ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD ANDALUCÍA – 2008-2010 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II

***Ejercicio 1*.-** (2010)

Un comerciante quiere dar salida a 400 kg de avellanas, 300 kg de nueces y 400 kg de almendras. Para ello hace dos tipos de lotes: los de tipo A contienen 2 kg de avellanas, 2 kg de nueces y 1 kg de almendras; y los de tipo B contienen 3 kg de avellanas, 1 kg de nueces y 4 kg de almendras. El precio de venta de cada lote es de 20 euros para los del tipo A y de 40 euros para los del tipo B. ¿Cuántos lotes de cada tipo debe vender para obtener el máximo ingreso y a cuánto asciende éste?

***Ejercicio 2*.-** (2010)

Se considera el recinto del plano determinado por los siguientes semiplanos:

$$4x - y \geq 4; \quad 2x + y \leq 15; \quad 3y - x \leq 10; \quad y \geq 0.$$

a) Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) Calcule los puntos del recinto donde la función $F(x, y) = 4x - 7y$ alcanza el máximo y el mínimo.

c) ¿Entre qué valores varía la función $F(x, y) = 4x - 7y$ en el recinto?

***Ejercicio 3*.-** (2010)

Un supermercado se abastece de gambas y langostinos a través de dos mayoristas, A y B, que le envían contenedores con cajas completas de ambos productos. El mayorista A envía en cada contenedor 2 cajas de gambas y 3 de langostinos, al precio de 350 euros el contenedor, mientras que el mayorista B envía en cada uno 1 caja de gambas y 5 de langostinos, al precio de 550 euros el contenedor.

El supermercado necesita, como mínimo, 50 cajas de gambas y 180 de langostinos pudiendo almacenar, como máximo, 50 contenedores.

¿Cuántos contenedores debería pedir el supermercado a cada mayorista para satisfacer sus necesidades con el menor coste posible? Indique cuál sería ese coste mínimo.

***Ejercicio 4*.-** (2010)

a) Dibuje el recinto del plano definido por las inecuaciones:

$$x + 3y \geq 9; \quad 4x - 5y + 25 \geq 0; \quad 7x - 2y \leq 17; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$$

b) Calcule los vértices del mismo.

c) Obtenga en dicho recinto los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 2x - y + 6$ y los puntos donde se alcanzan.

***Ejercicio 5*.-** (2010)

Sea el recinto definido por las inecuaciones siguientes:

$$x + y \leq 15; \quad x \leq 2y; \quad 0 \leq y \leq 6; \quad x \geq 0$$

a) Represente gráficamente dicho recinto.

b) Calcule sus vértices.

c) Determine el máximo valor de la función $F(x, y) = 8x + 5y$ en el recinto anterior y dónde se alcanza.

Ejercicio 6.- (2010)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^t \cdot B - A \cdot B^t$.

b) Resuelva la ecuación matricial $AX + BA = B$.

Ejercicio 7.- (2010)

Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + y \le 3; \ -x + y \le 3; \ x \le 2; \ y \ge 0$$

a) Represéntelo gráficamente.

b) Calcule los vértices de dicho recinto.

c) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = -2x - y$? ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

Ejercicio 8.- (2010)

a) Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices $A \cdot B \cdot C$ es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

b) Halle la matriz X que verifica $I_2 - 2X = A \cdot (A - B^t)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.- (2010)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Halle los valores de a y b para que se verifique $A - B + A \cdot B^t = C$.

b) ¿Existe algún valor de b para el que el producto $B \cdot B^t$ sea igual a la matriz nula?

c) Para $a = 0.5$ y $b = 1$, halle la matriz X que verifica la igualdad $A \cdot X + B = O$, (O representa la matriz nula).

Ejercicio 10.- (2010)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x \le 2; \quad y \ge -4x + 8; \quad 3y - 4x - 16 \le 0.$$

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 3x - y$, y los puntos donde se alcanzan.

Ejercicio 11.- (2010)

Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$3x + y \ge 4; \quad x + y \le 6; \quad 0 \le y \le 5.$$

a) Represéntelo gráficamente.

b) Calcule los vértices de dicho recinto.

c) En el recinto anterior, halle los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = 5x + 3y$. ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

Ejercicio 12.- (2010)

Sean las matrices:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 8 & 4 & b\end{pmatrix}\ \text{y}\quad R=\begin{pmatrix}c & d & 6\\ 10 & 10 & 50\end{pmatrix}.$$

a) Calcule, si es posible, $P\cdot Q$ y $Q\cdot P$, razonando la respuesta.

b) ¿Cuánto deben valer las constantes *a*, *b*, *c* y *d* para que $P\cdot 2Q=R$?

Ejercicio 13.- (2009)

a) En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: 0.90 m, 1.50 m y 2.40 m, cuyos precios respectivos son 4 euros, 6 euros y 10 euros. Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 m, que le han costado 126 euros en total.

Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos listones de cada longitud ha comprado este cliente.

b) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible:

$$\left.\begin{array}{rrrl} 3x & -\ y & -z & =0\\ 2x & -\ 2y & +z & =18\\ x & & -3z & =0\end{array}\right\}.$$

Ejercicio 14.- (2009)

En un examen de Matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indique dónde se alcanza el mínimo de la función $F(x,y)=6x+3y-2$ en la región determinada por las restricciones $2x+y\geq 6;\ 2x+5y\leq 30;\ 2x-y\leq 6.$"

a) Resuelva el problema.

b) Ana responde que se alcanza en (1, 4) y Benito que lo hace en (3, 0). ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en (1, 4)? ¿Es cierto que se alcanza en (3, 0)?

Ejercicio 15.- (2009)

a) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x+3y\leq 12;\qquad \frac{x}{3}+\frac{y}{5}\geq 1;\qquad y\geq 1;\qquad x\geq 0.$$

b) Calcule los valores extremos de la función $F(x,y)=5x+15y$ en dicha región y dónde se alcanzan.

Ejercicio 16.- (2009)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$

a) Calcule A^2 y $2B+I_2$.

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X-I_2=2B^2$.

Ejercicio 17.- (2009)

Sea la igualdad $A \cdot X + B = A$, donde A, X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

b) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 18.- (2009)

a) Dibuje el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2, \quad x - y \leq 0, \quad y \leq 4, \quad x \geq 0.$$

b) Determine el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x + y$ en el recinto anterior y los puntos donde se alcanzan.

c) ¿Pertenece el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ al recinto anterior? Justifique la respuesta.

Ejercicio 19.- (2009)

a) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

Ejercicio 20.- (2009)

Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha. a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha. y el de hortalizas de 3000 euros/ha., no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halle la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcule dicho máximo.

Ejercicio 21.- (2009)

Obtenga los valores máximo y mínimo, indicando los puntos donde se alcanzan, de la función objetivo $F(x,y) = x - y$ en la región definida por las restricciones $6x + y \geq 3; \quad 2x + y \leq 2; \quad y \leq \frac{5}{4}; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0.$

Ejercicio 22.- (2009)

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1.8 y 3.3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35.6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

a) Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

b) Resuelva el problema.

Ejercicio 23.- (2009)

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}5 & -2 & -6\\ 0 & -3 & 2\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Determine X en la ecuación matricial $X\cdot A-2B=C$.

Ejercicio 24.- (2009)

a) Plantee, sin resolver, el siguiente problema de programación lineal:

"Una empresa fabrica camisas de dos tipos, A y B. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa que fabrica del tipo A, y de 6 euros por cada una del tipo B. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las del tipo B han de suponer, al menos, el 60% del total. ¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?"

b) Represente la región definida por las inecuaciones:

$$y\le x,\quad y+2x\le 6,\quad x\le 4y+3.$$

Calcule el máximo de $F(x,y)=y+2x$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

Ejercicio 25.- (2008)

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ a & 0\end{pmatrix}$, calcule el valor de a para que A^2 sea la matriz nula.

b) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, calcule la matriz $\left(M^{-1}\cdot M^{t}\right)^2$.

Ejercicio 26.- (2008)

Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de tartas, A y B. Para hacer una hornada de tartas del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de tartas del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0.5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Sabiendo que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30 € al vender una hornada del tipo B, determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender para maximizar sus beneficios.

Ejercicio 27.- (2008)

a) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 28.- (2008)

Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.

Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

Ejercicio 29.- (2008)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

Ejercicio 30.- (2008)

a) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \le 6;\ \ 4x + y \le 10;\ \ -x + y \le 3;\ \ x \ge 0;\ \ y \ge 0$$

y determine sus vértices.

b) Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

Ejercicio 31.- (2008)

Un joyero fabrica dos modelos de anillos. El modelo A se hace con 1 gramo de oro y 1.5 gramos de plata. El modelo B lleva 1.5 gramos de oro y 1 gramo de plata. El joyero sólo dispone de 750 gramos de cada metal y piensa fabricar, al menos, 150 anillos del tipo B que ya tiene encargados. Sabiendo que el beneficio de un anillo del tipo A es de 50 € y del tipo B es de 70 €, ¿cuántos anillos ha de fabricar de cada tipo para obtener el beneficio máximo y cuál será éste?

Ejercicio 32.- (2008)

a) Dadas las matrices $F=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$, calcule los productos $C\cdot F$ y $F\cdot C$.

b) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$, calcule la matriz X que verifique la ecuación $X\cdot A^{-1}-B=C$.

Ejercicio 33.- (2008)

De las restricciones que deben cumplir las variables x e y en un problema de programación lineal se deduce el siguiente conjunto de inecuaciones:

$$2y-x\le 8,\quad x+y\ge 13,\quad y+4x\le 49,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$$

a) Represente gráficamente el recinto determinado por estas inecuaciones.

b) Determine los vértices del recinto.

c) Obtenga los valores extremos de la función $F(x,y)=3x-4y+12$ en ese recinto e indique en qué punto o puntos se alcanza cada extremo.

Ejercicio 34.- (2008)

a) Halle la matriz X que verifica la ecuación $X\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$.

b) Determine los valores de x e y que cumplen la igualdad

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\-x & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Ejercicio 35.- (2008)

Una empresa produce botellas de leche entera y de leche desnatada y tiene una capacidad de producción máxima de 6000 botellas al día. Las condiciones de la empresa obligan a que la producción de botellas de leche desnatada sea, al menos, la quinta parte de las de leche entera y, como máximo, el triple de la misma. El beneficio de la empresa por botella de leche entera es de 20 céntimos y por botella de leche desnatada es de 32 céntimos. Suponiendo que se vende toda la producción, determine la cantidad de botellas de cada tipo que proporciona un beneficio máximo y el importe de este beneficio.

Ejercicio 36.- (2008)

Sean A y B las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 4\end{pmatrix}$.

a) Calcule $(A+B)\cdot(A-B)$.

b) Determine la matriz X, cuadrada de orden 2, en la ecuación matricial $(A+2B)\cdot X=3I_2$.