# *UNIDAD 8*: **DETERMINANTES**

## CONTENIDO

## 1. DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3

**Definición**: Para una matriz cuadrada de orden 2, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de $A$ y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

**Definición**: Para una matriz cuadrada de orden 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de $A$ y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

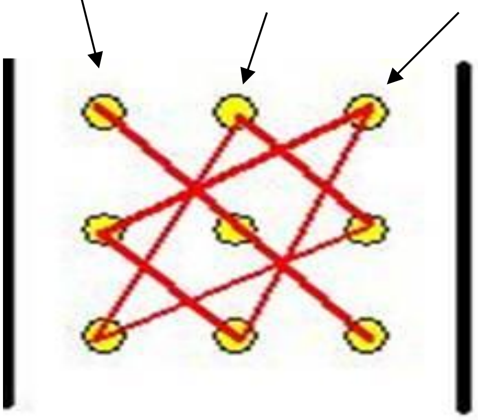
$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right)$$ = (sin paréntesis)

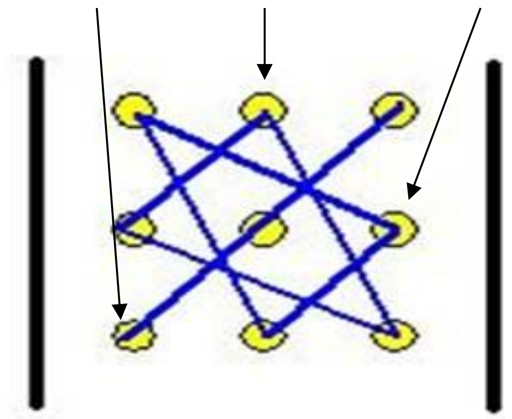
$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

*<u>Regla de Sarrus</u>*: Para recordar con mayor facilidad el desarrollo del determinante de orden 3, podemos usar esta regla:

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} \qquad - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$



positivos



negativos

**Ejemplo 1**: Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot(5) = -6+5 = -1$

b) $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 20 & a \end{vmatrix} = a^2 - 100$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2{\cdot}5{\cdot}0 + 0{\cdot}2{\cdot}2 + (-3){\cdot}1{\cdot}4 - (-3){\cdot}5{\cdot}2 - 1{\cdot}0{\cdot}0 - 2{\cdot}2{\cdot}4 = -12 + 30 - 16 = 2$

**Ejemplo 2**: Calcular el valor de $x$ en la siguiente igualdad con determinantes:

$\det\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x-1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x-1 \rightarrow$ (hacemos el determinante por la regla de Sarrus) $x{\cdot}(x-1){\cdot}2 = x-1 \rightarrow$

$2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x = x-1 \rightarrow 2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

## 2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1: El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta

$$|A| = |A^t|$$

2: Si los elementos de una fila o columna de una matriz se multiplican por un nº, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho nº. Esto también nos permite extraer factor común por filas o columnas para hacer un determinante más simple.

$2{\cdot}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (metemos el 2 en la Fila 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (metemos el 2 en la columna 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (cualquiera de esos 3 determinantes da el mismo resultado, -32)

Veamos un ejemplo de sacar factor: $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 30 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (la Columna 1 tiene como factor común 6, podemos extraerlo)

$6{\cdot}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (además la Fila 2 tiene como factor común 5, y lo extraemos) $6{\cdot}5{\cdot}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ ( ya aplicamos Sarrus) = $30{\cdot}(0 + 2 + 6 - 0 - 2 - 8) = -60$

***OJO***: Si tenemos una matriz $A$ cuadrada de orden n, y la multiplicamos por un nº $k$ , entonces el determinante queda multiplicado por $k^n$, pues $k$ multiplica a cada fila. Es decir, $|k{\cdot}A| = k^n{\cdot}|A|$

3: Si los elementos de una fila o columna de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas o columnas excepto dicha columna o fila cuyos sumandos pasan respectivamente a cada uno de los determinantes.

$$\det(F_1,...,F_i+F_i',...,F_n)=\det(F_1,...,F_i,...,F_n)+\det(F_1,...,F_i',...,F_n)$$

**<u>Ejemplo 3</u>**:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+1 & 3 \\ 4 & 5+2 & 5 \\ 2 & 3-2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=[5+10+36-30-15-4]+[2+10-24-12-4+10]=2+(-18)=-16$$

4: El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices

$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ y de ello también se tiene que $|A^n|=|A|^n$

**<u>Ejemplo 4</u>**:

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right|=\begin{cases} \left|\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\right|=28-25=3 \\ \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right|=3\cdot 1=3 \end{cases}$$

5: Si en una matriz permutamos (cambiamos) dos filas entre si (o dos columnas entre si), el determinante cambia de signo.

$$\det(F_1,...,F_i,....,F_j,...,F_n)=-\det(F_1,...,F_j,....,F_i,...,F_n)$$

**<u>Ejemplo 5</u>**:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=5+10+36-30-15-4=2$ . Si cambiamos la columna 1 con la columna 3, el determinante cambia de signo, veámoslo: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=30+4+15-5-36-10=-2$ .

Sólo se puede hacer filas con filas o columnas con columnas, y si hacemos varias permutaciones, si el número es par, el determinante no varía, pero si el número es impar el determinante cambia de signo.

6: Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales (o columnas iguales o proporcionales), entonces el determinante vale 0.

**<u>Ejemplo 6</u>**:

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 23 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 pues si nos damos cuenta la fila 3 es 3 veces la fila 1: $F_3=3\cdot F_1$

7. Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes filas o columnas, entonces el determinante vale 0

**Ejemplo 7**:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ pues si nos damos cuenta $C_3 = C_1 + 2 \cdot C_2$, es decir, la columna 3 es combinación lineal de la columna 1 y de la columna 2.ç

8: Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes filas o columnas, el determinante no varía. Es decir, podemos sumar filas con filas o columnas con columnas, y el determinante no varía.

**Ejemplo 8**:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$(vamos a sumar a la fila 2 la fila 1, esto se denota por $F_2 = F_2 + F_1$) =

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ (ahora en este determinante a la fila 3 le restamos dos veces la fila 1, esto se denota $F_3 = F_3 - 2F_1$) =

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$-9

**NOTA**: Un determinante con toda una fila o columna de ceros, su valor es 0.

## 3. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR ADJUNTOS

**Definición**: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **menor complementario** del elemento $a_{ij}$ y se representa por $\alpha_{ij}$, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila $i$ y la columna $j$

**Ejemplo 9**: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, calculamos algunos de sus 9 menores complementarios

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

**Definición**: Dada una matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **adjunto** del elemento $a_{ij}$ y se representa por $A_{ij}$ , a producto del menor complementario $\alpha_{ij}$ por el signo correspondiente a la paridad de la suma $i+j$ . Es decir, $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de una matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **matriz adjunta** de $A$ y se representa por $Adj(A)$

**Ejemplo 10**: Calcular la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 6=6$ $\quad$ $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2$ $\quad$ $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 4=-4$ $\quad$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$

Luego:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

**Propiedad**: Se tiene que $Adj(A^t)=[Adj(A)]^t$

**Desarrollo de un determinante por adjuntos**: El determinante de una matriz cuadrada cualquiera es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

Así, si tenemos que calcular $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$, podemos hacerlo por Sarrus o bien desarrollando por una de sus filas o columnas, por ejemplo:

Si desarrollamos por la fila 2: $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23}$

Si desarrollamos por la columna 1: $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}$

Este método se suele utilizar en combinación con la propiedad 8 del punto anterior para hacer ceros en una determinada fila o columna y después proceder al desarrollo por adjuntos respecto de dicha fila o columna. Este método se suele usar en determinantes de orden mayor a 3.

**Ejemplo 12**: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, vamos a calcular su determinante de diferentes maneras:

a) Por Sarrus: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 18 - 20 - 16 + 15 + 18 = -9$

b) Desarrollando por la columna 3 (se puede hacer por la que queramos):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{13} + (-3) \cdot A_{23} + 6 \cdot A_{33}$$

Calculamos los adjuntos: $A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9$ , $A_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$ , $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

Por tanto: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-9) + (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 5 = -36 - 3 + 30 = -9$

c) Haciendo ceros: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ (hacemos $F_2 = F_2 + F_1$ y $F_3 = F_3 - 2F_1$ para hacer ceros en la primera columna) = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$ (desarrollamos ahora por la primera columna, y como vemos sólo tenemos que calcular $A_{11}$, pues los demás están multiplicados por 0) = $1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13}$ = $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ = -9 Este último determinante de orden 2 también se podía haber hecho haciendo ceros

De esto podemos concluir que:

- El determinante de una matriz triangular o diagonal es el producto es igual al producto de los elementos de la diagonal principal
- El determinante de la matriz unidad es 1
- El determinante de la matriz nula es 0

## 4. MATRIZ INVERSA USANDO DETERMINANTES

Recordemos que la matriz inversa de una matriz cuadrada $A$ es aquella matriz $A^{-1}$ que verifica:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Las matrices que tienen inversa se llaman **regulares**.

Las matrices que no tienen inversa se llaman **singulares**.

**Propiedad**: Una matriz $A$ es regular (es decir, tiene inversa) si y sólo si $|A| \neq 0$

**Teorema**: Dada una matriz $A$ regular, entonces su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^{t} \quad \text{o bien} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj\left(A^{t}\right)\right]$$

**Ejemplo 13**: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right| = 6 - 8 = -2 \neq 0$ → $A$ es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Aplicamos cualquiera de las dos fórmulas del teorema, por ejemplo la primera $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^{t}$

Calculamos la matriz adjunta de $A$ (lo hacéis vosotros, es muy fácil) $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora la trasponemos:

$\left[Adj(A)\right]^{t} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y por último multiplicamos por $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$ →

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

*Comprobación*: Efectuamos $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} =$ (fácil de ver que es I) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Ejemplo 14**: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 + 2 + 0 - 8 = 1$ → $A$ es regular y por tanto

$\exists A^{-1}$

Calculamos los adjuntos:

| | | |
|---|---|---|
| $A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$ | $A_{12}=-\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$ | $A_{13}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$ |
| $A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$ | $A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$ | $A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4$ |
| $A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3$ | $A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=7$ | $A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-5$ |

La matriz adjunta nos queda: $Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{pmatrix}$. Calculamos la traspuesta y la multiplicamos por $\frac{1}{|A|}=\frac{1}{1}=1$, obteniendo que $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$

**<u>Propiedades de la inversa:</u>**

1: Si existe $A^{-1}$, ésta es única

2: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

3: $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

4: $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$

## 5. RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

Como ya sabemos el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Veamos como calcularlo con determinantes.

**<u>Definición</u>**: Se llama menor de orden $k$ de una matriz $A$ de dimensión $m\times n$ al determinante de orden $k$ formado por los elementos que pertenecen a $k$ filas y a $k$ columnas de la matriz $A$. Es decir, son los determinantes de cualquier submatriz cuadrada de $A$

**Ejemplo 15**: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, tenemos que es de dimensión $2\times 3$ y por ello podemos tomar submatrices cuadradas de orden 1 y orden 2

*Menores de orden 1*: Son los elementos de la matriz 2, 1, 5, 3, 0 y 1

*Menores de orden 2*: Sólo hay 3 menores de orden 2 que son: $\begin{cases}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3\\ \begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-13\\ \begin{vmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\end{cases}$ Ojo al tomar los menores pues no podemos tomar aleatoriamente los elementos del menor, este determinante $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ no es un menor pues no es una submatriz de $A$

**Ejemplo 16**: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$ que es cuadrada de orden 3. Tiene menores de orden 1, de orden 2 y de orden 3.

*Menores de orden 1*: Son los 9 elementos de la matriz

*Menores de orden 2*: Hay 9 menores de orden 2, como $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2 & 5\\ -2 & -4\end{vmatrix}$, …..

*Menores de orden 3*: Sólo hay uno y es el determinante de la matriz $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{vmatrix}$

**Propiedad**: El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo

**Ejemplo 16**: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$ que es cuadrada de orden 3. Vamos a calcular su rango. Empezamos con los de mayor orden, en este caso, el único es $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{vmatrix}=-25-28-24+30+28+20$

$=1\neq 0$ → El rango es 3 pues ya no hay menores de mayor orden → $A$ tiene las 3 filas o las 3 columnas linealmente independientes