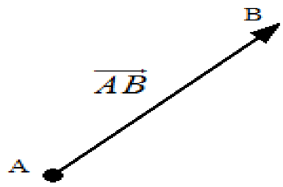
UNIDAD 4: GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

Contenido

1. VECTORES. DEFINICIONES. OPERACIONES

Un *vector fijo* $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por dos puntos, el origen A y el extremo B



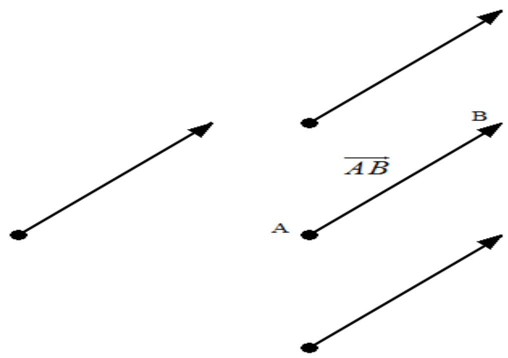
Se llama *módulo* del vector $\overrightarrow{AB}$ a la distancia que hay entre A y B. Se designa por $|\overrightarrow{AB}|$

Dirección del vector es la dirección de la recta en la que se encuentra el vector y todas sus paralelas.

El *sentido* del vector $\overrightarrow{AB}$ es el que va desde el origen A al extremo B.

Cada dirección admite dos sentidos opuestos.

Dado un vector fijo, existen infinitos vectores fijos que tienen igual módulo, dirección y sentido



Al conjunto de todos los vectores que tienen igual módulo, dirección y sentido se le llama *vector libre* y es con los que vamos a trabajar pues nos permite poner el vector donde queramos siempre que conservemos módulo, dirección y sentido. Así ya cuando hablamos del vector $\overrightarrow{AB}$ nos referimos a un vector libre y que normalmente se va a representar por $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

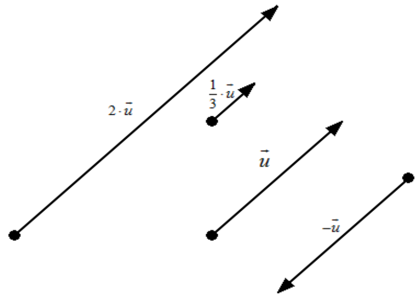
Definición: Se llama V_2 al conjunto de todos los vectores libres del plano

Con los vectores podemos hacer las siguientes operaciones:

Producto de un vector por un número

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$, es el vector $k\cdot\vec{u}$, proporcional a $\vec{u}$ que tiene:

- Su módulo es igual al producto del valor absoluto de k por el módulo de $\vec{u}$: $|k\cdot\vec{u}|=|k|\cdot|\vec{u}|$
- Dirección la misma que $\vec{u}$
- Sentido el mismo si $k>0$ y opuesto si $k<0$

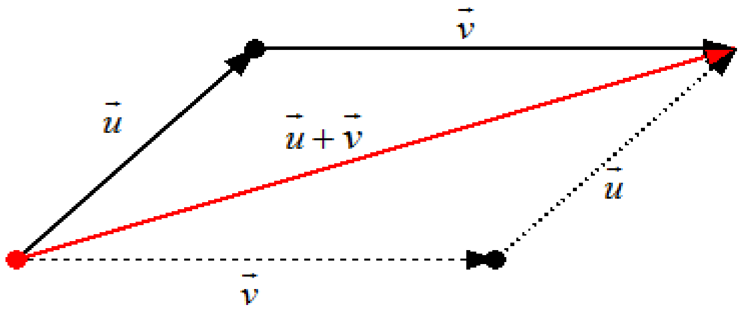


El producto $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$, es decir, es igual al vector nulo o cero, que es aquel cuyos extremos coinciden y no tiene dirección

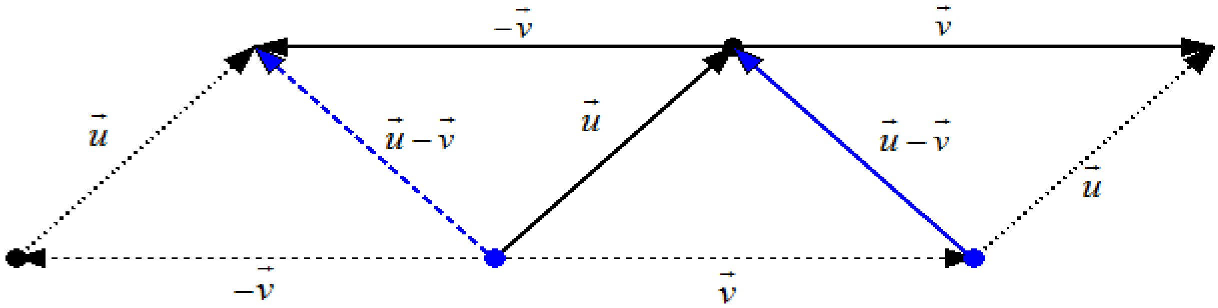
El vector $-1\cdot\vec{u}=-\vec{u}$ se llama opuesto de $\vec{u}$

Suma de vectores

Para sumar dos vectores $\vec{u}+\vec{v}$ en el plano de manera geométrica se aplica la Regla del Paralelogramo que es como vemos en la figura siguiente.



Para restar dos vectores $\vec{u}-\vec{v}$, tenemos en cuenta que $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$ y se hace de manera similar al anterior quedando:



Propiedad: Con estas operaciones de suma y producto, decimos que V_2 presenta una estructura de ESPACIO VECTORIAL

2. COORDENADAS DE UN VECTOR. OPERACIONES

Definición: Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y dos números reales a y b, al vector $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$ se llama combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Por ejemplo, $3\cdot\vec{u}+5\cdot\vec{v}$, $-5\cdot\vec{u}-6\cdot\vec{v}$, $0\cdot\vec{u}+4\cdot\vec{v}=4\cdot\vec{v}$, son combinaciones lineales de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por supuesto, también se pueden hacer combinaciones lineales de más de dos vectores.

Las combinaciones lineales nos van a permitir poner un vector como combinación lineal de otros vectores, con lo cual un vector lo podemos obtener a partir de otros.

Definición: Un conjunto de vectores $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\right\}$ se dice que es *linealmente independiente* entre sí, si no existe ninguna combinación lineal de ellos a partir de la cual se pueda obtener el vector nulo, $\vec{0}$. Es lo mismo a decir que ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes.

En caso contrario, se llaman *linealmente dependientes*.

Propiedad: En V_2 como máximo puede haber 2 vectores linealmente independientes, es decir, todo conjunto de 3 o más vectores son linealmente dependientes entre sí.

Propiedad (IMPORTANTE): Dos vectores son linealmente independientes si y solo sí no son proporcionales (no tienen la misma dirección)

Definición: Un conjunto de vectores $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\right\}$ se dice que es un *sistema generador* si cualquier otro vector del espacio vectorial se puede poner como combinación lineal de ellos.

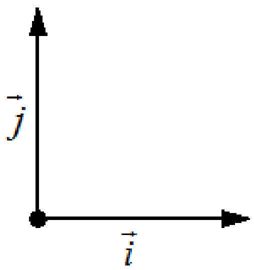
Definición: Un conjunto de vectores $B = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\right\}$ se dice que es una *base* si es un sistema generador y son linealmente independientes entre sí.

Propiedad: Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos. A ese número se le llama **DIMENSIÓN** del espacio vectorial.

Propiedad: En V_2 todas las bases tienen dos vectores. Cualquier base es de la forma $B = \left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\right\}$ donde $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ no son proporcionales (tiene distinta dirección). Por tanto, la dimensión de V_2 es 2.

Por eficiencia y comodidad vamos a tomar para trabajar la conocida como BASE CANÓNICA que es:

$B_c = \left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ que son los vectores directores unitarios de los ejes coordenados.



A las bases que tienen los vectores unitarios (módulo 1) y son ortogonales (perpendiculares) entre si se les llama **ortonormales**. La base canónica es ortonormal pues: $\begin{cases} \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \end{cases}$

Propiedad: Dada una base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ de V_2, cualquier vector $\vec{v}\in V_2$, se puede poner de forma única como combinación lineal de los vectores de la base, es decir:

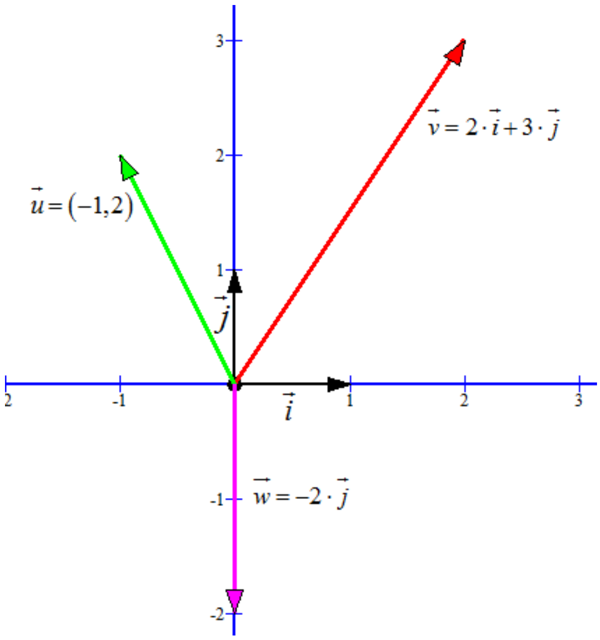
$$\forall \vec{v}\in V_2 \text{ existen unos únicos } a,b\in\mathbb{R} \text{ tales que } \vec{v}=a\cdot\vec{u_1}+b\cdot\vec{u_2}$$

Así escribiremos $\vec{v}=(a,b)$, que es lo que se llama COORDENADAS (o componentes) del vector $\vec{v}$ respecto de la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$

Nosotros, como hemos dicho anteriormente, sólo usaremos la base canónica $B_c=\{\vec{i},\vec{j}\}$, que nos sirve para representar los vectores en un sistema de ejes perpendiculares (abscisas y ordenadas).

Cuando escribamos $\vec{v}=(a,b)$, estaremos diciendo que $\vec{v}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}=(a,b)$ respecto de la base canónica $B_c=\{\vec{i},\vec{j}\}$

Ejemplo: Representa gráficamente los vectores $\vec{v}=2\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}$, $\vec{u}=(-1,2)$, $\vec{w}=-2\cdot\vec{j}$



Operaciones con coordenadas

Una vez tenemos las coordenadas las operaciones de suma, resta y producto por un número escalar son muy fáciles de realizar.

- Suma y resta de vectores

Dado los vectores $\vec{u}=(a,b)$ y $\vec{v}=(c,d)$, entonces:

$$\vec{u}+\vec{v}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$\vec{u}-\vec{v}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$$

- Producto de un escalar por un vector

Dado un nº $k \in \mathbb{R}$ y un vector $\vec{u} = (a,b)$, entonces:

$$k \cdot \vec{u} = k \cdot (a,b) = (k \cdot a, k \cdot b)$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u} = (-1,2)$ y $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$, calcula el vector $\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} - \frac{1}{3} \cdot \vec{v}$

Ponemos el vector $\vec{v} = 2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} = (2,3)$ y ahora sólo nos queda sustituir y operar:

$$\vec{w} = 2 \cdot \vec{u} - \frac{1}{3} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-1,2) - \frac{1}{3} \cdot (2,3) \Rightarrow \vec{w} = (-2,4) - \left(\frac{2}{3}, 1\right) = \left(-2 - \frac{2}{3}, 4 - 1\right) \Rightarrow \vec{w} = \left(-\frac{8}{3}, 3\right)$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u} = (-1,2)$ y $\vec{v} = (4,3)$, calcula el vector $\vec{x}$, que verifica $3 \cdot \vec{u} - \vec{v} + 5 \cdot \vec{x} = \vec{j}$

Ponemos todos los vectores con sus coordenadas y el que queremos calcular como incógnitas $\vec{x} = (a,b)$

$$3 \cdot \vec{u} - \vec{v} + 5 \cdot \vec{x} = \vec{j} \Leftrightarrow 3 \cdot (-1,2) - (4,3) + 5 \cdot (a,b) = (0,1) \Leftrightarrow (-3,6) - (4,3) + (5a,5b) = (0,1) \Leftrightarrow$$

$$(5a,5b) = (0,1) \Leftrightarrow (5a,5b) = (0,1) - (-7,3) \Leftrightarrow (5a,5b) = (7,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{5} \\ 5b = -2 \Leftrightarrow b = \frac{-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{x} = \left(\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}\right)$$

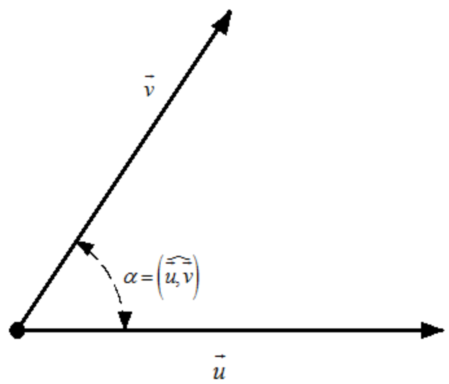
3. PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Definición: Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se llama producto escalar de los dos vectores, se nota por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, al número real que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos, es decir:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

El producto escalar es un número, de ahí su nombre.

Da igual tomar el ángulo de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ o de $\vec{v}$ a $\vec{u}$, pues como sabemos $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$



Propiedades del producto escalar

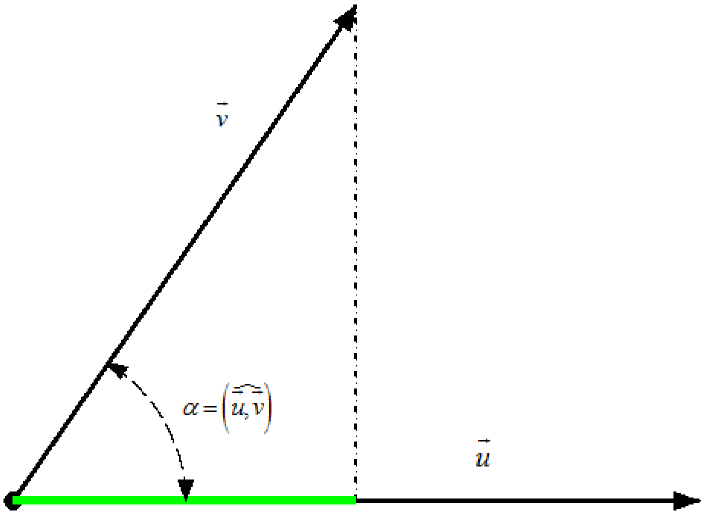
1. El producto escalar del vector nulo, $\vec{0}$, por cualquier otro vector es cero

$$\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$$

2. Dos vectores no nulos son ortogonales (perpendiculares) si sólo si su producto escalar es 0

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

3. El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Si nos fijamos en la figura vemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es el producto $|\vec{v}|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$



$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{proy_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)}{|\vec{v}|}\Rightarrow proy_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)=|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Por tanto concluimos que: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=|\vec{u}|\cdot proy_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)$

4. Propiedad conmutativa $\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

5. Propiedad asociativa $\quad a\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=(a\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(a\cdot\vec{v})$ para cualquier $a\in\mathbb{R}$

6. Propiedad distributiva $\quad \vec{w}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}\cdot\vec{u}+\vec{w}\cdot\vec{v}$

7. En la base ortonormal canónica $B_c=\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$, se tiene que: $\begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{i}=1 & \vec{j}\cdot\vec{j}=1\\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0 & \vec{j}\cdot\vec{i}=0\end{cases}$

8. $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$, o bien, $|\vec{u}|=+\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

9. $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

<u>*Ejemplo*</u>: Dados dos vectores y sabemos que: $|\vec{u}|=8,\ |\vec{v}|=3$ y el ángulo que forman es de 120°, calcula su producto escalar y la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

Calculamos primero el producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=8\cdot3\cdot\cos120^{\circ}=24\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=-12$

Y ahora la proyección: $proy_{\vec{u}}\left(\vec{v}\right)=|\vec{v}|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=3\cdot\left(\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{-3}{2}$

<u>*Ejemplo*</u>: Sabemos que $|\vec{u}|=3$, calcula $\vec{u}\cdot\vec{u}$

Como sabemos $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos0^{\circ}=|\vec{u}|^2=9$

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCO ESCALAR

Dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, los cuales vienen dados por sus coordenadas;

$\vec{u}=(a,b)=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}$ y $\vec{v}=(c,d)=c\cdot\vec{i}+d\cdot\vec{j}$ respecto a la base canónica $B_c=\{\vec{i},\vec{j}\}$. esta base como sabemos es ortonormal (sus vectores son unitarios y ortogonales entre sí), es decir: $\begin{cases}\vec{i}\cdot\vec{i}=1 & \vec{j}\cdot\vec{j}=1\\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0 & \vec{j}\cdot\vec{i}=0\end{cases}$

Desarrollamos el producto escalar:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a,b)\cdot(c,d)=\left(a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(c\cdot\vec{i}+d\cdot\vec{j}\right)=(a\cdot c)\cdot\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+(a\cdot d)\cdot\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+(b\cdot c)\cdot\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)+(b\cdot d)\cdot\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)\Rightarrow$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a\cdot c)\cdot 1+(a\cdot d)\cdot 0+(b\cdot c)\cdot 0+(b\cdot d)\cdot 1\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=a\cdot c+b\cdot d}$$

MÓDULO DE UN VECTOR EN FUNCIÓN DE SUS COORDENADAS

Dado el vector $\vec{u}=(a,b)$, sabemos que $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos 0^{\circ}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{u}=\left|\vec{u}\right|^2\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

Teniendo en cuenta la expresión del punto anterior,

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=\sqrt{(a,b)\cdot(a,b)}\Rightarrow\boxed{\left|\vec{u}\right|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

COSENO DEL ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Dados dos vectores, $\vec{u}=(a,b)$ y $\vec{v}=(c,d)$ tenemos que por la definición de producto escalar:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$. Ahora sustituimos por sus expresiones analíticas:

$$\boxed{\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}}$$

<u>Ejemplo</u>: Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(-2,1)$, vamos a calcular:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot(-2)+4\cdot 1\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

b) $\begin{cases}\left|\vec{u}\right|=\sqrt{3^2+4^2}\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=5\\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=\sqrt{5}\end{cases}$

c) $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{-2}{5\cdot\sqrt{5}}$. Si operamos con la calculadora, resulta $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\arccos\dfrac{-2}{5\cdot\sqrt{5}}\Rightarrow\left(\vec{u},\vec{v}\right)=100^{\circ}18'17.4''$

4. SISTEMA DE REFERENCIA EN EL PLANO. COORDENADAS DE UN PUNTO

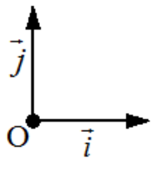
Ya una vez estudiados los vectores en el plano, pasamos a estudiar los puntos del plano. Para ello necesitamos lo que se conoce como un sistema de referencia.

__Definición__: Un sistema de referencia en el plano consiste en el conjunto $\Re = \left\{ O,\ \vec{u}, \vec{v} \right\}$ formado por:

- Un punto fijo, O , llamado origen
- Dos vectores , $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que forman una base

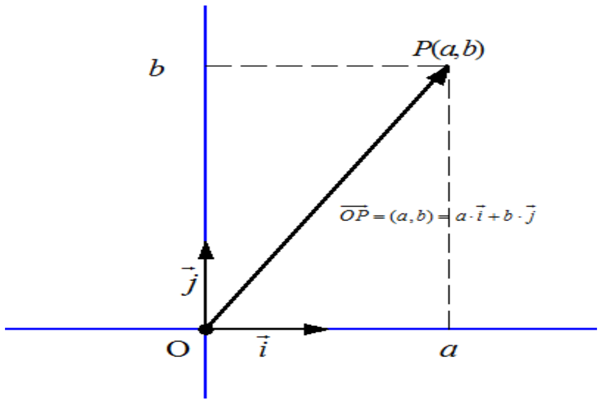
Nosotros vamos a considerar el sistema de referencia canónico, que es el que tiene por vectores los de la base canónica,

$\Re_c = \left\{ O,\ \vec{i}, \vec{j} \right\}$



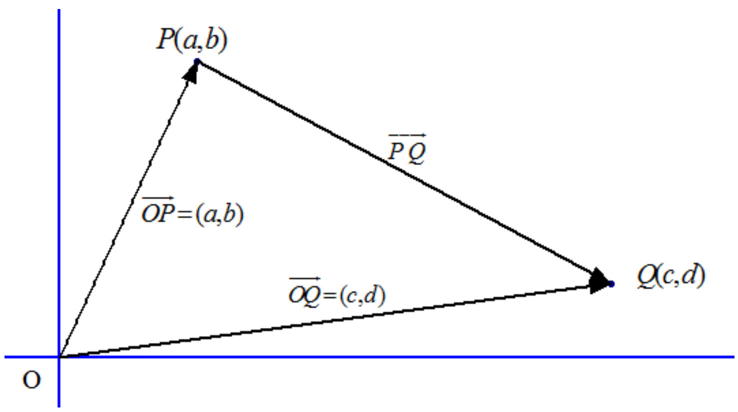
Si tomamos un punto P cualquiera del plano, le podemos asociar el vector $\overrightarrow{OP}$, que se llama *__vector de posición__* de P . Este vector de posición $\overrightarrow{OP}$ tiene unas coordenadas respecto de la base del sistema de referencia. A dichas coordenadas se les llama también coordenadas del punto P

Así diremos que el punto P tiene por coordenadas (a,b) y lo notaremos como $P(a,b)$ si y sólo si su vector de posición es $\overrightarrow{OP} = (a,b)$



__Coordenadas del vector que une dos puntos__

Consideremos dos puntos $P(a,b)$ y $Q(c,d)$. Como sabemos estos vectores tienen sus dos vectores de posición: $\overrightarrow{OP} = (a,b)$ y $\overrightarrow{OQ} = (c,d)$. Nos preguntamos qué coordenadas tiene el vector $\overrightarrow{PQ}$. Si nos fijamos en la imagen siguiente:

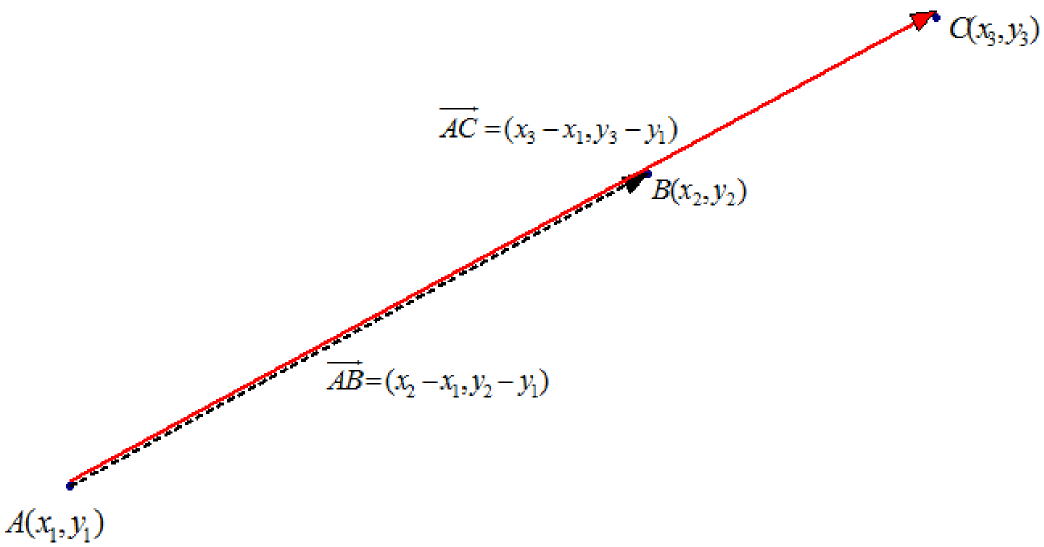


Vemos fácilmente por la regla del paralelogramo que: $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(c,d)-(a,b)\Rightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{PQ}=(c-a,d-b)}$$

Condición para que tres puntos esté, alineados

Consideremos tres puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ y $C(x_3,y_3)$ que estén alineados como en la figura:



Vemos claramente que los vectores $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ y $\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1)$ han de ser linealmente dependientes, es decir, <u>proporcionales</u>: $\overrightarrow{AB}=\lambda\cdot\overrightarrow{AC}\Rightarrow(x_2-x_1,y_2-y_1)=\lambda\cdot(x_3-x_1,y_3-y_1)\Rightarrow$

$$\lambda\cdot(x_3-x_1,y_3-y_1)\begin{cases}x_2-x_1=\lambda\cdot(x_3-x_1)\\ y_2-y_1=\lambda\cdot(y_3-y_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\\ \lambda=\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_1}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}}$$

De forma similar podíamos haber actuado con los vectores $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ y $\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,y_3-y_2)$, y la condición que nos quedaría es: $\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{y_3-y_2}$. De todas formas, estas fórmulas no son necesarias aprenderlas, basta aplicar en el caso concreto la condición de dependencia lineal (proporcionalidad).

<u>Ejemplo</u>: Calcula las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ sabiendo que $A(-3,4)$ y $B(2,0)$

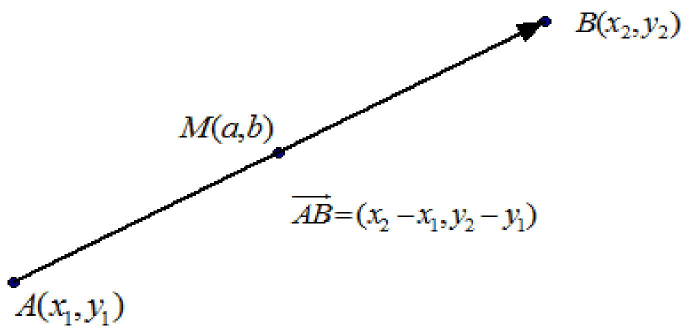
Fácilmente tenemos que $\overrightarrow{AB}=(2-(-3),0-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(5,-4)$

<u>Ejemplo</u>: Averigua si los puntos $P(7,11)$, $Q(4,-3)$ y $R(10,25)$ están alineados

Para que estén alineados ha de ocurrir, por ejemplo, que los vectores $\overrightarrow{PQ}=(4-7,-3-11)=(-3,-14)$ y $\overrightarrow{PR}=(10-7,25-11)=(3,14)$ sean proporcionales, es decir, $(-3,-14)=\lambda\cdot(3,14)$ para algún λ, lo cual ocurre para $\lambda=-1$, pues son vectores opuestos. O bien, $\dfrac{-3}{3}=\dfrac{-14}{14}$. Por tanto, son puntos alineados.

Punto medio de un segmento

Consideremos un segmento determinado por los puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$. Se trata de calcular las coordenadas del punto medio de dicho segmento. Notemos por $M(a,b)$ al punto medio, y observemos la figura siguiente.



Vemos la siguiente igualdad vectorial:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left(a-x_1,b-y_1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)\Rightarrow\text{(Desarrollamos e igualamos)}\begin{cases}a-x_1=\frac{1}{2}\cdot\left(x_2-x_1\right)\\ b-y_1=\frac{1}{2}\cdot\left(y_2-y_1\right)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a=x_1+\frac{1}{2}\cdot\left(x_2-x_1\right)\\ b=y_1+\frac{1}{2}\cdot\left(y_2-y_1\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{2\cdot x_1+x_2-x_1}{2}\\ b=\frac{2\cdot y_1+y_2-y_1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{x_1+x_2}{2}\\ b=\frac{y_1+y_2}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)}$$

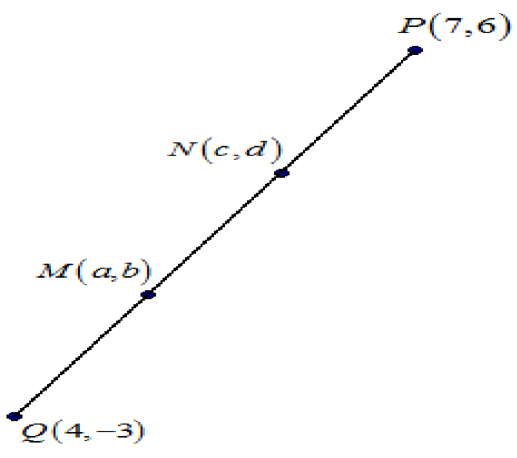
Las coordenadas del punto medio son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

Ejemplo: calcula las coordenadas del punto medio del segmento dado por los puntos $A(-3,4)$ y $B(2,0)$

Aplicando la fórmula $M\left(\frac{-3+2}{2},\frac{4+0}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{-1}{2},2\right)$

Ejemplo: Divide el segmento dado por los puntos $P(7,6)$ y $Q(4,-3)$ en tres partes iguales

Para resolver este ejercicio vamos a seguir un procedimiento similar a cómo calculamos el punto medio, estableciendo igualdades vectoriales. Para dividir un segmento en tres partes iguales necesitamos dos puntos $M(a,b)$ y $N(c,d)$ Nos apoyamos en el dibujo siguiente para establecer las igualdades vectoriales:



Tenemos que

$$\overrightarrow{QM}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{QP}\Rightarrow\left(a-4,b-(-3)\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(7-4,6-(-3)\right)\Rightarrow\text{(Desarrollamos e igualamos)}\begin{cases}a-4=\dfrac{1}{3}\cdot 3\\ b+3=\dfrac{1}{3}\cdot 9\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a=5\\ b=0\end{cases}\Rightarrow M\left(5,0\right)$$

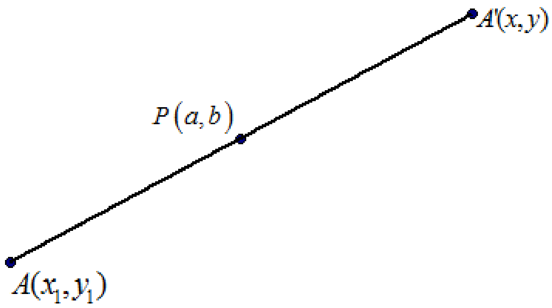
Ahora calculamos el otro punto, para ello podemos aplicar diferentes igualdades, $\overrightarrow{QN}=2\cdot\overrightarrow{QM}$ o $\overrightarrow{QN}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{QP}$ o $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QM}$. Vamos a usar la segunda de ellas:

$$\overrightarrow{QN}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{QP}\Rightarrow\left(c-4,d-(-3)\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(7-4,6-(-3)\right)\Rightarrow\text{(Desarrollamos e igualamos)}\begin{cases}c-4=\dfrac{2}{3}\cdot 3\\ d+3=\dfrac{2}{3}\cdot 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=6\\ b=3\end{cases}\Rightarrow N\left(6,3\right)$$

<u>*Simétrico de un punto respecto a otro dado*</u>

Este es un problema similar el del punto medio, pero donde tenemos que calcular uno de los extremos del segmento, que es el simétrico del otro extremo respecto del punto medio.

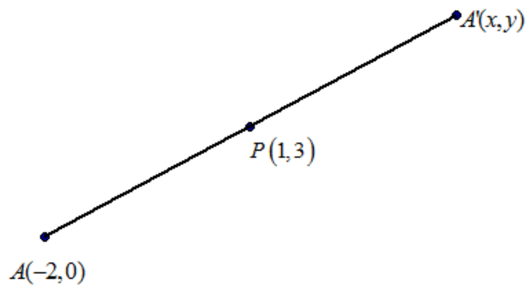
Dado el punto $A(x_1,y_1)$, se trata de calcular su simétrico respecto del punto $P\left(a,b\right)$. A ese punto lo llamamos $A'(x,y)$ según vemos en la figura



Simplemente aplicando que $P\left(a,b\right)$ es el punto medio o bien mediante igualdades vectoriales, podemos calcular $A'(x,y)$. Veámoslo mediante un ejemplo:

<u>*Ejemplo*</u>: Halla el simétrico del punto $A(-2,0)$ respecto del punto $P\left(1,3\right)$

Como vemos en la figura



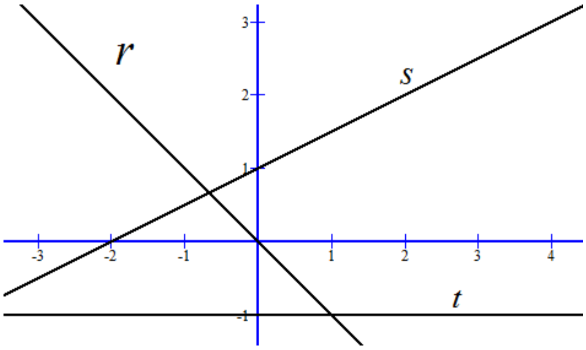
Podemos aplicar la fórmula del punto medio para calcular las coordenadas del simétrico $A'(x,y)$

$$P\left(\frac{-2+x}{2},\frac{0+y}{2}\right)=P(1,3)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-2+x}{2}=1\\ \dfrac{0+y}{2}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\ y=6\end{cases}\Rightarrow\boxed{A'(4,6)}$$

Si no recordamos la fórmula, también podíamos haber aplicado la igualdad vectorial $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA'}$ y operar. Es lo mismo.

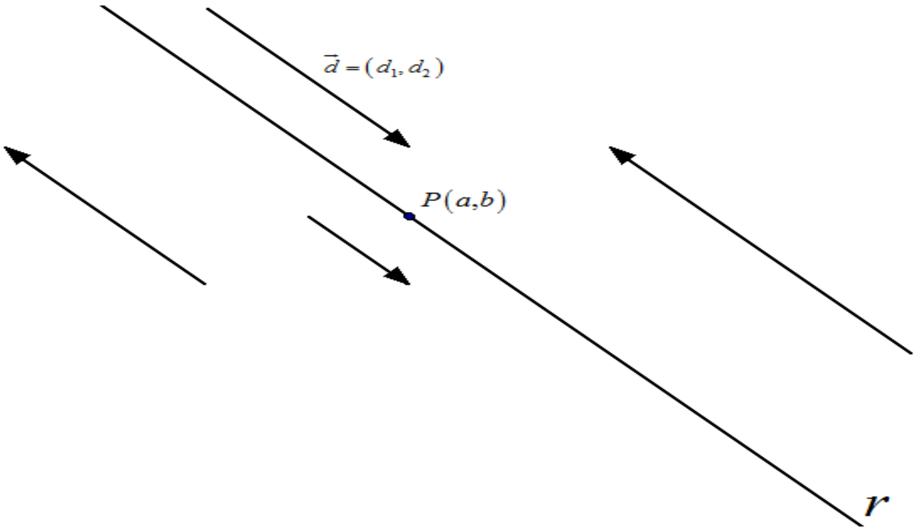
5. ECUACIONES DE LA RECTA

Como sabemos una recta es un conjunto de puntos alineados. Las rectas se va a notar por las letras r, s, t. En la figura vemos unos ejemplos.



Una recta r viene determinada por un punto por donde pase $P(a,b)$ y una dirección. La dirección nos la da un vector paralelo a la recta que llamaremos *vector director de la recta*. A este vector lo vamos a notar por $\vec{d}=(d_1,d_2)$.

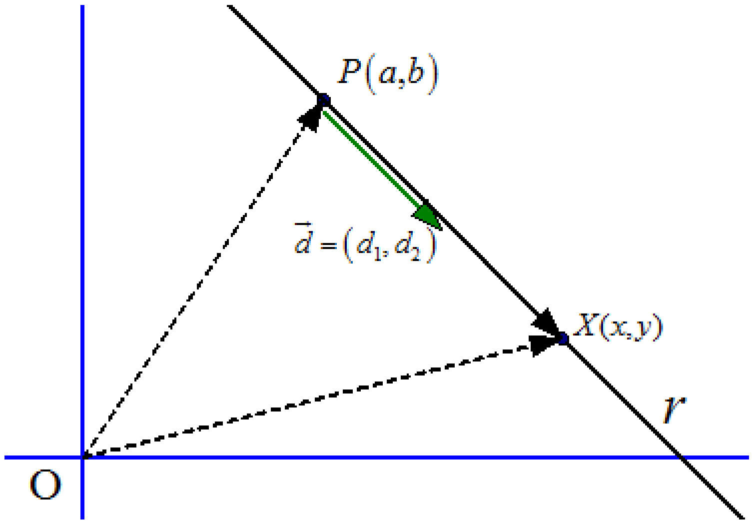
Una recta tiene infinitos vectores directores, todos ellos son proporcionales, como se observa en la figura siguiente.



Ecuación vectorial de la recta

Partamos por tanto de una recta r de la que conocemos que pasa por el punto $P(a,b)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{d}=(d_1,d_2)$ (normalmente elegiremos el vector director más cómodo para trabajar con él)

Consideremos un punto genérico de la recta: $X(x,y)$



Si observamos la figura vemos que: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX}$.(*)

Ahora bien, los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\vec{d}$ son linealmente dependientes (proporcionales), por tanto, existe un número real λ tal que $\overrightarrow{PX}=\lambda\cdot\vec{d}$. Si sustituimos en (*) nos queda:

$$\boxed{\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\vec{d}\ \text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Esta expresión se conoce como *Ecuación Vectorial de la recta*. Si le damos valores a λ nos van saliendo los distintos puntos de la recta r .

A partir de esta ecuación vamos a obtener todas las restantes expresiones de la recta en el plano, ya usando coordenadas.

NOTA: Escribiremos siempre $r\equiv\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\vec{d}\ \text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}$, que significa que la recta r viene determinada por esa ecuación.

Ecuaciones paramétricas de la recta

A partir de la ecuación vectorial $r\equiv\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\vec{d}\ \text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}$, sustituimos cada vector por sus coordenadas y nos queda:

$r\equiv(x,y)=(a,b)+\lambda\cdot(d_1,d_2)\ \text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow r\equiv(x,y)=(a+\lambda\cdot d_1,b+\lambda\cdot d_2)\ \text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow$ (igualamos coordenadas)

$$\boxed{r\equiv\begin{cases}x=a+\lambda\cdot d_1\\ y=b+\lambda\cdot d_2\end{cases}\text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Esta expresión se conoce como *Ecuaciones paramétricas de la recta* r

Ejemplo: Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(1,-5)$ y vector director $\vec{d}=\left(\frac{2}{3},-1\right)$.

Obtener 2 puntos de la recta diferentes a $P(1,-5)$

Aplicando directamente la expresión de las ecuaciones paramétricas tenemos que:

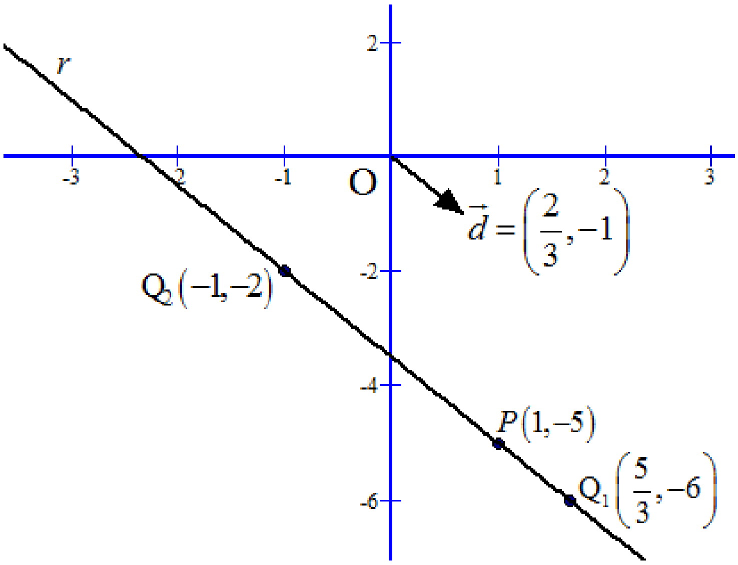
$$r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\cdot\dfrac{2}{3}\\ y=-5+\lambda\cdot(-1)\end{cases}\text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow\boxed{r\equiv\begin{cases}x=1+\dfrac{2}{3}\cdot\lambda\\ y=-5-\lambda\end{cases}\text{con}\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Para obtener los puntos de la recta basta dar valores a λ (para $\lambda = 0$) resulta el punto $P(1,-5)$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}\cdot 1 \\ y = -5 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -6 \end{cases} \Rightarrow Q_1\left(\frac{5}{3},-6\right)$

Para $\lambda = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}\cdot(-3) \\ y = -5 - (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow Q_2(-1,-2)$

Gráficamente lo podemos representar todo, y queda así:



NOTA IMPORTANTE: Podíamos haber usado como vector director cualquier otro proporcional al dado, por ejemplo el vector $\vec{u} = 3\cdot\vec{d} = 3\cdot\left(\frac{2}{3},-1\right) = (2,-3)$ y las ecuaciones paramétricas sería las diferentes $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\cdot\lambda \\ y = -5 - 3\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, pero representan a la misma recta. Como una recta tiene infinitos vectores directores, pues entonces tiene infinitas representaciones de sus ecuaciones paramétricas. Éstas que hemos puesto ahora son más cómodas de usar pues no tenemos denominadores. También podemos cambiar el punto por donde pasa si conocemos más de uno. Es decir, esta recta también tiene por ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\cdot\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Sea la recta que pasa por los puntos $P(a,b)$ y $Q(c,d)$. Nos falta conocer un vector director, pero eso es fácil, el vector $\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = (c-a, d-b)$ es uno de ellos. Así, sus ecuaciones paramétricas son:

$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = a + \lambda\cdot(c-a) \\ y = b + \lambda\cdot(d-b) \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$ tomando el punto $P(a,b)$ o

$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = c + \lambda\cdot(c-a) \\ y = d + \lambda\cdot(d-b) \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$ tomando el punto $Q(c,d)$

Ejemplo: Halla las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los punto $P(0,5)$ y $Q(3,3)$

El vector director es $\vec{d}=\overrightarrow{PQ}=(3-0,3-5)=(3,-2)$, por tanto, sus ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x=0+\lambda\cdot 3 \\ y=5+\lambda\cdot(-2) \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow r\equiv \begin{cases} x=3\cdot\lambda \\ y=5-2\cdot\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}$$

Ejemplo: Dada la recta $s\equiv\begin{cases} x=3+5t \\ y=7-2t \end{cases}$ con $\text{t}\in\mathbb{R}$, se pide:

a) Da 2 vectores directores de la recta

Un vector director es $\vec{d}=(5,-2)$ y otro vector director poder ser cualquiera proporcional como $\vec{u}=2\cdot\vec{d}=(10,-4)$

b) Decir si los puntos $P(-10,4)$ y $Q(-7,11)$ pertenecen a la recta s

Veamos si $P(-10,4)\in s$. Para ello al sustituir en las ecuaciones paramétricas ha de salir el mismo t pues se han de verificar las dos ecuaciones: $\begin{cases} -10=3+5t \\ 4=7-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{13}{5} \\ t=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Como son distintos $P(-10,4)\notin s$

Ahora lo mismo con $Q(-7,11)\Rightarrow\begin{cases} -7=3+5t \\ 11=7-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow$ Como son iguales $Q(-7,11)\in s$

c) Halla el valor de m para que el punto $R(-2,m)$ pertenezca a s

Imponemos que $R(-2,m)\in s\Rightarrow\begin{cases} -2=3+5t \\ m=7-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=\dfrac{m-7}{-2} \end{cases} \Rightarrow$ Igualamos $\dfrac{m-7}{-2}=-1\Rightarrow m=9$

Ecuación continua de la recta

Partamos por tanto de una recta r de la que conocemos que pasa por el punto $P(a,b)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{d}=(d_1,d_2)$. De esto obtenemos las ecuaciones paramétricas: $r\equiv\begin{cases} x=a+\lambda\cdot d_1 \\ y=b+\lambda\cdot d_2 \end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$

Vamos a despejar λ de las dos ecuaciones e igualamos:

$\begin{cases} x-a=\lambda\cdot d_1 \\ y-b=\lambda\cdot d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-a}{d_1}=\lambda \\ \dfrac{y-b}{d_2}=\lambda \end{cases} \Rightarrow$ Igualamos $\boxed{r\equiv\dfrac{x-a}{d_1}=\dfrac{y-b}{d_2}}$ que es la conocida como *Ecuación continua de la recta*

Ejemplo: Obtén la ecuación general o implícita de la recta que pasa por el punto $P(1,-5)$ y vector director $\vec{d}=\left(\dfrac{2}{3},-1\right)$

Fácilmente obtenemos que: $r\equiv\dfrac{x-1}{2/3}=\dfrac{y+5}{-1}$

Hubiese sido mucho más adecuado usar el vector director $\vec{u}=3\cdot\vec{d}=3\cdot\left(\frac{2}{3},-1\right)=(2,-3)$ pues no tendríamos fracciones y nos quedaría $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-3}$

Ecuación general o implícita de una recta

Este tipo de ecuación de una recta se obtiene al llegar a una expresión del tipo $\boxed{r\equiv A\cdot x+B\cdot y+C=0}$. Para llegar a esta expresión se puede desde las paramétricas, despejando λ de una de las paramétricas, sustituyendo en la otra y operando. O bien, desde la continua, operando. Veamos un ejemplo para ver cómo se hace.

Ejemplo: Obtén la ecuación general o implícita de la recta que pasa por el punto $P(1,-5)$ y vector director $\vec{d}=\left(\frac{2}{3},-1\right)$ de dos formas distintas.

a) En primer lugar, consideremos otro vector director por comodidad con los cálculos,

$\vec{u}=3\cdot\vec{d}=3\cdot\left(\frac{2}{3},-1\right)=(2,-3)$

Ya obtenemos las paramétricas $r\equiv\begin{cases}x=1+2\cdot\lambda\\ y=-5-3\lambda\end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Despejamos el parámetro λ de la primera, por ejemplo, y sustituimos en la segunda: $\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\lambda\\ y=-5-3\lambda\end{cases}\Rightarrow y=-5-3\cdot\frac{x-1}{2}\Rightarrow\frac{2y}{2}=\frac{-10}{2}-\frac{3x-3}{2}\Rightarrow 2y=-10-3x+3\Rightarrow$

$\boxed{r\equiv 3x+2y+7=0}$ que es la ecuación general de esta recta

b) De esta forma, partimos de la ecuación continua y operamos

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{-3}\Rightarrow -3\cdot(x-1)=2\cdot(y+5)\Rightarrow -3x+3=2y+10\Rightarrow\boxed{r\equiv -3x-2y-7=0}$ que es la misma a la anterior cambiada de signo. Esta forma me parece más rápida.

Propiedad: (IMPORTANTE) Dada una recta por su ecuación implícita $r\equiv A\cdot x+B\cdot y+C=0$, tenemos que:

a) El vector $\vec{n}=(A,B)$ es un vector perpendicular a la recta r. A este vector se le llama vector normal de la recta r

b) E l vector $\vec{d}=(-B,A)$ es un vector director de la recta r

Ejemplo: Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta $r\equiv 5x-3y+8=0$

Vamos a hacerlo de dos formas:

Primera forma: Un vector director lo obtenemos por la propiedad: $\vec{d}=(-(-3),5)=(3,5)$ y ahora nos falta obtener un punto. Damos un valor a una de las variables y sustituyendo en la ecuación obtenemos la otra, por ejemplo, para $x=0$, tenemos que: $5\cdot 0-3y+8=0\Rightarrow -3y+8=0\Rightarrow y=\frac{8}{3}$. Un punto por donde pasa es $P\left(0,\frac{8}{3}\right)$

Por tanto, la recta en paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = \dfrac{8}{3} + 5t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$

<u>Segunda forma</u>: Hacemos una de las variables tomar el parámetro, por ejemplo, $y = t$, sustituimos y despejamos la otra variable:

$$5x - 3t + 8 = 0 \Rightarrow 5x = -8 + 3t \Rightarrow x = \frac{-8+3t}{5} \Rightarrow x = \frac{-8}{5} + \frac{3}{5}\cdot t$$

Las ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{-8}{5} + \dfrac{3}{5}\cdot t \\ y = t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ que son diferentes a la primera forma pero son la misma recta

<u>Ejemplo</u>: Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(0,-4)$ y tiene por vector normal $\vec{n} = (2,-3)$

Como ese es el vector normal, tenemos que $A = 2$ y $B = -3 \Rightarrow r \equiv 2x - 3y + C = 0$

Como $P(0,-4) \in r \Rightarrow 2\cdot 0 - 3\cdot(-4) + C = 0 \Rightarrow C = -12$

Así, la recta pedida es $r \equiv 2x - 3y - 12 = 0$

<u>Ecuación explícita de una recta</u>

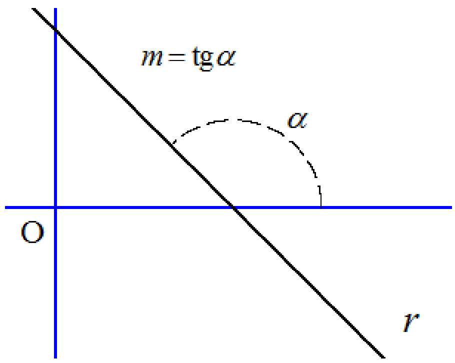
Se obtiene de despeja la variable y de la ecuación implícita de la recta, resultando una expresión de la forma:

$\boxed{r \equiv y = m\cdot x + n}$ *<u>Ecuación explícita de la recta</u>*

A m se le llama <u>pendiente de la recta</u>

A n se le llama <u>ordenada en el origen de la recta</u>

La pendiente m de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas positivo, es decir, $m = \text{tg}\,\alpha$



<u>Propiedad</u>: Si una recta tiene por vector director $\vec{d} = (d_1, d_2)$, entonces la pendiente es $m = \dfrac{d_2}{d_1}$

<u>Propiedad</u>: Dada una recta en forma explícita $r \equiv y = m\cdot x + n$, se tiene que:

- Un vector director es $\vec{d} = (1, m)$ y un vector normal (perpendicular) es $\vec{n} = (m, -1)$.
- El punto $P(0, n) \in r$

Ejemplo: Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(0,-2)$ y $B(2,2)$

Calculamos el vector director $\overrightarrow{AB}=(2,4)$, con esto podemos conocer la pendiente $m=\frac{4}{2}=2$

Así, la ecuación explícita de la recta es de la forma $r\equiv y=2\cdot x+n$. Para calcular n, imponemos que la recta pasa por $B(2,2)$ (o por $A(0,-2)$). Usamos $B\Rightarrow 2=2\cdot 2+n\Rightarrow n=-2$.

Por tanto la recta pedida es: $r\equiv y=2\cdot x-2$

Ejemplo: Pasar la recta $r\equiv -2x+3y+9=0$ a forma explícita.

Simplemente despejamos la variable $y\Rightarrow 3y=2\cdot x-9\Rightarrow y=\frac{2\cdot x-9}{3}\Rightarrow r\equiv y=\frac{2\cdot x}{3}-\frac{9}{3}\Rightarrow \boxed{r\equiv y=\frac{2}{3}x-3}$

Ecuación punto-pendiente de una recta

Si de una recta r conocemos un punto por donde pasa $P(x_0,y_0)$ y tiene por pendiente m, entonces se puede expresar como:

$$\boxed{r\equiv y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$$

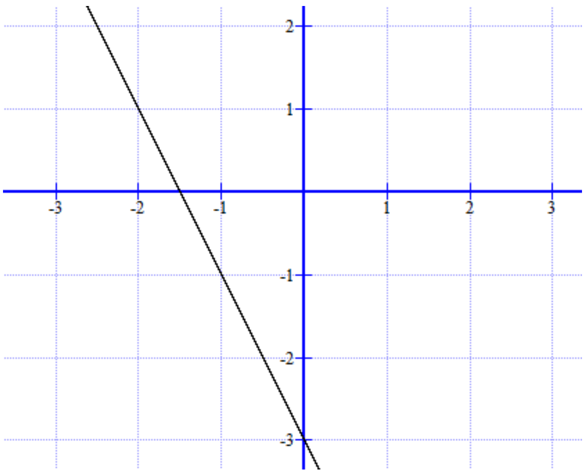
Que se conoce como ecuación punto-pendiente.

Ejemplo: Halla la ecuación punto pendiente de la recta que pasa por $A(0,-2)$ y tiene por vector normal $\vec{n}=(-2,1)$

El vector director será un vector ortogonal a $\vec{n}=(-2,1)$, que es: $\vec{d}=(1,2)$, y por tanto la pendiente es $m=\frac{2}{1}=2$

Así, la ecuación punto pendiente es: $r\equiv y-(-2)=2\cdot(x-0)\Rightarrow r\equiv y+2=2\cdot x$

Ejemplo: Calcula todas las ecuaciones de la recta representada en la siguiente figura:



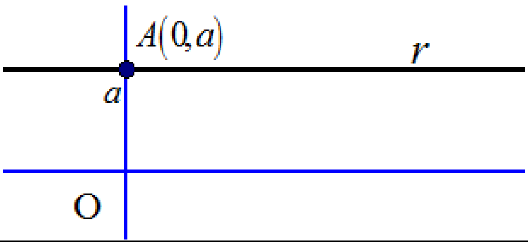
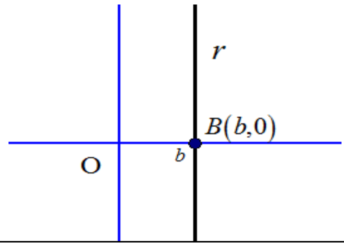
Observando la figura podemos tomar como puntos por donde pasa la recta $P(-1,-1)$ y $Q(0,-3)$

Con esto tenemos un vector director $\vec{d}=(1,-2)$

Ecuaciones Paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$	Ecuación continua $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2}$
Ecuación implícita El vector normal es $\vec{n} = (2,1)$, por tanto la ecuación es de la forma: $2x + y + C = 0$. Imponemos que pasa por $Q(0,-3) \Rightarrow 2 \cdot 0 + (-3) + C = 0 \Rightarrow C = 3$ Así $r \equiv 2x + y + 3 = 0$	Ecuación explícita Despejamos y: $r \equiv y = -2x - 3$
Ecuación punto-pendiente La pendiente es: $m = \frac{-2}{1} = -2$ y tomando $P(-1,-1)$ $r \equiv y + 1 = -2 \cdot (x+1)$	

RECTAS ESPECIALES: RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

En estas rectas se usan las ecuaciones paramétricas, la implícita o explícita

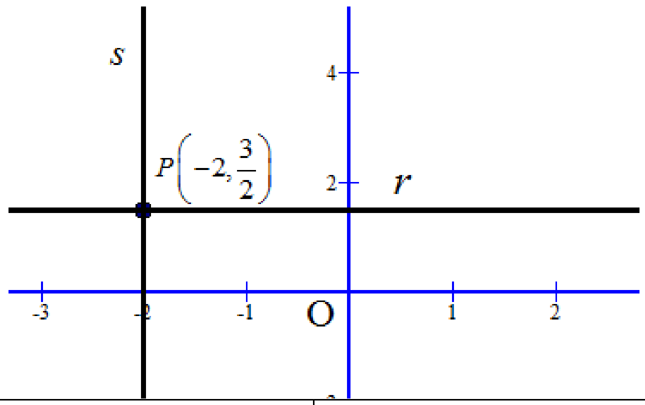
HORIZONTALES	**VERTICALES**
Vector director $\vec{i} = (1,0)$ Pasan por el punto $A(0,a)$	Vector director $\vec{j} = (0,1)$ Pasan por el punto $B(b,0)$
	
Ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a \end{cases}$	Ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = b \\ y = \lambda \end{cases}$
Ecuación implícita $r \equiv y - a = 0$	Ecuación implícita $r \equiv x - b = 0$
Ecuación explícita $r \equiv y = a$	Ecuación explícita $r \equiv x = b$

Como casos particulares tenemos los dos ejes de coordenadas:

Eje OX (eje de abscisas)	**Eje OY (eje de ordenadas)**
$r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=0\end{cases}$ $\qquad r\equiv y=0$	$r\equiv\begin{cases}x=0\\ y=\lambda\end{cases}$ $\qquad r\equiv x=0$

Ejemplo: Calcula las ecuaciones de las rectas horizontales y verticales que pasan por el punto $P\left(-2,\frac{3}{2}\right)$

Si representamos, las rectas son:

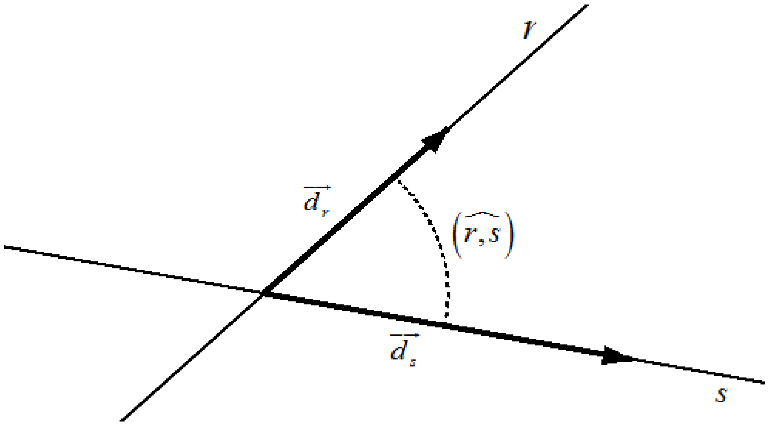


HORIZONTAL	VERTICAL
Ecuaciones paramétricas $r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=\frac{3}{2}\end{cases}$	Ecuaciones paramétricas $r\equiv\begin{cases}x=-2\\ y=\lambda\end{cases}$
Ecuación implícita $r\equiv y-\frac{3}{2}=0$	Ecuación implícita $r\equiv x-(-2)=0\Rightarrow r\equiv x+2=0$
Ecuación explícita $r\equiv y=\frac{3}{2}$	Ecuación explícita $r\equiv x=-2$

6. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS. POSICIONES RELATIVAS

Ángulo entre dos rectas

Sean dos rectas r y s con vectores directores $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$. Y vemos en la figura el ángulo que forman.



Se llama ángulo entre dos rectas al menor de los ángulos que forman. Lo podemos obtener a partir de los vectores directores de las rectas mediante la siguiente fórmula:

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{d_r}\cdot\overrightarrow{d_s}\right|}{\left|\overrightarrow{d_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{d_s}\right|}$$

<u>*NOTA*</u>: En el numerador se toma valor absoluto del producto escalar para que sea positivo el coseno del ángulo y de esa forma salga un ángulo menor o igual a 90°

<u>*Ejemplo*</u>: Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=-1-2\lambda\end{cases}$ con $\lambda\in\mathbb{R}$ y $r\equiv x-3y+2=0$, calcula el ángulo que forman.

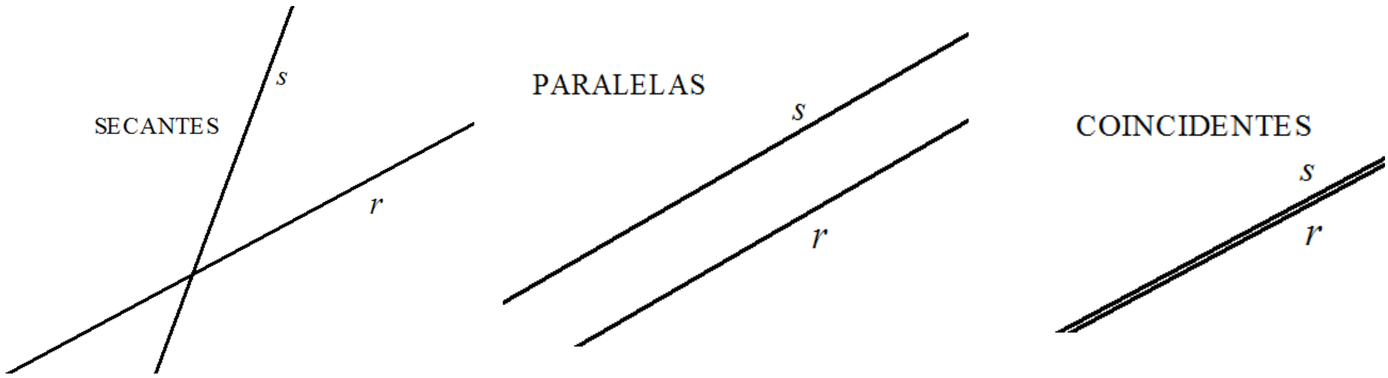
El vector director de r es $\overrightarrow{d_r}=(1,-2)$ y el vector director de es $\overrightarrow{d_s}=(-B,A)=(3,1)$. Aplicamos la fórmula:

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{\left|(1,-2)\cdot(3,1)\right|}{\left|(1,-2)\right|\cdot\left|(3,1)\right|}=\frac{|3-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}\Rightarrow\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\Rightarrow\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{1}{5\sqrt{2}}\Rightarrow$$

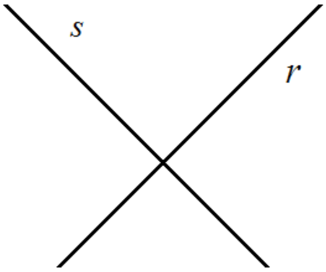
$$\left(\widehat{r,s}\right)=\arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\widehat{r,s}\right)=81^{\circ}52'11.63''$$

<u>*Posiciones relativas de dos rectas*</u>

Dos rectas en el plano pueden tener las siguientes posiciones entre ellas, conocidas como posiciones relativas



Y hay un caso especial de rectas secantes que es cuando son perpendiculares entre sí.



Veamos cómo estudiar analíticamente las posiciones relativas. Todo va a depender de los datos o ecuaciones que nos den u obtengamos:

Primera forma:

Conocemos de cada recta un punto por donde pasa y sus vectores directores:

$$r \equiv \begin{cases} P(a,b) \in r \\ \overrightarrow{d_r} = (d_1, d_2) \text{ es su vector director} \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} Q(c,d) \in s \\ \overrightarrow{d_s} = (d_3, d_4) \text{ es su vector director} \end{cases}$$

Caso 1: $\overrightarrow{d_r} \parallel \overrightarrow{d_s}$, es decir, los vectores directores son proporcionales $\frac{d_1}{d_3} = \frac{d_2}{d_4}$, entonces son rectas paralelas o coincidentes.

- Si el vector $\overrightarrow{PQ}$ no es proporcional a $\overrightarrow{d_r}$ (o a $\overrightarrow{d_s}$, da igual), entonces son paralelas y distintas.
- Si el vector $\overrightarrow{PQ}$ es proporcional a $\overrightarrow{d_r}$ (o a $\overrightarrow{d_s}$, da igual), entonces son coincidentes.

Caso 2: $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$ no son proporcionales $\frac{d_1}{d_3} \neq \frac{d_2}{d_4}$, entonces son rectas secantes.

Si $\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0$, son vectores ortogonales, y por tanto, las rectas son perpendiculares además.

Segunda forma:

Cuando cada recta viene dada en forma implícita:

$r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad s \equiv A'x + B'y + C' = 0$

Caso 1: Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$, entonces son rectas coincidentes

Caso 2: Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$, entonces son rectas paralelas y distintas

Caso 3: Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, entonces son rectas secantes.

Si $A \cdot A' + B \cdot B' = 0$, son rectas perpendiculares

Ejemplo: Estudia la posición relativa de las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv y = 3x - 1$

1ª forma: Calculamos un punto y un vector director de cada una de las rectas:

De la primera, como está en paramétricas $r \equiv \begin{cases} P(1,2) \\ \vec{u} = (-1,0) \end{cases}$

De la segunda, que está en explícita, tenemos la pendiente $m = 3$, y por tanto un vector director es: $\vec{v} = (1,3)$, para calcular un punto, damos un valor a x, por ejemplo $x = 0$, y obtenemos $y = -1$. Así el punto es $Q(0,-1)$.

$$s \equiv \begin{cases} Q(0,-1) \\ \vec{v} = (1,3) \end{cases}$$

Se ve claramente que los vectores $\vec{u} = (-1,0)$ y $\vec{v} = (1,3)$ no son proporcionales, luego son secantes las rectas r y s

2ª forma: Pasamos las dos ecuaciones a general o implícita

Como $r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \end{cases}$, si nos fijamos la segunda variable no tiene parámetro, luego se trata de una recta vertical y su ecuación implícita es la segunda ecuación paramétrica $r \equiv y - 2 = 0$

De la recta $s \equiv y = 3x - 1$, lo llevamos todo a un miembro y nos queda: $s \equiv 3x - y - 1 = 0$

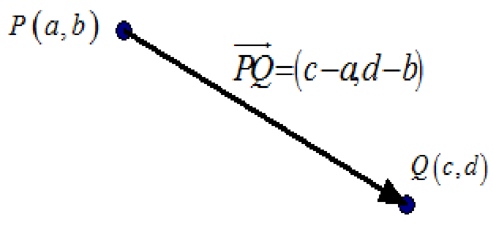
Calculamos $\frac{A}{A'}$ y $\frac{B}{B'} \Rightarrow \frac{0}{3} \neq \frac{1}{-1}$, las rectas son secantes

7. DISTANCIAS

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $P(a,b)$ y $Q(c,d)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ} = (c-a, d-b)$, es decir:

$$dist(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

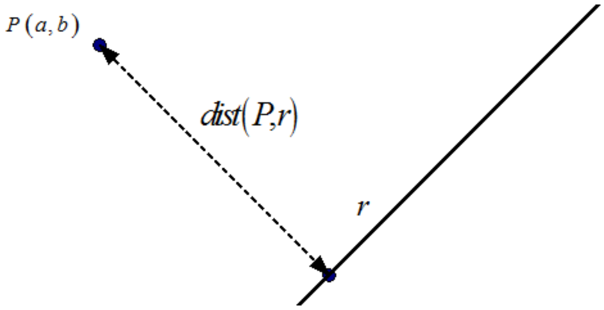


Ejemplo: Calcula la distancia entre los puntos $P(0,-2)$ y $Q(3,-1)$

Calculamos $\overrightarrow{PQ} = (3-0, -1+2) = (3,1) \Rightarrow dist(P,Q) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Distancia de un punto a una recta

Se trata de calcular la distancia de un punto $P(a,b)$ a una recta r, como se aprecia en la figura



Vamos a hacerlo de dos formas:

<u>1ª forma</u>: Aplicando una fórmula

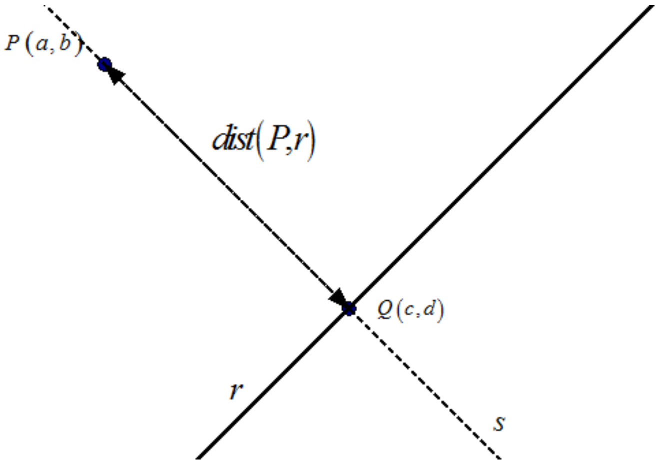
Supongamos que la recta la tenemos en implícita: $r \equiv Ax + By + C = 0$

La fórmula nos dice que: $\boxed{dist(P,r) = \dfrac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$

<u>2ª forma</u>: Aplicando un proceso razonado

El proceso consiste en lo siguiente:

- Calculamos la recta s que pasa por $P(a,b)$ y es perpendicular a r
- Calculamos el punto $Q(c,d)$ donde se cortan r y s: $Q = r \cap s$
- Ya tenemos que $dist(P,r) = dist(P,Q)$



<u>Ejemplo</u>: Calcula la distancia del punto $P(-2,1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$

<u>1ª forma</u>: Usando la fórmula. Primero pasamos la recta a forma general. Despejamos λ de la primera ecuación y sustituimos en la segunda ecuación paramétrica

$$\begin{cases} \lambda = 1 - x \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow y = 2 + 3 \cdot (1 - x) \Rightarrow y = 2 + 3 - 3x \Rightarrow r \equiv 3x + y - 5 = 0$$

Sustituimos en la fórmula: $dist(P,r) = \dfrac{|3 \cdot (-2) + 1 - 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} \Rightarrow dist(P,r) = \sqrt{10}$

<u>2ª forma</u>: Esta forma es más larga, pero es razonada

Pasamos la recta r a general como en el apartado anterior: $r \equiv 3x + y - 5 = 0$

Construimos la recta s que es perpendicular a r y que pasa por $P(-2,1)$: $\begin{cases} s \perp r \\ P \in s \end{cases}$

Como $s \perp r \Rightarrow s \equiv -x + 3y + C = 0$

Como $P(-2,1) \in s \Rightarrow$ (sustituyendo para calcular C) $-(-2) + 3 \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = -5$

Ya tenemos que $s \equiv -x + 3y - 5 = 0$

Calculamos el punto $Q = r \cap s$, para ello resolvemos el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones de las rectas:

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ -x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3 \cdot E_1) \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ -3x + 9y - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow (E_2 + E_1) \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 10y - 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow Q(1,2)$$

Ya nos queda: $dist(P,r) = dist(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|(1-(-2), 2-1)\right| = \left|(3,1)\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} \Rightarrow dist(P,r) = \sqrt{10}$