RELACIÓN 1 EJERCICIOS: CONTINUIDAD

Ejercicio 1:

Estudia la continuidad de las funciones en $x = 3$, y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.

a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

a) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+3) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$$

Como $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función es continua en $x = 3$.

b) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x-1} = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-2) = 1 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

d) $f(3) = -12$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-15) = -12 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim\limits_{x \to 3} f(x), \text{ y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e) $f(3) = -2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

Como $f(3) \neq \lim_{x \to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

Ejercicio 2:

¿Qué valor debe tomar a para que las funciones sean continuas?

a) $f(-2) = a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{3}{x+1} = -3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-2x-7) = -3 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to -2} f(x) = -3$$

La función es continua si $f(-2) = \lim_{x \to -2} f(x) \to a = -3$.

Ejercicio 3:

Calcula k para que la función $y = f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$:

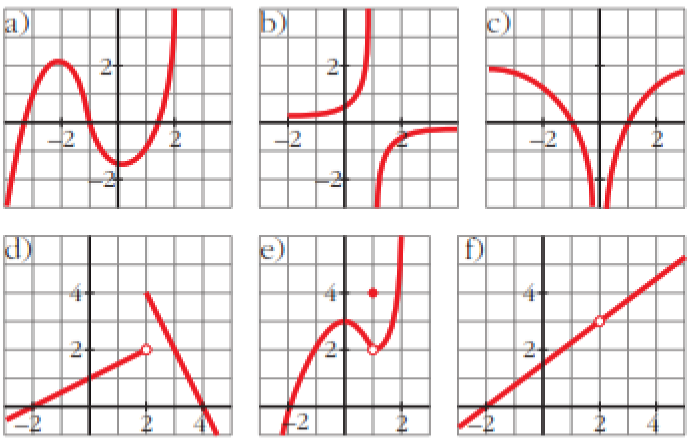
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array}\right\} \quad 21 + k = 7 \ \to \ k = -14$$

Ejercicio 4:

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

Ejercicio 5:

Indica para qué valores de $\mathbb{R}$ son continuas las siguientes funciones:

a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$

b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \dfrac{1}{x}$

d) $y = \sqrt{-3x}$

e) $y = \sqrt{5 - 2x}$

f) $y = x^2 - x$

a) $\mathbb{R}$

b) $[3, +\infty)$

c) $\mathbb{R} - \{0\}$

d) $(-\infty, 0]$

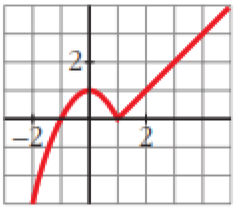
e) $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

f) $\mathbb{R}$

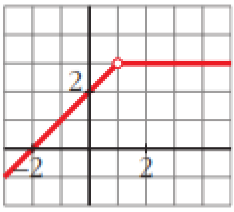
Ejercicio 6:

Comprueba que las gráficas de estas funciones corresponden a la expresión analítica dada y di si son continuas o discontinuas en $x = 1$.

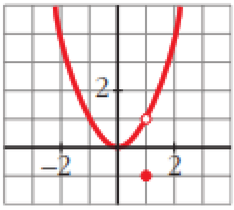
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua.

b) Discontinua.

c) Discontinua.

Ejercicio 7:

Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **es continua en** $x = 0$.

Recuerda que para que f ***sea continua en*** $x = 0$, ***debe verificarse que:***

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$

Es continua en $x = 0$.

Ejercicio 8:

Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

Ejercicio 9:

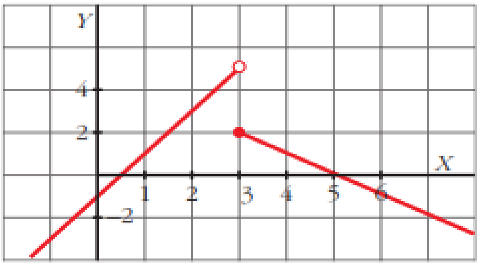
Representa las siguientes funciones y explica si son discontinuas en alguno de sus puntos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

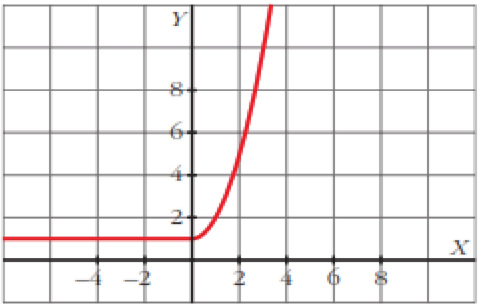
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

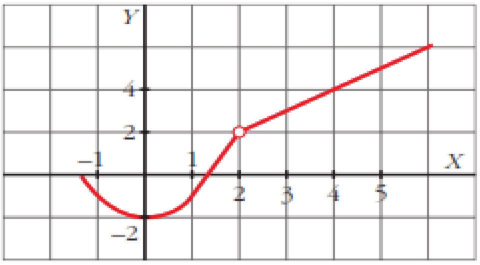
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



Ejercicio 10:

Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} 5 = 3 + k \rightarrow k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} 5 = 4 + 2k \rightarrow k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \rightarrow k = 1$

Ejercicio 11:

Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2-1)/(x-1) & \text{si } x \ne 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

Ejercicio 12:

Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) < \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array}\right\}$

Para que exista el límite, debe ser:

$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

Ejercicio 13:

Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \ne 1 \text{ y } x \ne 2 \\ 2k + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Debe ocurrir que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2k + 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2 \Rightarrow 2k + 1 = -2,\ k = -\frac{3}{2}$$

Ejercicio 14:

Decide el mayor conjunto de números reales donde sean continuas las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 5}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

h) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 8}$

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$. $f(x)$ es continua en $\mathbf{R}$, ya que es una función polinómica.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$. El denominador no se anula en $\mathbf{R}$; por tanto, f es continua en $\mathbf{R}$.

c) $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x - 2}$. El denominador se anula en $x = 2$; por tanto, f es continua en $\mathbf{R} - \{2\}$.

d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 2x - 5}$. El denominador se anula en $x = -1 \pm \sqrt{6} \Rightarrow f$ es continua en $\mathbf{R} - \{-1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}\}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4}$. El denominador se anula en $x = -1$ y $x = -4 \Rightarrow f$ es continua en $\mathbf{R} - \{-4, -1\}$.

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$. $x^2 + x + 5 \geqslant 0$ para cualquier valor real $\Rightarrow f$ es continua en $\mathbf{R}$.

g) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 4}$. $9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left[\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$ y f es continua para estos valores de x.

h) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 8}$. $2x^2 + 3x - 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \dfrac{-3 - \sqrt{73}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{-3 + \sqrt{73}}{4}, \infty\right)$; por tanto, f es continua.

Ejercicio 15:

Investiga para qué valores reales son continuas las siguientes funciones y clasifica las posibles discontinuidades que encuentres.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < 1 \\ x + 7 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < 1 \\ x - 7 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 6}{x} & \text{si } x < 1 \\ x + 7 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

a) Si $x \neq 1$, f es continua por estar definida por polinomios.

Para $x = 1$ es inmediato ver que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 6) = 8$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 7) = 8$.

Como los límites laterales coinciden, la función también es continua en $x = 1$; por tanto, f es continua en $\mathbf{R}$.

b) Si $x \neq 1$, f es continua por estar definida por polinomios.

Para $x = 1$ es inmediato ver que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 6) = 8$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 7) = -6$.

Como los límites laterales no coinciden, la función no es continua en $x = 1$; por tanto, f es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$.

c) f presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 0$.

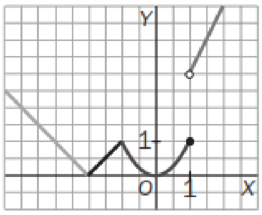
Además se verifica que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 6}{x} = 8$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 7) = 8$.

Como los límites laterales en $x = 1$ son finitos y coinciden, se concluye que la función es continua en $\mathbf{R} - \{0\}$.

<u>Ejercicio 16</u>:

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **y dibújala.**

Como las funciones que definen f son continuas, los únicos puntos donde podría haber problemas son los de abscisas $x = -1$ y $x = 1$.



$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x + 2| = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$

f es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$.

<u>Ejercicio 17</u>:

Determina a y b para que sea continua en todo R la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

f es continua en $\mathbf{R} - \{0, 3\}$, ya que está definida por funciones polinómicas. Para que f sea continua en $x = 0$ y $x = 3$, los límites laterales en dichos puntos deben coincidir.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \Rightarrow b = 1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (ax + b) = 3a + b$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 5) = -2 \Rightarrow 3a + b = -2 \Rightarrow a = -1$

<u>Ejercicio 18</u>:

Calcula los valores de m y n para que la función $f(x) = \begin{cases} 3 & x \leqslant 0 \\ mx + n & 0 < x < 2 \\ -1 & x \leqslant 2 \end{cases}$ **sea continua en todos los números reales.**

f es continua en $\mathbf{R} - \{0, 2\}$, ya que está definida por funciones polinómicas. Para que f sea continua en $x = 0$ y $x = 2$, los límites laterales en dichos puntos deben coincidir.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 3 = 3$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (mx + n) = n \Rightarrow n = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (mx + n) = 2m + n$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} -1 = -1 \Rightarrow 2m + n = -1 \Rightarrow m = -2$