UNIDAD 2: PROPORCIONALIDAD Y PROBLEMAS FINANCIEROS

Contenido

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

Razón entre dos números

Siempre que hablemos de **razón** entre dos números nos estaremos refiriendo al cociente (el resultado de dividirlos) entre ellos. Entonces:

Razón entre dos números a y b es el cociente entre ellos: $\frac{a}{b}$

Por ejemplo, la razón entre 10 y 5 es 2, ya que $\frac{10}{5}=2$

Proporción numérica

Los números a, b, c y d forman una proporción si la razón entre a y b es la misma que entre c y d. Es decir, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Se lee "a es a b como c es a d"

Ejemplo: Los números 2, 5 y 8, 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20. Es decir, $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$

En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ hay cuatro términos; a y d se llaman extremos, b y c se llaman medios.

La propiedad fundamental de las proporciones es que en toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios, es decir: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$

Así, en la proporción anterior $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$ pues $2\cdot 20=5\cdot 8$

Ejercicio 1: Determina el valor que falta en las siguientes proporciones:

a) $\frac{x}{30}=\frac{4}{5}$ b) $\frac{4}{x}=\frac{12}{18}$ c) $\frac{0,3}{0,4}=\frac{x}{8}$

Magnitudes

Una magnitud es cualquier propiedad que se puede medir numéricamente. Por ejemplo:

- La longitud del lado un cuadrado.
- La capacidad de una botella de agua.
- El tiempo empleado en recorrer 100 metros.
- El número de goles marcados por el equipo A.

Definición: Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Se establece una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes cuando:

A más de una magnitud corresponde más de la otra magnitud.

A menos de una magnitud corresponde menos de la otra magnitud.

Ejemplo: Son magnitudes directamente proporcionales, el peso de un producto y su precio.

Si 1 kg de tomates cuesta 1 €, 2 kg costarán 2 € y ½ kg costará 50 céntimos.

Es decir:

A más kilógramos de tomate más euros.

A menos kilógramos de tomate menos euros.

También son directamente proporcionales, por ejemplo:

El espacio recorrido por un móvil y el tiempo empleado.

El volumen de un cuerpo y su peso.

Ejemplo: Un coche a velocidad constante ha recorrido diferentes distancias obteniéndose la siguiente tabla de consumo de gasolina:

$\cdot 2$ $\quad$ $: 4$

	Trayecto 1	Trayecto 2	Trayecto 3
Distancia recorrida en km	250 km	500 km	125 km
Consumo de gasolina en litros	12,5 l	25 l	6,25 l

Observamos que cuando pasamos de la trayectoria 1 a la trayectoria 2, al multiplicar por 2 la distancia, el consumo también se multiplica por 2. Y análogamente, al pasar del trayecto 2 al trayecto 3, al dividir por 4 la distancia, el consumo también se reduce en una cuarta parte. Por tanto, la distancia y el consumo son magnitudes directamente proporcionales.

Observamos también que los cocientes entre los pares de valores correspondientes se mantienen constantes, es decir, $r = \dfrac{250 \text{ km}}{12{,}5 \text{ litros}} = \dfrac{500 \text{ km}}{25 \text{ litros}} = \dfrac{125 \text{ km}}{6{,}25 \text{ litros}} = 20 \text{ km / litro}$, que nos dice que ese coche es capaz de recorrer 20 km por cada litro de gasolina. Al número 20 se le conoce como constante de proporcionalidad directa de estas magnitudes

Definición: Se llama **constante de proporcionalidad directa** de dos magnitudes directamente proporcionales a los cocientes de los pares de valores correspondientes

Definición: Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando, al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Se establece una relación de proporcionalidad inversa entre dos magnitudes cuando:

A más de una magnitud corresponde menos de la otra magnitud.

A menos de una magnitud corresponde más de la otra magnitud.

Ejemplo: Son magnitudes inversamente proporcionales, la velocidad y el tiempo:

A más velocidad corresponde menos tiempo.

A menos velocidad corresponde más tiempo.

Un vehículo tarda en realizar un trayecto 6 horas si su velocidad es de 60 km/h, pero si doblamos la velocidad el tiempo disminuirá a la mitad. Es decir, si la velocidad es de 120 km/h el tiempo del trayecto será de 3 horas.

Ejemplo: Se necesita transportar cierta cantidad de tierra de una zona a otra y para ello se utilizan camiones.

Número de camiones	4 camiones	8 camiones	2 camiones
Días empleados	14 días	7 días	28 días

Como observamos, si se duplican los camiones, se reduce el número de días a la mitad. Y que, si se divide el número de camiones, se multiplica por el mismo número el total de días.

Observemos también que el producto del nº de camiones por el nº de días se mantiene constante:

$k = 4 \cdot 14 = 8 \cdot 7 = 2 \cdot 28 = 56$, a este número se le conoce como constante de proporcionalidad inversa.

Definición: Se llama **constante de proporcionalidad inversa** de dos magnitudes inversamente proporcionales a los productos de los pares de valores correspondientes.

Ejercicio 2: Escribe D en los pares de magnitudes directamente proporcionales, I en las inversamente proporcionales y X en las que no sean ni una cosa ni otra.

El número de personas que van en el autobús y la recaudación del autobús	
El número de páginas de un libro y su precio	
El número de vacas que posee un granjero y la cantidad de pienso que gasta a la semana	
El número de páginas de un libro y el peso que tiene	
El número de hijos de una familia y el número de días que tiene de vacaciones el padre	
El tamaño de una caja y el número de cajas iguales que se pueden almacenar en una nave	
El tiempo que tenemos colocado un cántaro en la fuente y la cantidad de agua que recogemos	
El caudal (litros/minuto) que arroja un manantial y el tiempo que tarda en llenar 20 litros	
El tiempo que está encendida una bombilla y el gasto de energía	
La velocidad de un tren y el tiempo que tarda en cubrir la distancia entre dos ciudades	
El precio de un coche y el número de asientos que lleva	
El número de operarios y el tiempo empleado en hacer determinado trabajo	

Ejercicio 3: Completa la siguiente tabla sabiendo que la proporcionalidad entre las magnitudes es directa

Magnitud A	4	2		3	
Magnitud B	20		60		100

¿Cuánto corresponde a 1 de A? ....

Ejercicio 4: Completa la siguiente tabla sabiendo que la proporcionalidad entre las magnitudes es inversa

Magnitud A	4	2		16	
Magnitud B	20		16		100

¿Cuánto corresponde a 1 de B? ....

Ejercicio 5: Indica al lado si la tabla es de proporcionalidad directa o inversa:

a) ¿Por qué?

Magnitud A	6	2	8	12	16
Magnitud B	8	24	6	4	3

b) ¿Por qué?

Magnitud A	2	6	3	5	10
Magnitud B	24	72	36	60	120

2. PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Para resolver un problema de proporcionalidad debes seguir los siguientes pasos:

1. Determinar si la proporcionalidad entre las magnitudes es directa o inversa
2. Plantear la regla de tres señalando si es directa o inversa. Expresa las cantidades de cada magnitud en la misma unidad.
3. Escribir la pareja de fracciones equivalentes.
4. Hallar x

Ejemplo: Un grupo de 15 alumnos va a realizar una excursión a un museo. Se ha recaudado 105 € para esa visita. Sin embargo, en el último momento se apuntan 3 alumnos más, de modo que se tiene que volver a calcular lo que hay que pagar en total teniendo en cuenta que todas las entradas cuestan lo mismo. ¿Qué cantidad total habrá que pagar ahora?

1ª Forma: Ambas magnitudes son directamente proporcionales, a más alumnos más habrá que pagar.

Tenemos la tabla,

Precio total en €	105	x
Número de alumnos	15	18

Al ser directamente proporcional, se verifica la proporción:

$\frac{105}{15}=\frac{x}{18}\Rightarrow 105\cdot 18=15\cdot x\Rightarrow x=\frac{105\cdot 18}{15}\Rightarrow x=126$. Por tanto, son 126 € lo que tendrá que pagar en total.

2ª Forma: Lo podíamos haber hecho también mediante una regla de tres directa:

105 € ⟶ 15 alumnos Luego $x = \frac{105 \cdot 18}{15} \Rightarrow x = 126$

x ⟶ 18 alumnos

3ª Forma: Averiguar el valor de la constante de proporcionalidad directa, que es $r = \frac{105\ €}{15\ \text{alumnos}} \Rightarrow r = 7\ {}^{€}\!/_{\text{alumno}}$

Cada entrada cuesta por tanto 7 €.

Ahora multiplicamos por 18 alumnos y tendremos la cantidad a pagar: $7 \cdot 18 = 126$ €

Ejemplo: El grifo de una fuente que vierte 20 l/min llena un depósito en media hora. En otra ocasión se utiliza otra fuente de la que manan 50 l/min. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito con esta última fuente?

1ª Forma: Ambas magnitudes son inversamente proporcionales, a más caudal de la fuente menos tiempo en llenar el depósito.

Tenemos la tabla,

Caudal en l/min	20	50
Tiempo en min	30	x

Establecemos la relación de proporcionalidad inversa: $20 \cdot 30 = 50 \cdot x \Rightarrow x = \frac{600}{50} \Rightarrow x = 12\ \text{min}$

2ª Forma: Lo podíamos haber hecho también mediante una regla de tres inversa:

20 l/min ⟶ 30 min Luego $x = \frac{20 \cdot 30}{50} \Rightarrow x = 12\ \text{min}$

50 l/min ⟶ x

3ª Forma: Averiguar el valor de la constante de proporcionalidad inversa, que es $k = 20 \cdot 30 \Rightarrow k = 600$ litros tiene de capacidad el depósito.

Ahora dividimos por el caudal de la nueva fuente y lo obtenemos: $\frac{600}{50} = 12\ \text{min}$

Ejercicio 6: Para realizar cierto trabajo 10 obreros emplean 8 horas. ¿Cuánto les hubiera costado a 16 obreros?

Ejercicio 7: Si por 12 camisetas pago 96€, ¿cuánto pagaré por 57 de esas camisetas?

Ejercicio 8: Tres obreros descargan un camión en dos horas. ¿Cuánto tardarán dos obreros?

Ejercicio 9: Trescientos gramos de queso cuestan 6€ ¿Cuánto podré comprar con 4,5€?

Ejercicio 10: Una máquina embotelladora llena 240 botellas en 20 minutos. ¿Cuántas botellas llenará en hora y media?

Ejercicio 11: Un coche que va a 100 km/h necesita 20 minutos en recorrer la distancia entre dos pueblos. ¿Qué velocidad ha de llevar para hacer el recorrido en 16 minutos?

Ejercicio 12: Un ganadero tiene 20 vacas y pienso para alimentarlas durante 30 días. ¿Cuánto tiempo le durará el pienso si se mueren 5 vacas?

Ejercicio 13: Un padre les da la paga a sus tres hijas de forma que a cada una le corresponde una cantidad proporcional a su edad. A la mayor, que tiene 20 años, le da 50 euros. ¿Cuánto dará a las otras dos hijas de 15 y 8 años de edad?

Ejercicio 14: Un camión que carga 3 toneladas necesita 15 viajes para transportar cierta cantidad de arena. ¿Cuántos viajes necesitará para hacer transportar la misma arena un camión que carga 5 toneladas?

3. REPARTOS PROPORCIONALES

Reparto directamente proporcional

Se denomina problemas de reparto proporcional aquellos en los que una determinada cantidad debe repartirse proporcionalmente a otras cantidades. Veamos mediante un ejemplo como se realiza

Ejemplo: Repartir 1.184 € entre tres amigos a los que les ha tocado la lotería, sabiendo que cada uno de ellos ha jugado 30 €, 24 € y 20 €.

MÉTODO 1:

Para que el reparto sea proporcional los cocientes entre lo que cada uno recibe y pone deben ser iguales, es decir:

$$\frac{\text{Premio 1}}{30} = \frac{\text{Premio 2}}{24} = \frac{\text{Premio 3}}{20} = \frac{\text{Suma de premios}}{\text{Suma de aportaciones}}$$

Llamando a cada premio X, Y, Z a cada uno de los premios tenemos que:

$\frac{x}{30} = \frac{y}{24} = \frac{z}{20} = \frac{1.184}{30+24+20} = \frac{1.184}{74} = 16$ De aquí obtenemos los valores:

$\frac{x}{30} = 16 \Rightarrow x = 480$ € recibe el que ha puesto 30 €	$\frac{y}{24} = 16 \Rightarrow y = 384$ € recibe el que ha puesto 24 €	$\frac{z}{20} = 16 \Rightarrow z = 320$ € recibe el que ha puesto 20 €

MÉTODO 2º:

Consiste en hallar primero lo que le corresponde a la unidad. En el ejemplo, los euros que han tocado en la lotería por cada euro apostado.

Euros apostados: 30+24+20=74

Premio recibido: 1.184 €.

Luego por cada euro se recibe: $\frac{1.184}{74} = 16$ €., y, por tanto, cada amigo recibe:

El que ha puesto 30 €. recibe 30x16= 480 €.

El que ha puesto 24 €. recibe 24x16= 384 €.

El que ha puesto 20 €. recibe 20x16= 320 €.

Total:..................=1.184 €.

Reparto inversamente proporcional

A veces tenemos que repartir una cantidad de manera inversa a otras cantidades, esto es un reparto inversamente proporcional. Veamos con un ejemplo como se realiza:

Ejemplo: En una carrera se destinan 5.870 euros para los tres primeros premios, que ha de repartirse según los tres mejores tiempos empleados. Estos tiempos han sido de 26, 28 y 30 minutos. Hallar el premio que le corresponde a cada corredor.

Evidentemente al corredor que ha tardado 26 minutos (es el ganador) le corresponde mayor premio que al que ha llegado en tercer lugar, por tanto no es un tipo de reparto del tipo "a más le corresponde más".

Repartir de forma inversamente proporcional a 26, 28 y 30 es equivalente a repartir de forma proporcional a 1/26, 1/28, y 1/30.

Aplicando ahora el método 1 visto en el anterior caso, puede hacerse:

$$\frac{x}{\frac{1}{26}} = \frac{y}{\frac{1}{28}} = \frac{z}{\frac{1}{30}} = \frac{5.870}{\frac{1}{26}+\frac{1}{28}+\frac{1}{30}} = \frac{5.870}{\frac{587}{5460}} = 54.600$$ De aquí obtenemos los valores:

$$\frac{x}{\frac{1}{26}} = 54.600 \Rightarrow 26x = 54.600 \Rightarrow x = \frac{54.600}{26} = 2.100$$ € le corresponde al ganador.

$$\frac{y}{\frac{1}{28}} = 54.600 \Rightarrow 28y = 54.600 \Rightarrow y = \frac{54.600}{28} = 1.950$$ € le corresponde al segundo.

$$\frac{z}{\frac{1}{30}} = 54.600 \Rightarrow 30z = 54.600 \Rightarrow z = \frac{54.600}{30} = 1.820$$ € le corresponde al tercero.

Ejercicio 15: Se quiere repartir unos beneficios de 4.000 € entre tres trabajadores proporcionalmente a los años que llevan en la empresa, que son 10, 12 y 18 años. ¿Cuánto recibirá cada uno?

Ejercicio 16: Tres agricultores alquilan una segadora por 13.950 €. Si tienen 2 ha, 3 ha, y 4 ha Respectivamente, ¿cuánto ha de pagar cada uno?

Ejercicio 17: Tres almacenistas de madera, importan conjuntamente de Guinea madera por valor de 24.300 €. El primero se queda con 210 m^3, el segundo con 330 m^3 y el tercero con 270 m^3. ¿Cuánto debería pagar cada uno?

Ejercicio 18: Reparte una herencia de 57.800 € entre tres hermanos de forma inversamente proporcional a sus edades que son: 4, 6 y 18 años.

Ejercicio 19: En las fiestas de verano del pueblo se celebra una carrera, para la cual se destinan 110 € a repartir entre los tres corredores que acaben en los tres primeros lugares de manera inversamente proporcional al puesto que ocupa. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de los tres clasificados?

Ejercicio 20: Una profesora enseña cálculo mental a cinco alumnos. El último día hace una prueba y como premio decide repartir 20 puntos de forma inversamente proporcional a los fallos que cometa cada uno. Los resultados son: 1 fallo, 1 fallo, 2 fallos, 2 fallos y 3 fallos. ¿Cuántos puntos recibe cada uno?

Ejercicio 21: En 160 kg de sulfato de cobre hay 64 kg de cobre, 32 de azufre y 64 de oxígeno. ¿Qué cantidad de cada producto hay en 300 kg de sulfato de cobre?

4. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Los problemas de proporcionalidad compuesta son aquellos en los que intervienen tres o más magnitudes, relacionadas entre sí de forma directa o inversa.

Para resolver estos problemas lo primero es relacionar todas las magnitudes con aquella que nos preguntan en el problema, viendo si estas relaciones son de proporcionalidad directa o inversa. Una vez relacionadas hacemos el paso a la unidad de todas las magnitudes menos aquella que nos preguntan, y vemos cómo se modifica esta última aplicando las relaciones de proporcionalidad directa o inversa. Una vez que estas magnitudes valen uno se multiplican o dividen para que estas valgan los datos del problema para los cuales deseamos conocer la magnitud deseada y vemos el valor final de esta, siendo esta la respuesta del problema.

Veamos con diferentes ejemplos como se resuelven:

Ejemplo: Un hotel cobra a 4 personas 1200€ por 5 días de alojamiento. ¿Cuánto cobrará a 6 personas por 10 días de alojamiento?
Tenemos 3 magnitudes: número de personas, días de alojamiento y precio total.
El número de personas y el precio total son directas, a más personas se paga más.
El número de días y el precio total también son directas, a más días se pagará más.
Tenemos pues lo siguiente:

Directa Directa

Nº de personas		Precio		Nº de días	
4	:4	1200 €	:4	5	
1		300 €	:5	5	:5
1	·6	60 €	·6	1	
6		360 €	·10	1	·10
6		3600 €		10	

Hemos realizado lo siguiente:

- Dividimos por 4 el nº de personas (para 1 sola persona), por tanto, también dividimos por 4 el precio por ser directa.
- Dividimos por 5 el nº de días (para 1 sólo día), por tanto, dividimos por 5 el precio también.
- Multiplicamos por 6 el nº de personas, por tanto, también multiplicamos por 6 el precio por ser directa.
- Multiplicamos por 10 el nº de días, por tanto, multiplicamos por 10 el precio también.

Ya tenemos el resultado pedido para 6 personas y 10 días tenemos un coste de 3.600 €.

Ejemplo: Para montar unas casetas de la feria del libro se han necesitado 6 obreros trabajando 12 horas diarias durante 5 días. ¿Cuántos días necesitan trabajar 10 obreros para hacer el mismo montaje en otra ciudad trabajando 6 horas diarias?

Tenemos 3 magnitudes también: número de obreros, números de horas diarias y número de días.
El número de obreros y el número de días son inversas, a más obreros se tardará menos días.
El número de horas diarias y el número de días también son inversas, a más horas diarias se tardará menos días.
Tenemos pues lo siguiente:

Inversa Inversa

	Nº de obreros		Nº de días		Nº de horas diarias	
	6		5		12	
:6	1	·6	30	·12	12	:12
	1		360		1	
·10	10	:10	36	:6	1	·6
	10		6		6	

Hemos realizado lo siguiente:

- Dividimos por 6 el nº de obreros (para 1 obrero), por tanto, multiplicamos por 6 el nº de días.
- Dividimos por 12 el nº de horas diarias (para 1 hora diaria), por tanto, multiplicamos por 12 el nº de días.
- Multiplicamos por 10 el nº de obreros, por tanto, dividimos por 10 el nº de días.
- Multiplicamos por 6 el nº de horas diarias, por tanto, dividimos por 6 el nº de días.

Ya tenemos el resultado pedido para 10 obreros a 6 horas diarias se necesitarán 6 días.

<u>Ejemplo</u>: Un peregrino caminando 10 horas diarias durante 24 días, recorre 720km. ¿Cuántos días necesitan para recorrer 432km caminando 8 horas diarias?

:10

Tenemos 3 magnitudes también: números de horas diarias, número de kilómetros recorridos y número de días.
El número de horas diarias y el número de días son inversas, a más horas diarias se tardará menos días.
El número de kilómetros y el número de días son directas, a más kilómetros se tardará más días.
Tenemos pues lo siguiente:

	Nº de horas diarias (Inversa)		Nº de días (Directa)		Nº de kilómetros	
	10		24		720	
:10	1	·10	240	:720	720	:720
	1		$\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$		1	
	1		$\frac{1}{3}\cdot 432=144$	·432	432	·432
·8	8	:8	18		432	

Hemos realizado lo siguiente:

- Dividimos por 10 el nº de horas diarias, por tanto, multiplicamos por 10 el nº de días.
- Dividimos por 720 el nº de kilómetros, por tanto, dividimos por 720 el nº de días.
- Multiplicamos por 432 el nº de kilómetros, por tanto, multiplicamos por 432 el nº de días.
- Multiplicamos por 8 el nº de horas diarias, por tanto, dividimos por 8 el nº de días.

Ya tenemos el resultado pedido para 432 kilómetros a 8 horas diarias se necesitarán 18 días.

<u>Ejercicio 22</u>: Si 10 grifos tardan 12 horas en llenar un depósito de 15 metros cúbicos, ¿cuánto tardarán 8 grifos en llenar otro depósito de 7 metros cúbicos?

<u>Ejercicio 23</u>: Una persona leyendo 4 horas diarias a razón de 15 páginas por hora tarda en leer un libro de 10 días. Si leyendo a razón de 12 páginas por hora tardase 20 días. ¿Cuántas horas diarias leerían?

<u>Ejercicio 24</u>: Cuatro agricultores recolectan 10 000 Kg de cerezas en 9 días. ¿Cuántos Kilos recolectarán seis agricultores en 15 días?

<u>Ejercicio 25</u>: Cinco trabajadores tardan 16 días en construir una pequeña caseta de aperos trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos trabaja dores serán necesarios para construir dicha casita en 10 días si trabajan 8 horas diarias?

<u>Ejercicio 26</u>: Ocho bombillas iguales encendidas durante 4 horas diarias han consumido en 30 días, 49 kilovatios. ¿Cuánto consumirán 6 bombillas encendidas 3horas diarias, durante 20 días?

Ejercicio 27: Un equipo de 8 programadores trabajará 6 horas diarias para desarrollar un software en un año. Si se forma un equipo de 10 programadores trabajando 4 horas diarias, ¿cuántos años se necesitan para realizar un proyecto de la misma envergadura?

5. PORCENTAJES. AUMENTOS Y DISMINUCIONES

Porcentajes

Un tanto por ciento o porcentaje es la cantidad que hay en cada 100 unidades. Se expresa añadiendo a la cantidad el símbolo %.

Ejemplo: Se han preparado bolsas de caramelos, de modo que, de 25 caramelos que se echaban en las bolsas, 5 eran de menta. ¿Qué porcentaje hay de caramelos de menta?

Podemos saberlo haciendo una regla de tres simple y directa:

25 caramelos $\longrightarrow$ 5 de menta

100 caramelos $\longrightarrow$ x de menta

Luego $x = \dfrac{100 \cdot 5}{25} \Rightarrow x = 20\%$

El tanto por ciento también se puede expresar en tanto por uno o en tanto por mil, que en el ejemplo anterior se obtienen así:

Tanto por uno (es la cantidad que hay en la unidad, 1)	$\dfrac{20}{100} = 0,2$
Tanto por mil (‰) (es la cantidad que hay en el millar, 1.000)	$1000 \cdot 0,2 = 200$ ‰

Ejemplo: En un curso hay 25 estudiantes, de los cuales el 60% son alumnas. ¿Cuántas alumnas hay en ese curso?

Podemos hacerlo con una regla de tres directa

25 alumnos $\longrightarrow$ x alumnas

100 alumnos $\longrightarrow$ 60 alumnas

Luego $x = \dfrac{25 \cdot 60}{100} \Rightarrow x = 15$ alumnas

Pero es más rápido usar el tanto por uno de esta forma: 60% de 25 = $25 \cdot \dfrac{60}{100} = 15$ alumnas

Como vemos un porcentaje es equivalente a una fracción de denominador 100, es decir, por ejemplo $30\% = \dfrac{30}{100}$

Ejemplo: En una votación participan 300 personaS. ¿Qué tanto por ciento de los votos obtuvo un candidato que fue votado por 50 personas?

Hacemos el tanto por uno que es la fracción $\dfrac{50}{300} = 0,167$, lo cual corresponde a $16,7\%$

También se podía haber hecho mediante una regla de tres.

Ejemplo: El 40% de una cantidad es 7,21 €. ¿Cuál es la cantidad total?

En este caso lo vamos a hacer mediante una regla de tres:

x $\longrightarrow$ 7,21

100 $\longrightarrow$ 40

Luego $x = \dfrac{7,21 \cdot 100}{40} \Rightarrow x = 18,03$

Mediante proporciones y despejando quizás sea más fácil y sería así:

$$x \cdot \frac{40}{100} = 7,21 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 7,21}{40} = 18,03$$

Ejercicio 28:

a) Indica el porcentaje expresado por las siguientes fracciones: $\frac{35}{100}$, $\frac{15}{40}$ y $\frac{125}{50}$

b) Expresa en tanto por uno y tanto por mil los siguientes porcentajes: 28%, 75%

Ejercicio 29: Una moto cuyo precio era de 5.000 €, cuesta en la actualidad 250 € más. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

Ejercicio 30: Al adquirir un vehículo cuyo precio es de 8800 €, nos hacen un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

Ejercicio 31: El precio de un ordenador es de 1200 € sin IVA. ¿Cuánto hay que pagar por él si el IVA es del 21%?

Ejercicio 32: Si el precio de un artículo se rebaja en un 35%, entonces...

a) Pagaremos sólo el 35% del precio inicial.
b) Pagaremos sólo el 65% del precio inicial.
c) Pagaremos sólo el 135% del precio inicial.

Ejercicio 33: Si el precio de una antigüedad sube un 25%, entonces...

a) Tendremos que pagar una cuarta parte más.
b) Tendremos que pagar un 85% del precio inicial.
c) Tendremos que pagar un 150% del precio inicial.

Ejercicio 34: Si el salario de un trabajador aumenta un 150%, entonces...

a) El salario sube un 50%.
b) El salario será el 250% del salario inicial.
c) El salario será el doble del salario inicial.

Ejercicio 35: La fracción *dos quintos* es el porcentaje...

a) 2,5%
b) 0,4%
c) 40%

Aumentos y disminuciones porcentuales

A continuación, vamos a ver cómo calcular los aumentos y disminuciones porcentuales, así como los encadenamientos de varios aumentos y disminuciones porcentuales consecutivas. Veremos también cómo calcular el porcentaje de descuento que te puedes encontrar en ofertas como en Black Friday, por ejemplo o en cualquier tienda en época de rebajas y promociones.

Para calcular el aumento porcentual de una cantidad se puede calcular el porcentaje de aumento de esa cantidad y después sumarlo a la cantidad inicial.

Ejemplo: Un libro de 20 € aumenta su precio en un 15%, ¿cuánto vale ahora?

Primero calculamos el 15% de 20 €: $20 \cdot \frac{15}{100} = 3$€

El aumento porcentual corresponde a 3 euros.
Ahora sumamos la cantidad que acabamos de calcular a la cantidad inicial: $20 + 3 = 23$€
Por tanto, el precio final del libro es de 23 euros.

También podemos calcular la cantidad final directamente, multiplicando por el **índice de variación** la cantidad inicial.

Definición: El índice de variación en un aumento porcentual es igual a 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

$I_v = \frac{100 + r}{100}$ donde r es el porcentaje de aumento.

Para obtener la cantidad final se aplica la fórmula: $C_f = C_0 \cdot I_v$

Por tanto, en el problema anterior, tenemos que $r = 15$ y $C_0 = 20$, por lo que:

$$C_f = C_0 \cdot I_v = 20 \cdot \frac{100+15}{100} = 20 \cdot \frac{115}{100} = 23€$$

Observa que, si sube un 15%, quiere decir que su valor final es un 115% del total y un 115% corresponde a 1,15 en forma decimal.

Por tanto, podemos calcular el aumento porcentual paso a paso como hemos visto o directamente multiplicando por 1 más el aumento porcentual en forma decimal.

Ejemplo: El precio de un artículo sin IVA es de 38,5 euros. ¿Cuál es el precio final sabiendo que se le aplica un 21% de IVA?

En este caso, el índice de variación es: $I_v = \frac{100+21}{100} = 1,21$

Obtenemos el precio final calculando directamente el precio inicial por el índice de variación:
$C_f = C_0 \cdot I_v = 38,5 \cdot 1,21 = 45,59$ €

Ejemplo: Un artículo tiene un precio de 250 euros después de subir su precio un 20%. ¿Cuál era el precio inicial?

Calculamos $I_v = \frac{100+20}{100} = 1,20$

$C_f = C_0 \cdot I_v \Rightarrow 250 = C_0 \cdot 1,20 \Rightarrow C_0 = \frac{250}{1,20} \Rightarrow C_0 = 208,33$€ costaba antes de la subida

Para calcular la **disminución porcentual** de una cantidad se puede calcular el porcentaje de disminución de esa cantidad y después restarlo a la cantidad inicial.

Ejemplo: Un portátil de 300 € desciende su precio en un 20%, ¿cuánto vale ahora?

Primero calculamos el 20% de 300 €: $300 \cdot \frac{20}{100} = 60$ €

La disminución porcentual son 60 €.
Ahora restamos la cantidad que acabamos de calcular a la cantidad inicial: $300 - 60 = 240$ €
Por tanto, el precio final del portátil es de 240 euros.

También podemos calcular la cantidad final directamente, multiplicando por el **índice de variación** la cantidad inicial.

Definición: El índice de variación en una disminución porcentual es igual a 1 menos el aumento porcentual expresado en forma decimal.

$I_v = \frac{100-r}{100}$ donde r es el porcentaje de aumento.

Para obtener la cantidad final se aplica la fórmula: $C_f = C_0 \cdot I_v$

Por tanto, en el problema anterior, tenemos que $r = 20$ y $C_0 = 300$, por lo que:

$$C_f = C_0 \cdot I_v = 300 \cdot \frac{100-20}{100} = 300 \cdot \frac{80}{100} = 240 €$$

Observa que, si baja un 20%, quiere decir que su valor final es un 80% del total y un 80% corresponde a 0,80 en forma decimal.

Por tanto, podemos calcular la disminución porcentual paso a paso como hemos visto o directamente multiplicando por 1 menos el aumento porcentual en forma decimal.

Ejemplo: Un artículo tiene un precio de 55 €. Se le quiere hacer una rebaja del 17%. ¿Cuál será el precio final del artículo?

En este caso, el índice de variación es: $I_v = \frac{100-17}{100} = 0,83$

Obtenemos el precio final calculando directamente el precio inicial por el índice de variación:

$C_f = C_0 \cdot I_v = 55 \cdot 0,83 = 45,65 €$

Ejemplo: Un artículo tiene un precio de 150 euros después de rebajar su precio un 25%. ¿Cuál era el precio inicial?

Calculamos $I_v = \frac{100-25}{100} = 0,75$

$C_f = C_0 \cdot I_v \Rightarrow 150 = C_0 \cdot 0,75 \Rightarrow C_0 = \frac{150}{0,75} \Rightarrow C_0 = 200 €$ costaba antes de aplicarle el descuento

Ejercicio 36: El precio de la reparación del coche del padre de Juan es de 500 € sin IVA. Si el impuesto que se aplica es del 21%, ¿cuál será el precio total de la reparación?

Ejercicio 37: Se ha disminuido el precio de un artículo de 300 € a 216 € ¿Qué tanto por ciento ha bajado

Ejercicio 38: Se ha aumentado el precio de un artículo de 125 € a 175 € ¿Qué tanto por ciento ha subido?

Ejercicio 39: Hace dos semanas una rebeca costaba 35 €. Si ahora está en ofertas y cuesta 28 €, ¿cuál es el porcentaje de descuento?

Aumentos y disminuciones porcentuales encadenados

Por último, vamos a ver cómo proceder cuando tenemos dos o más aumentos o disminuciones porcentuales encadenados de una cantidad, es decir, cuando tenemos una cantidad y se le van aplicando aumentos o disminuciones porcentuales de forma consecutiva.

En este caso, lo que debemos hacer es multiplicar por el índice de variación correspondiente a cada variación porcentual, obteniendo así la cantidad final directamente.

$C_f = C_0 \cdot I_{v1} \cdot I_{v2} \cdot I_{v3} \cdot I_{v4} \cdots$

Ejemplo: A María, en su factura del agua le aplican un recargo del 5% por exceso de consumo, un descuento del 15% por ser empleada y luego tiene que pagar un 10% de IVA. ¿Cuánto tendrá que pagar si su importe inicial era de 60 €?

Podemos calcular directamente la cantidad final, multiplicando la cantidad inicial por cada uno de los índices de variación:

$$C_f = C_0 \cdot I_{v1} \cdot I_{v2} \cdot I_{v3} \cdot I_{v4} \cdots$$

En este caso, los índices de variación son:

$$I_{v1} = \frac{100+5}{100} = 1{,}05 \qquad I_{v2} = \frac{100-15}{100} = 0{,}85 \qquad I_{v3} = \frac{100+10}{100} = 1{,}10$$

Por lo que aplicado la fórmula nos queda:

$$C_f = C_0 \cdot I_{v1} \cdot I_{v2} \cdot I_{v3} = 60 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}85 \cdot 1{,}10 = 58{,}91\,€$$

Ejercicio 40: El precio de un billete de autobús hace dos años era de 1,20 €. El año pasado sufrió una subida del 1,3 % y este año ha vuelto a subir un 2 %. ¿Cuánto cuesta hoy un billete? ¿Cuál es el porcentaje de aumento total?

6. INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

Interés simple

Es el que se obtiene cuando los intereses producidos durante el tiempo que dura una inversión se deben únicamente al capital inicial. Cuando se utiliza el interés simple, los intereses son función únicamente del:

- Capital principal o inicial C_0
- La tasa de interés o rédito (r)
- El tiempo, normalmente en años

Se llama interés (I) al beneficio que produce el dinero prestado. Ese beneficio es directamente proporcional a la cantidad prestada y al tiempo que dura el préstamo y se obtiene mediante la fórmula:

$I = \dfrac{C_0 \cdot r \cdot t}{100}$ si el tiempo es en años

$I = \dfrac{C_0 \cdot r \cdot t}{1200}$ si el tiempo es en meses

$I = \dfrac{C_0 \cdot r \cdot t}{3600}$ si el tiempo es en días

El capital final obtenido es la suma del capital inicial más el interés

$C_f = C_0 + I = C_0 + \dfrac{C_0 \cdot r \cdot t}{100}$ si es en años

Ejemplo: Hallar el interés producido durante cinco años, por un capital de 30.000 €, al 6%.

$$I = \frac{C_0 \cdot r \cdot t}{100} = \frac{30.000 \cdot 6 \cdot 5}{100} \Rightarrow I = 9.000\ €$$

Ejercicio 41:

a) Calcular en qué se convierte, en seis meses, un capital de 10.000 €, al 3.5%.
b) ¿Cuánto dinero se invirtió al 5 % anual durante 2 años para acumular un capital de 6.600 €?

Ejercicio 42: ¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25.000 € al 5% para que se convierta en 30.000 €?

Interés compuesto

El interés compuesto representa el costo del dinero, beneficio o utilidad de un capital inicial (C_0) o principal a una tasa de interés (r) durante un período (t), en el cual los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital inicial, es decir, se capitalizan.
La fórmula que nos da el capital final es:

$$C_f = C_0 \cdot \left(\frac{100+r}{100} \right)^t$$

Ejemplo: Averigua el capital final obtenido al prestar 2.500 € a un 3,2 % de rédito anual en 10 años con interés compuesto.
Aplicamos la fórmula

$$C_f = C_0 \cdot \left(\frac{100+r}{100} \right)^t = 2.500 \cdot \left(\frac{100+3,2}{100} \right)^{10} = 2.500 \cdot (1,032)^{10} = 3.42560\,€$$

Ejercicio 43: Calcula el capital acumulado invirtiendo 2.000 € al 6 % de interés compuesto durante:

a) 3 años b) 9 años

Ejercicio 44: Calcula el capital que se conseguirá en una operación financiera en la que se ingresan durante 10 años 50.000 € a un interés compuesto del 3,25 €.

Ejercicio 45: Antonio le ha pedido 300 € a un amigo. Le ha garantizado que si se lo presta durante dos años le devolverá 27 € más. ¿Qué interés simple anual tiene pensado pagar Antonio?