

EJERCICIOS de RADICALES

RECORDAR:

- Definición de raíz n-ésima: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$
Consecuencia: $\sqrt[n]{x^n} = x$, y también $(\sqrt[n]{x})^n = x$
- Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$
- Simplificación de radicales/índice común: $\sqrt[n]{x^m x^p} = \sqrt[n]{x^{m+p}}$

- Propiedades de las raíces:
 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- Introducir/extraer factores: $x \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x^n \cdot a}$

RECORDAR LAS IGUALDADES NOTABLES:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\(A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\(A+B)(A-B) &= A^2 - B^2\end{aligned}$$



1. Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas, y comprobar que se obtiene el mismo resultado: –
Operando, teniendo en cuenta las propiedades de las raíces (Resultado como un único radical).
– Pasando a potencia de exponente fraccionario, y aplicando a continuación las propiedades de las potencias.

a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{2} =$ (Sol: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$)

b) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt{a}} =$ (Sol: $\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$)

c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2} \frac{a^3}{\sqrt{a}} =$ (Sol: $\sqrt[6]{a^7}$)

d) $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} =$ (Sol: $\sqrt[4]{8}$)

2. Extraer factores, y simplificar cuando proceda (véase el 1^{er} ejemplo):

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18} =$

c) $\sqrt{98} =$

d) $\sqrt{32} =$

e) $\sqrt{60} =$

f) $\sqrt{72} =$

g) $\sqrt{128} =$

h) $\sqrt{162} =$

i) $\sqrt{200} =$

j) $\sqrt{12} =$

3. Sumar los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a radicales semejantes (véase el 1^{er} ejemplo):

$$a) \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{2^5} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2^2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

FACTORIZAMOS RADICANDOS
EXTRAEMOS FACTORES
SUMAMOS RADICALES SEMEJANTES

b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$ (Soluc: $6\sqrt{5}$)

c) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$ (Soluc: $6\sqrt{6}$)

d) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} =$ (Soluc: $-\sqrt[3]{2}$)

e) $27\sqrt{3} - 5\sqrt{27} - 9\sqrt{12} =$ (Soluc: $-6\sqrt{3}$)

f) $\sqrt{75} - \sqrt{20} - \sqrt{12} + \sqrt{45} =$ (Soluc: $3\sqrt{3} + \sqrt{5}$)

g) $\sqrt{2\sqrt{2}} + (\sqrt[4]{2})^3 + \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8} =$ (Soluc: $2\sqrt[4]{8}$)

h) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50} =$ (Soluc: $8\sqrt{2}$)

i) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\sqrt{6} =$ (Soluc: $2\sqrt{2}$)

j) $5\sqrt[6]{256} - 2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128} =$ (Soluc: $2\sqrt[3]{2}$)

k) $\sqrt{32} + 2\sqrt{3} - \sqrt{8} + \sqrt{2} - 2\sqrt{12} =$ (Soluc: $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$)

l) $3\sqrt{24} - \frac{1}{3}\sqrt{54} + \sqrt{150} =$ (Soluc: $10\sqrt{6}$)

m) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{8} + 3\sqrt{18} + 2\sqrt{32} + \sqrt{50} =$ (Soluc: $35\sqrt{2}$)

n) $\sqrt{20} - \frac{1}{5}\sqrt{5} + \sqrt{45} =$ (Soluc: $\frac{24}{5}\sqrt{5}$)

o) $2\sqrt{108} - \sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{3} =$ (Soluc: $\sqrt{3}$)

p) $\sqrt{128} + 5\sqrt{12} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{27} - \sqrt{2} =$ (Soluc: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$)

q) $2\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{24} - \frac{1}{2}\sqrt{54} =$ (Soluc: $\sqrt{6}$)

r) $\sqrt{5} + \sqrt{\frac{45}{4}} =$ (Soluc: $\frac{5}{2}\sqrt{5}$)

s) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{18}{75}} =$ (Soluc: $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}$)

t) $\sqrt{\frac{1}{2}} + 3\sqrt{\frac{1}{8}} =$ (Soluc: $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$)

u) $\sqrt{\frac{3}{16}} - 4\sqrt{12} =$ (Soluc: $-\frac{31}{4}\sqrt{3}$)

v) $\sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{10}{6}} =$ (Soluc: $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$)

w) $\sqrt{50a} - \sqrt{18a} =$ (Soluc: $2\sqrt{2a}$)

x) $5\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3} - \sqrt{300} =$ (Soluc: $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$)

$$y) \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{27}}{3} + \frac{5\sqrt{243}}{9} = \quad (\text{Soluc: } 4\sqrt{3})$$

$$z) 6\sqrt[6]{4} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{16} - 3\sqrt[9]{8} + 5\sqrt[3]{\frac{2}{27}} = \quad (\text{Soluc: } 4\sqrt[3]{2})$$

$$a) 2\sqrt[4]{\frac{2}{81}} - \sqrt[8]{4} + 2\sqrt[4]{32} = \quad (\text{Soluc: } \frac{11}{3}\sqrt[4]{2})$$

$$\beta) \sqrt[3]{\frac{3}{64}} + 2\sqrt[3]{81} - \sqrt[9]{9} - \frac{5}{4}\sqrt[3]{3} = \quad (\text{Soluc: } 4\sqrt[3]{3})$$

$$\gamma) \frac{2}{3}\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{128} + 3\sqrt{\frac{2}{27}} = \quad (\text{Soluc: } \sqrt[3]{2})$$

4. Calcular, dando el resultado lo más simplificado posible (véanse los ejemplos):

$$a) 2\sqrt{2}^2 = \quad (\text{Soluc: } 8)$$

$$b) (3\sqrt{5})^2 = \quad (\text{Soluc: } 45)$$

$$c) (5 + \sqrt{3})^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 25 + 10\sqrt{3} + 3 = \boxed{28 + 10\sqrt{3}}$$

$$d) (1 + \sqrt{2})^2 = \quad (\text{Soluc: } 3 + 2\sqrt{2})$$

$$e) (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \quad (\text{Soluc: } 5 + 2\sqrt{6})$$

$$f) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \quad (\text{Soluc: } 5 - 2\sqrt{6})$$

$$g) (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = \quad (\text{Soluc: } 1)$$

$$h) (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \quad (\text{Soluc: } 1)$$

$$i) (2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 2 \cdot 3 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}\sqrt{3} = 6 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = \boxed{3 + \sqrt{3}}$$

$$j) (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{8}) = \quad (\text{Soluc: } -3 - \sqrt{2})$$

$$k) (2 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{12}) = \quad (\text{Soluc: } -4 + 3\sqrt{3})$$

$$l) 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = \quad (\text{Soluc: } 6\sqrt{6})$$

m) $(5\sqrt{3})^2 =$ (Soluc: 75)

n) $(5 + \sqrt{3})^2 =$ (Soluc: $28 + 10\sqrt{3}$)

o) $(5 - \sqrt{3})^2 =$ (Soluc: $28 - 10\sqrt{3}$)

p) $(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3}) =$ (Soluc: 22)

q) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 =$ (Soluc: $8 + 2\sqrt{15}$)

r) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 =$ (Soluc: $8 - 2\sqrt{15}$)

s) $(2\sqrt{3} + 5)^2 =$ (Soluc: $37 + 20\sqrt{3}$)

t) $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 =$ (Soluc: $30 + 12\sqrt{6}$)

u) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) =$ (Soluc: -6)

θ) $(2\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(3\sqrt{2} + 2) =$ (Soluc: $-30 + 6\sqrt{10} + 4\sqrt{5} - 10\sqrt{2}$)

ι) $(2\sqrt{27} - 3)(1 + \sqrt{3}) =$ (Soluc: $15 + 3\sqrt{3}$)

κ) $(3\sqrt{8} - 4\sqrt{2})(2\sqrt{2} - 5\sqrt{8}) =$ (Soluc: -32)

λ) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 =$ (Soluc: 22)

Racionalización:

5. Racionalizar denominadores, y simplificar (véase el 1^{er} ejemplo):

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{5}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{\sqrt{5}}{5})$$

$$\text{c) } \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{2\sqrt{7}-\sqrt{14}}{7})$$

$$\text{d) } \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \sqrt{2}+1)$$

$$\text{e) } \frac{4}{\sqrt{6}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{2\sqrt{6}}{3})$$

$$\text{f) } \frac{3}{2\sqrt{3}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{g) } \frac{12}{\sqrt{8}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } 3\sqrt{2})$$

$$\text{h) } \frac{\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3})$$

$$\text{i) } \frac{3\sqrt{10}}{5\sqrt{6}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{\sqrt{15}}{5})$$

$$\text{j) } \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \quad \quad \quad (\text{Soluc: } \frac{3}{2}\sqrt{x})$$

6. Racionalizar denominadores, y simplificar (veáse el 1^{er} ejemplo):

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{3}{\sqrt[5]{9}} = \quad (\text{Soluc: } \sqrt[5]{27})$$

$$\text{c) } \frac{8}{\sqrt[6]{8}} = \quad (\text{Soluc: } 4\sqrt{2})$$

$$\text{d) } \frac{10}{3 \sqrt[4]{125}} = \quad (\text{Soluc: } \frac{2}{3} \sqrt[4]{5})$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt[5]{25}}{5 \sqrt[3]{5}} = \quad (\text{Soluc: } \frac{\sqrt[15]{5}}{5})$$

7. Racionalizar denominadores, y simplificar (véase el ejemplo):

$$\text{a) } \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1-3} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{b) } \frac{9}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \quad (\text{Soluc: } \frac{9}{4}\sqrt{7} + \frac{9}{4}\sqrt{3})$$

$$\text{c) } \frac{4(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-1} = \quad (\text{Soluc: } 7+3\sqrt{5})$$

$$\text{d) } \frac{3(\sqrt[3]{7}+1)}{\sqrt{7}+2} = \quad (\text{Soluc: } 5-\sqrt{7})$$

$$\text{e) } \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \quad (\text{Soluc: } 2+\sqrt{3})$$

$$\text{f) } \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \quad (\text{Soluc: } 2+\frac{3}{2}\sqrt{2})$$

$$\text{g) } \frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \quad (\text{Soluc: } -13+6\sqrt{3})$$