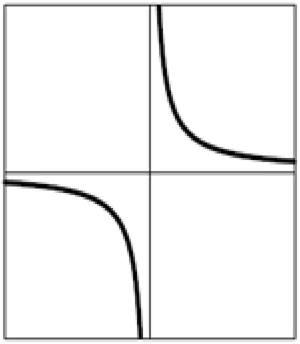
Ejercicio 20: Considera las tres funciones cuyas expresiones vienen dadas, para $x \neq 0$, por:

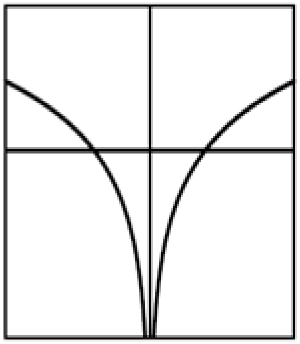
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}, \qquad g(x) = e^{1/x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \ln|x|$$

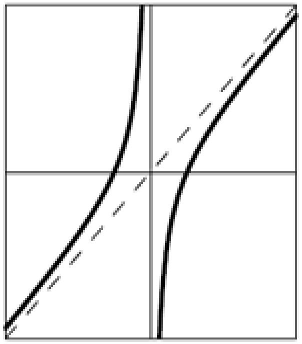
a) Halla las ecuaciones de las asíntotas de las gráficas de f, g y h.

b) Identifica, entre las que siguen, la gráfica de cada función, justificando la respuesta.


Gráfica 1


Gráfica 2


Gráfica 3


Gráfica 4

20) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $g(x)=e^{1/x}$, $h(x)=\ln|x|$

a) Asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$, $x\neq 0$:

- $\boxed{x=0}$ es A. Vertical: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x}=\left(\dfrac{-1}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$
- A. Horizontal: No presenta
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=+\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=-\infty$ $\Big\}\ \nexists$ A.H.
- A. Oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=1$
  $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x}=0$
  $\boxed{y=x}$ es A. oblicua

$\Rightarrow$ Luego gráfica 4 es la de $f(x)$

b) $g(x)=e^{1/x}$, $x\neq 0$

A. Vertical: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}=e^{+\infty}=+\infty$ $\boxed{x=0}$ A. V. (si $x\to 0^+$)
$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}=e^{-\infty}=0$

A. Horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}=e^{0}=1$ $\boxed{y=1}$ A. H.

A. Oblicua: No puede presentar por ser incompatible con la horizontal

Observando las gráficas, le corresponde Gráfica 1

c) $h(x) = \ln|x|$, $Dom f = \mathbb{R}$

A. Vertical: $\lim_{x \to 0^-} \ln|x| = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} \ln|x| = -\infty$ } $x=0$ es A.V.

A. Horizontal:

$\lim_{x \to \pm\infty} \ln|x| = +\infty$, no presenta A.H.

A. Oblicua:

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$

No presenta A. Oblicua

Observando las gráficas, teniendo en cuenta la A.V. $x=0$ y los límites obtenidos $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ la gráfica de $h(x)$ es la Gráfica 3