

UNIDAD 4: REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

CONTENIDO

1.	ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN	2
a)	Asíntotas verticales	2
b)	Asíntotas horizontales	5
c)	Asíntotas oblicuas	6
2.	REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES	9

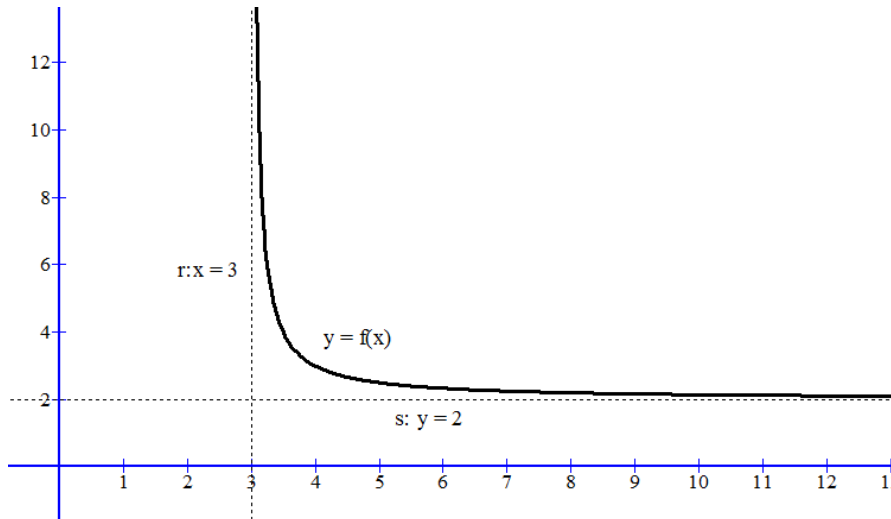
1. ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.

Una definición más formal es:

Definición: Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una función $y = f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.

Veamos una gráfica:



Como vemos en esta gráfica la recta r se aproxima todo lo que queramos a la función (aunque no llega a cortarla o tocarla). A r se le llama asíntota vertical de f en $x = 3$. Vemos que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$

De manera análoga, vemos que tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, que es la recta $s \equiv y = 2$. Se observa que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

Las asíntotas se clasifican en 3 tipos:

a) Asíntotas verticales

Son paralelas al eje OY. Son de la forma $r \equiv x = a$, donde a es un n° que cumple que el $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ es algún tipo de infinito: También vale cuando tendemos a a por la izquierda o por la derecha.

Estos números a suelen ser los puntos extremos de los intervalos del dominio.

Ejemplo 1: Calcula las AV (asíntotas verticales) de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Primero el dominio de la función: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$. Las posibles asíntotas verticales son $x = 1$ ó $x = -1$

Veamos que pasa con la función alrededor de esos puntos, calculando los límites:

En $x = 1$, hacemos los laterales pues aparece 0 en el denominador y nos interesa conocer el signo de la aproximación a 0.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la derecha al 1, la función tiende a $+\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la derecha en $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la izquierda al 1, la función tiende a $-\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x = 1$.

De manera general, decimos que la recta $r \equiv x = 1$ es una asíntota vertical a $+\infty$ por la derecha y a $-\infty$ por la izquierda.

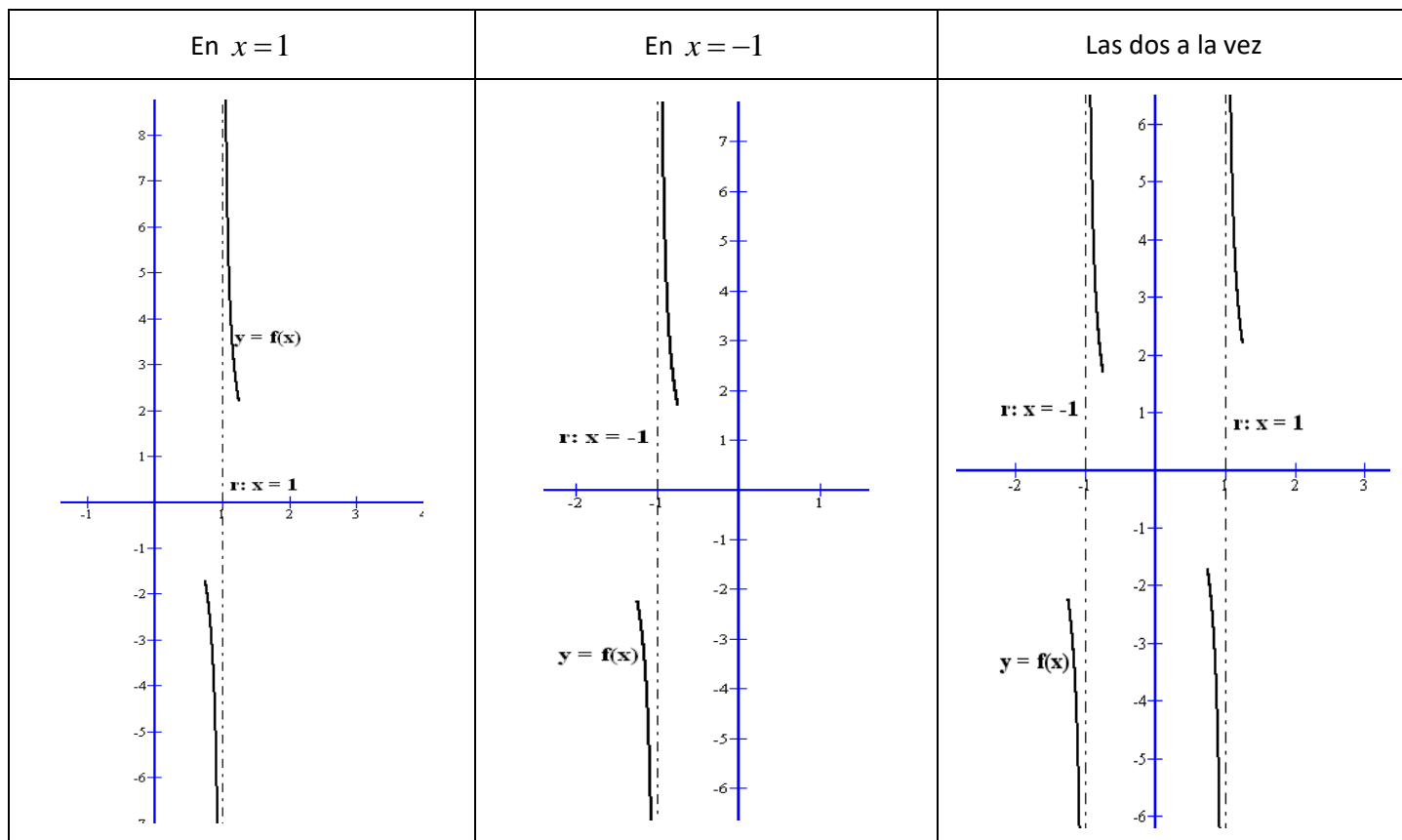
En **$x = -1$** , hacemos los laterales pues aparece 0 en el denominador y nos interesa conocer el signo de la aproximación a 0.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la derecha al -1, la función tiende a $+\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la derecha en $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \rightarrow$ Al acercarnos por la izquierda al -1, la función tiende a $-\infty$. Ya tenemos que la función tiene una asíntota vertical por la izquierda en $x = -1$.

De manera general, decimos que la recta $r \equiv x = -1$ es una asíntota vertical a $+\infty$ por la derecha y a $-\infty$ por la izquierda.

Veamos gráficamente la información que nos ha aportado este estudio. Nos da una buena idea de la gráfica de la función



Ejemplo 2: Calcula las AV (asíntotas verticales) de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

En este caso, el dominio de la función $Dom(f) = R$, con lo cual no tiene A.V. y no hay que hacer nada más

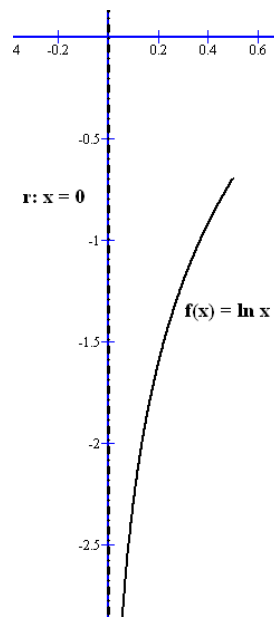
Ejemplo 3: Calcula las asíntotas verticales de $f(x) = \ln x$

Como sabemos, $Dom(\ln) = (0, +\infty)$. Por tanto, puede presentar una A.V. en $x = 0$. Veamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \text{ como sabemos, luego } r \equiv x = 0 \text{ es una A.V. por la derecha a } -\infty$$

El límite lateral izquierdo en 0 no se puede calcular pues por ahí la función \ln no está definida.

Gráficamente tenemos algo así:



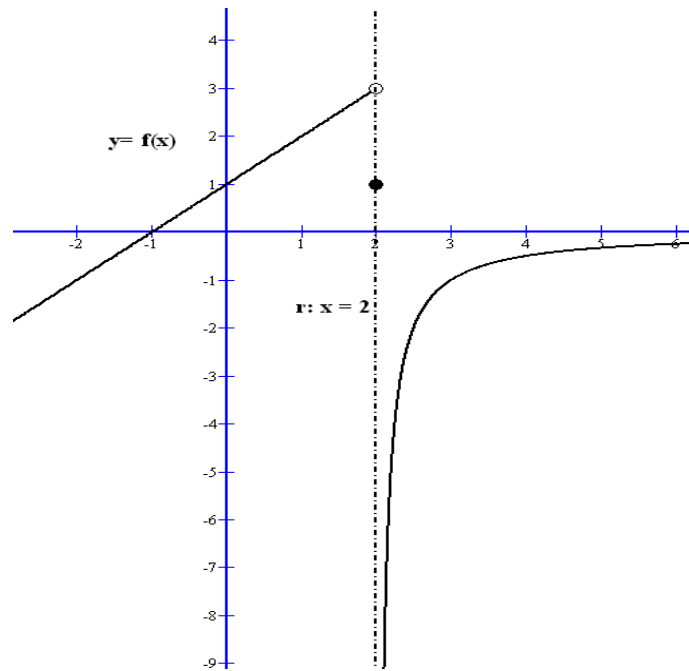
Ejemplo 4: Calcular las asíntotas verticales de $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{-1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

En este caso, también tenemos que $Dom(f) = R$, pero al ser definidas por partes, puede que tenga A.V. en los puntos que cambia de definición o en los puntos donde la función no este definida. Aquí sólo se plantea en $x = 2$, y vamos a calcular los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{x - 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty. \text{ Por la derecha hay A.V., que es } r \equiv x = 2, \text{ hacia } -\infty \text{ por la derecha.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1 = 3 \rightarrow \text{NO hay A.V. por la izquierda}$$

Gráficamente esta función es así:



b) Asíntotas horizontales

Son rectas paralelas al eje OX, o sea, de la forma $r \equiv y = a$: $y = a$. Ese nº a se calcula mediante los límites en el $+\infty$ y en el $-\infty$. Es decir, calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Como máximo una función sólo puede tener dos A.H.

Veamos ejemplos:

Ejemplo 5: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{-4x^2 - 1}{2x^2 + x}$

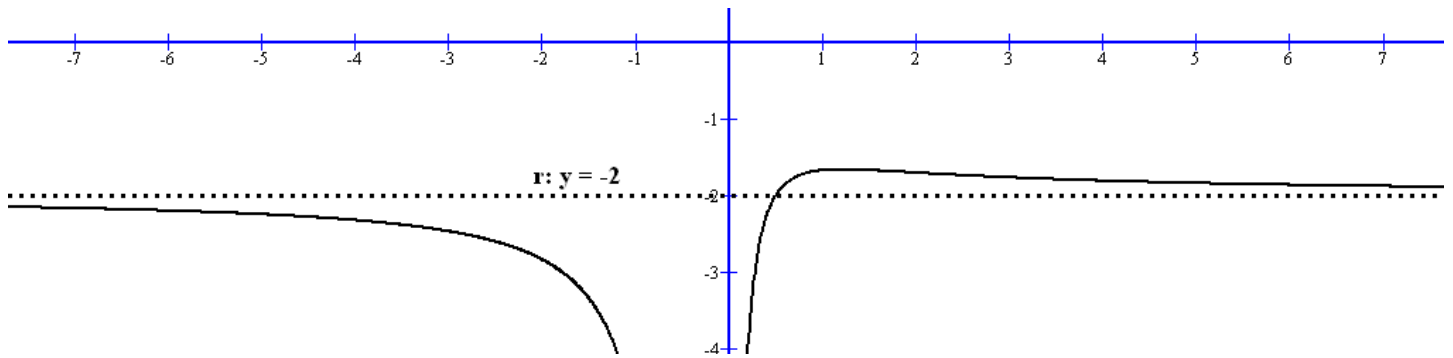
En esta función su dominio es $Dom(f) = R - \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$, que no influye para nada pues vamos a hacer límites en el infinito

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 - 1}{2x^2 + x} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow$ Como el límite existe, tenemos que la recta $r \equiv y = -2$ es una asíntota horizontal en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2 - 1}{2x^2 + x} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow$ Como el límite existe, tenemos que la recta $r \equiv y = -2$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

Como es la misma, podemos decir que la recta $r \equiv y = -2$ es la asíntota horizontal

Gráficamente,



Ejemplo 6: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = e^{-5x}$

El dominio es todo \mathbb{R} . Vamos calcular los límites en infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-5x} = 0 \rightarrow \text{La recta } r \equiv y = 0 \text{ es A.H. en } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-5x} = +\infty \rightarrow \text{No tiene A.H. en } -\infty \text{ Observamos que tiene por un lado y por otro no}$$

Ejemplo 7: Calcular las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x}$

Os dejo a vosotros comprobar que no tiene asíntotas horizontales.

c) Asíntotas oblicuas

Son aquellas que son inclinadas (pendiente distinta de 0). Serán rectas de la forma $r \equiv y = mx + n$

Hay que hacer límites también en $+\infty$ y en $-\infty$ para calcular los valores de m y n y son los siguientes:

En $+\infty$	En $-\infty$
$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$	$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$	$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$

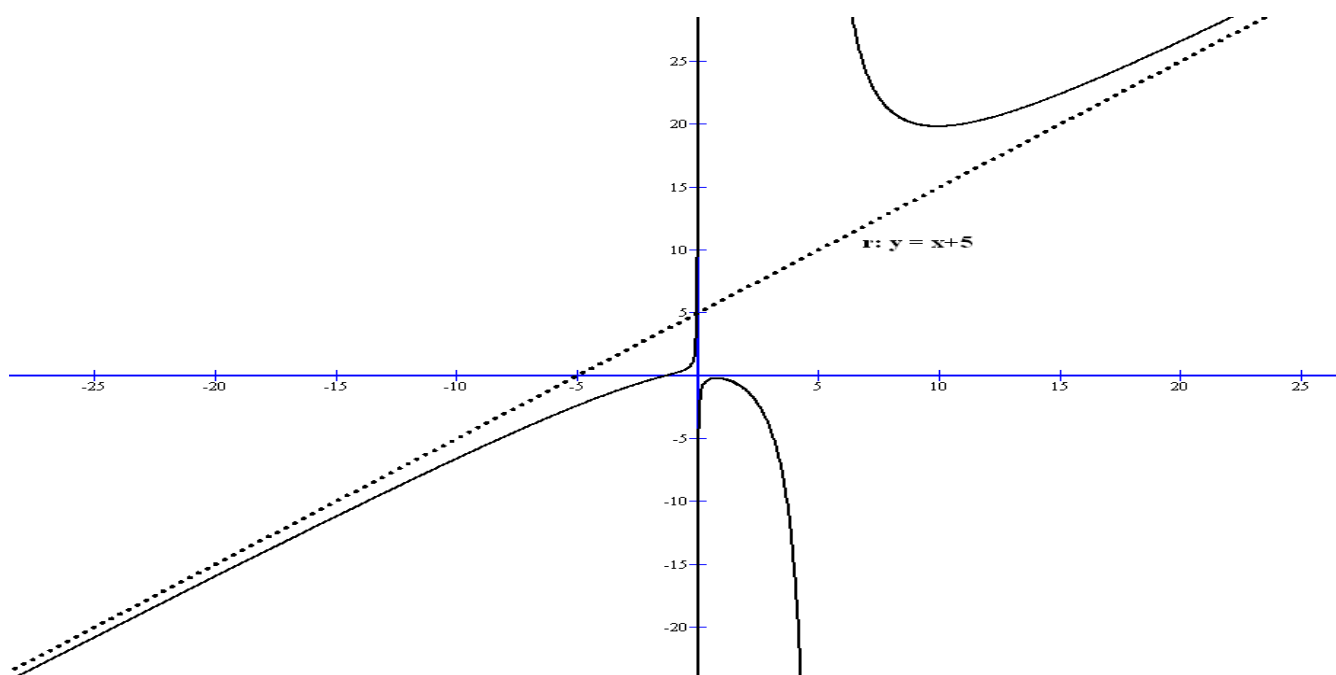
Propiedad: Si una función $y = f(x)$ tiene asíntotas horizontales no puede tener asíntotas oblicuas en el correspondiente infinito.

Ejemplo 8: Calcular las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x}$

Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0,5\}$, que no nos influye en el cálculo de las A. O.

En $+\infty$	En $-\infty$ (todo es análogo a $+\infty$)
$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x \cdot (x^2 - 5x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 1}{x^3 - 5x^2} = 1$	$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ Hacedlo vosotros
$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 5x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3 - x + 1 - (x^3 - 5x^2)}{x^2 - 5x} \right] =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x^2 - x + 1}{x^2 - 5x} \right] = 5$	$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = 5$ Hacedlo vosotros
La A.O. en $+\infty$ es: $r: y = x + 5$	La A.O. en $-\infty$ es: $r: y = x + 5$

Su gráfica es así, para que hagáis una idea de lo obtenido:



Ejemplo 9: Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+3}{3x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcular sus A. Oblicuas

El dominio de esta función es: $Dom(f) = R - \left\{ 0, -3, \frac{3}{2} \right\}$ En los reales que no son del dominio es donde puede presentar asíntotas verticales, que esas no las vamos a estudiar..

En $+\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x \cdot (2x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x^2-3x} = 0$$
 → La pendiente es 0, luego no puede ser una asíntota oblicua, en todo caso será horizontal. Veamos si tiene horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{2x-3} = \frac{3}{2} \rightarrow r \equiv y = \frac{3}{2}$ es asíntota horizontal en $+\infty$ (esto no era necesario, pues no lo pedía el problema)

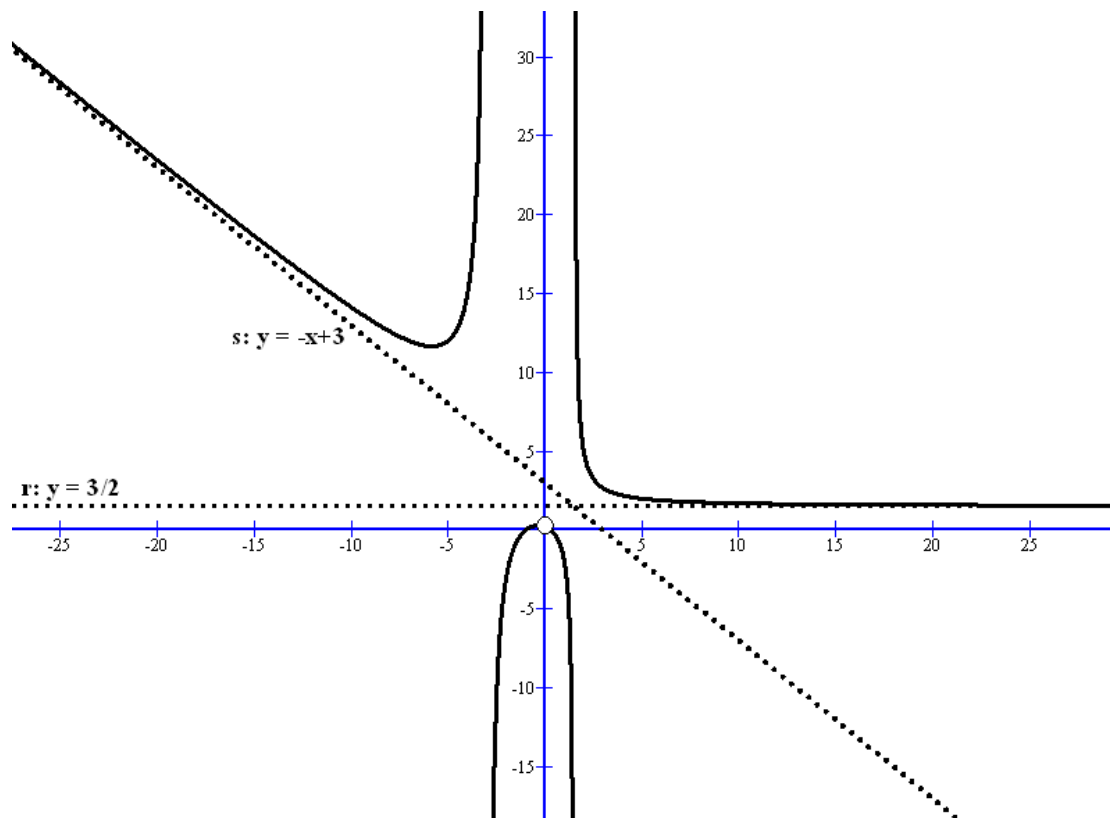
En $-\infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+1}{x \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+1}{x^2+3x} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2+1}{x+3} - (-x) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2+1+x^2+3x}{x+3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x+1}{x+3} \right] = 3$$

La recta $s \equiv y = -x + 3$ es A. Oblicua en $-\infty$

Para que veáis gráficamente lo calculado, la gráfica de la función con sus asíntotas es:



2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Vamos a intentar con los conocimientos que tenemos representar de forma aproximada funciones y básicamente nos vamos a apoyar en el estudio de: dominio, simetrías, periodicidad, cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos locales, intervalos de concavidad ($f''(x)>0$) y de convexidad ($f''(x)<0$), puntos de inflexión y una tabla de valores para afinar.

Vamos a hacerlo mediante ejemplos:

Ejemplo 10: Representar gráficamente la función $y = x^3 - x^2 - 8x + 12$

Dominio: $Dom(y) = \mathbb{R}$ por ser polinómica.

Simetrías: $y(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 - 8(-x) + 12 = -x^3 - x^2 + 8x + 12 \neq \begin{cases} y(x) \\ -y(x) \end{cases}$. Luego no presenta simetría

Periodicidad: Las funciones polinómicas no son periódicas.

Cortes con los ejes:

Eje de abscisa (eje OX): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ Resolvemos

por Ruffini y nos queda: $(x-2)^2 \cdot (x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$. Por tanto, los puntos de corte son: $(2,0)$ y $(-3,0)$

Eje de ordenadas (eje OY): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 12$ Punto de corte

$(0,12)$.

Asíntotas:

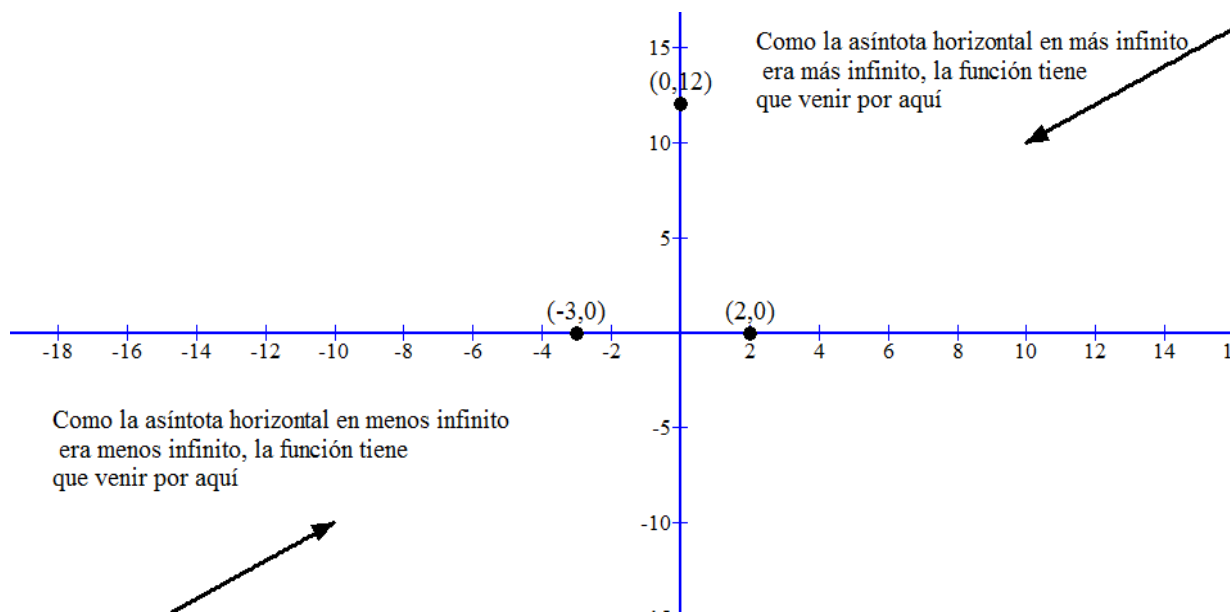
Asín. verticales: No tiene pues su dominio es todo \mathbb{R} y es continua

Asín. Horizontales: En $+\infty$, calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 - 8x + 12) = +\infty$, no tiene

En $-\infty$, calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - 8x + 12) = -\infty$, no tiene. Nos aportan información de por dónde va el dibujo al irnos para infinito.

Asín. Oblicuas: En $+\infty$, calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x} = +\infty$, no tiene. En $-\infty$, ocurre igual.

Con los datos ya calculados podemos intuir algo del dibujo:



Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía):

Derivamos la función $y = x^3 - x^2 - 8x + 12 \rightarrow y' = 3x^2 - 2x - 8$. Igualamos a 0: $3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Hacemos la tabla de signos:

	$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$	$\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
$y' = 3x^2 - 2x - 8$	+	-	+
	Creciente	Decreciente	Creciente

Extremos locales:

Con el estudio de la monotonía ya obtenemos los extremos locales sin tener que aplicar el criterio de la 2ª derivada.

En $x = -\frac{4}{3}$, tiene un máximo relativo. El punto en concreto es $\left(-\frac{4}{3}, \frac{500}{27}\right)$

En $x = 2$, la función tiene un mínimo relativo. El punto en concreto es $(2, 0)$

Intervalos de concavidad (curvatura):

Hacemos la 2ª derivada: $y' = 3x^2 - 2x - 8 \rightarrow y'' = 6x - 2$ Igualamos a 0: $6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

Hacemos la tabla de signos correspondiente:

	$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
$y'' = 6x - 2$	-	+
	Cóncava \cap	Convexa \cup

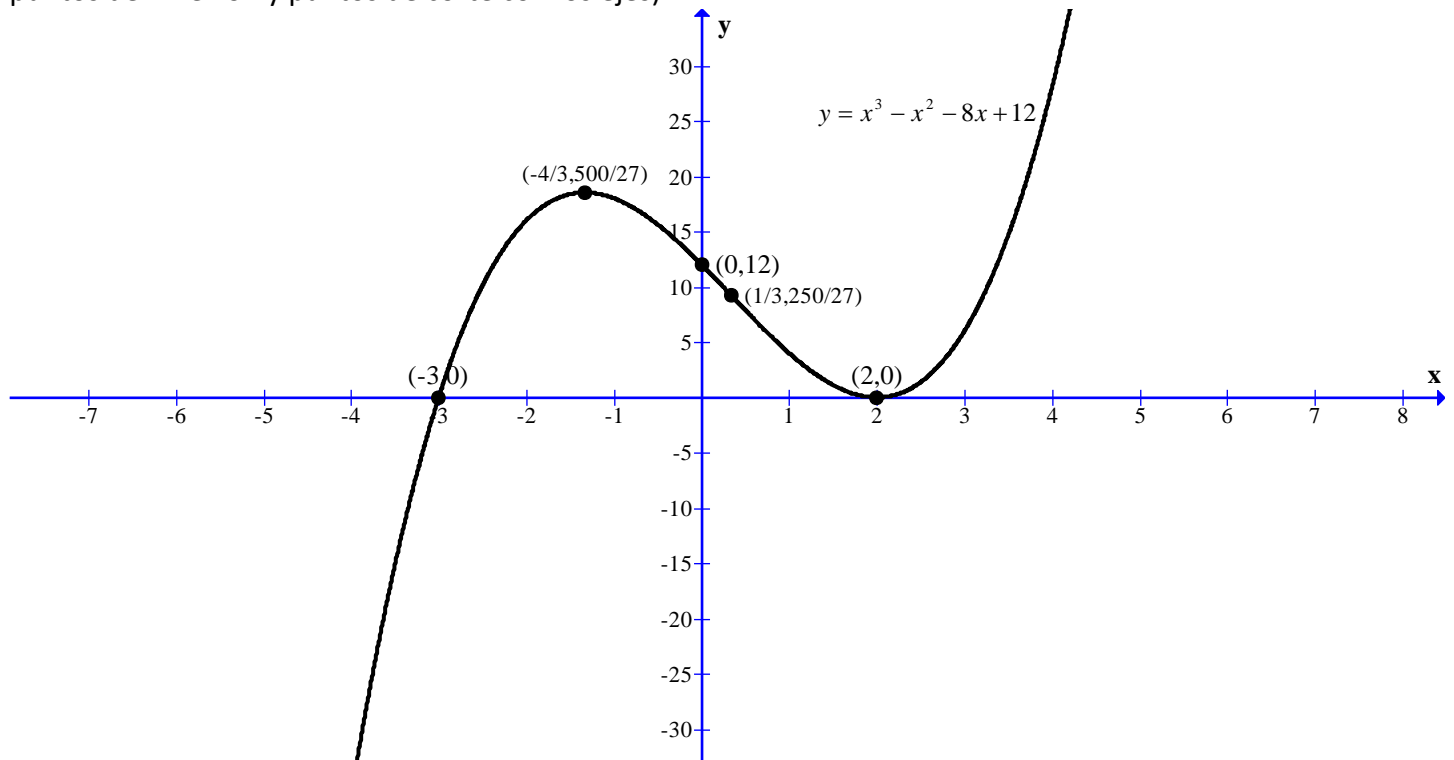
Puntos de inflexión:

Por lo visto en la curvatura, en $x = \frac{1}{3}$ la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo. El punto en concreto con sus coordenadas es $\left(\frac{1}{3}, \frac{250}{27}\right)$

Pequeña tabla de valores:

X	Y
-2	16
-1	18
1	4
3	6
4	28

Con lo cual ya podemos hacer un esbozo bastante curioso de la función: (sólo hemos puesto los extremos, puntos de inflexión y puntos de corte con los ejes)



Ejemplo 11: Representar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Dominio: Por ser irracional de índice par tenemos que hacer una tabla de signos para saber dónde el radicando es positivo o 0. Veamos dónde se anula el radicando: $9 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Tabla de signos:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
$9 - x^2$	-	+	-
	No son del dominio	Son del dominio	No son del dominio

Por último vemos que ocurre en $\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(3) = \sqrt{9 - 3^2} = 0 \\ f(-3) = \sqrt{9 - (-3)^2} = 0 \end{cases}$ que tienen sentido y además hemos calculado

dos puntos por dónde pasa la función $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ que son puntos de corte con el eje OX.

En definitiva, $Dom(f) = [-3, 3]$

Simetrías: $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2} = f(x)$. Luego presenta simetría par. Es simétrica respecto al eje OY

Periodicidad: Obviamente no es periódica

Cortes con los ejes:

Eje de abscisa (eje OX): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ Ya lo hemos resuelto en el dominio, los puntos

de corte son: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

Eje de ordenadas (eje OY): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \sqrt{9 - x^2} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 3$ Punto de corte $(0, 3)$

Asíntotas:

Asín. verticales: No tiene pues es continua en su dominio y en $x = 3$ y $x = -3$, la función toma un valor (no se va a ningún infinito).

Asín. Horizontales: En $+\infty$ y $-\infty$, no podemos calcular los límites pues está fuera del dominio. Por tanto, no hay.

Asín. Oblicuas: Lo mismo que en las horizontales

Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía):

Derivamos la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$. Igualamos a 0: $\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} = 0 \rightarrow -x = 0 \rightarrow$

$x = 0$ Observad además que la función no es derivable en $\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$ pues estos valores anulan el denominador de la derivada.

Hacemos la tabla de signos:

	$(-3, 0)$	$(0, 3)$
$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$	+	-
	Creciente	Decreciente

Extremos locales:

Con el estudio de la monotonía ya obtenemos los extremos locales sin tener que aplicar el criterio de la 2ª derivada. En $x = 0$, tiene un máximo relativo. El punto en concreto es $(0,3)$. Además, como la función es continua y en los extremos del dominio los valores que alcanza la función son menores que este máximo relativo, pues es un máximo absoluto.

Intervalos de concavidad (curvatura):

Hacemos la 2ª derivada: $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-1 \cdot \sqrt{9-x^2} - (-x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}}{(\sqrt{9-x^2})^2} \rightarrow$


$$f''(x) = \frac{-\sqrt{9-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{-(9-x^2) - x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$$

Iguales a 0:

$$\frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = 0$$

y como vemos no se anula nunca.

Hacemos la tabla de signos correspondiente: (en este caso no sería necesario siempre sale - porque el numerador es -9 y el denominador siempre es positivo al ser $x \in (-3,3)$)

	$(-3,3)$
$f''(x) = \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$	-
	Cóncava 

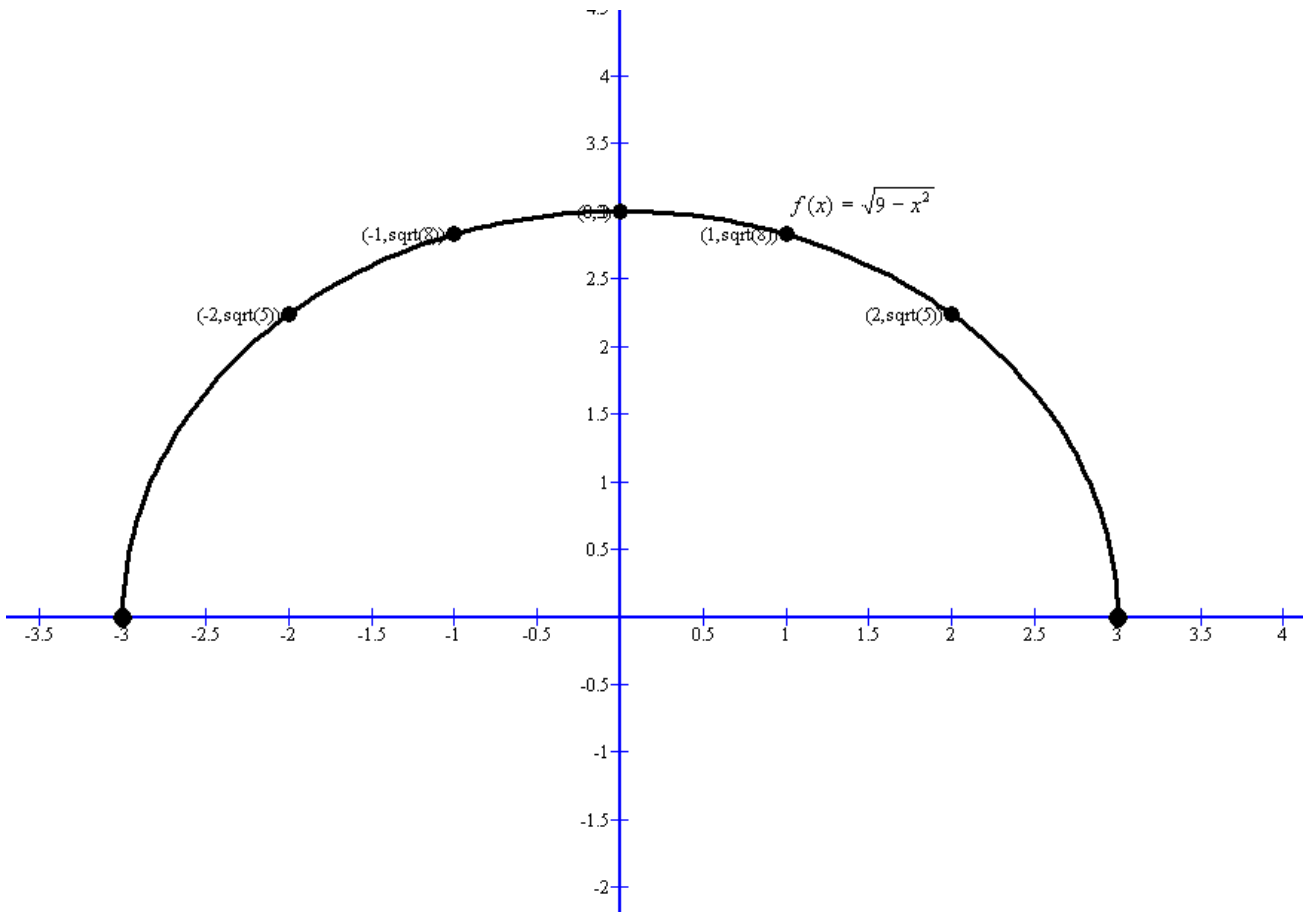
Puntos de inflexión:

No tiene pues no hay cambio de curvatura y además no se anula la derivada 2ª

Pequeña tabla de valores:

X	Y
-2	$\sqrt{5}$
-1	$2\sqrt{2}$
1	$2\sqrt{2}$
2	$\sqrt{5}$

La gráfica es la siguiente:



Como podéis observar es una semicircunferencia. Este problema se podía haber hecho con los conocimientos de cónicas dados en 1º Bachillerato, pues de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (que tiene centro en $(0,0)$ y radio 3), si despejamos la y y nos resulta $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Si nos quedamos con el signo $+$, nos da la función y con el signo $-$ la otra semicircunferencia.

Ejemplo 12: Representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Dominio: Por ser racional tenemos que saber dónde se anula el denominador: $x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Así, $Dom(f) = R - \{1, -1\}$

Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$ Luego presenta simetría impar. Es simétrica respecto al origen de coordenadas

Periodicidad: Obviamente no es periódica

Cortes con los ejes:

Eje de abscisa (eje OX): Resolvemos el sistema: $\begin{cases} y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \rightarrow x = 0 \text{ Punto de corte } (0,0) \\ y = 0 \end{cases}$

Eje de ordenadas (eje OY): Resolvemos el sistema:
$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \rightarrow y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$
 Punto de corte (0,0)

Asíntotas:

Asín. verticales: Puede presentar A.V. en $x = 1$ y en $x = -1$, que son los dos puntos que no son del dominio y anulan el denominador (al dividir por 0 puede que se vaya a infinito).

En $x = 1$: Hacemos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ y por la izquierda $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ La recta vertical $r \equiv x = 1$ es una A.V. Por la derecha la función se va a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$

En $x = -1$: Hacemos los límites laterales:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$ y por la izquierda $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ La recta vertical $r \equiv x = -1$ es una A.V. Por la derecha la función se va a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$

Asín. Horizontales: En $+\infty$, calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$, no tiene

En $-\infty$, calculamos $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, no tiene.

Nos aportan información de por dónde va el dibujo al irnos para infinito.

Asín. Oblicuas: En $+\infty$, calculamos $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} : x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$, y ahora

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^3 - x} = 0$. La recta $b \equiv y = x$ (conocida como bisectriz del primer y tercer cuadrante) es A. Oblicua en $+\infty$

En $-\infty$, el proceso es totalmente análogo y resulta que también la recta $b \equiv y = x$ es A. Oblicua en $-\infty$

NOTA: Una opción interesante una vez obtenidas las asíntotas, es calcular los puntos de corte de las asíntotas horizontales y oblicuas con la función, que nos pueden ayudar a determinar si la función va a un lado o a otro de

la asíntota. Lo hacemos con la única asíntota oblicua:
$$\begin{cases} y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \rightarrow \frac{x^3}{x^2 - 1} = x \rightarrow x^3 = x^3 - x \rightarrow x = 0 \\ y = x \end{cases}$$

El punto de corte es (0,0)

Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía):

Derivamos la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \rightarrow f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$. Igualamos a 0: $\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \rightarrow$

$$x^2 \cdot (x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Hacemos la tabla de signos:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$ <p>Si nos fijamos, para el signo sólo hay que estudiar el factor $(x^2 - 3)$</p>	+	-	-	-	+
	Creciente	Decreciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Extremos locales:

Con el estudio de la monotonía ya obtenemos los extremos locales sin tener que aplicar el criterio de la 2ª derivada.

En $x = -\sqrt{3}$, tiene un máximo relativo. El punto en concreto es $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$

En $x = \sqrt{3}$, la función tiene un mínimo relativo. El punto en concreto es $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

En $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ por no ser del dominio, no tiene sentido estudiar extremos.

Intervalos de concavidad (curvatura):

Hacemos la 2ª derivada: $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} \rightarrow$ Sacamos

factor común $(x^2 - 1)$ del numerador $\rightarrow f''(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot ((4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2) \cdot 4x)}{(x^2 - 1)^4} \rightarrow$ Simplificamos y

operamos, quedándonos: $f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$ Igualamos a 0: $f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 + 6x = 0 \rightarrow$

$2x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0$ es la única solución

Hacemos la tabla de signos correspondiente: (en este caso no sería necesario siempre sale - porque el numerador es -9 y el denominador siempre es positivo al ser $x \in (-3, 3)$)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$	-	+	-	+
	Cóncava	Convexa	Cóncava	Convexa

Puntos de inflexión:

En $x = 0$ hay un punto de inflexión convexo-cóncavo. Nuevamente $x = 1$ y $x = -1$ no son tenidos en cuenta para ser candidatos a puntos de inflexión pues no son del dominio.

Pequeña tabla de valores:

X	Y
-3	-27/8
-2	-8/3
-1/2	1/6
1/2	-1/6
2	8/3
3	27/8

Y la gráfica teniendo en cuenta todos los datos nos queda:

