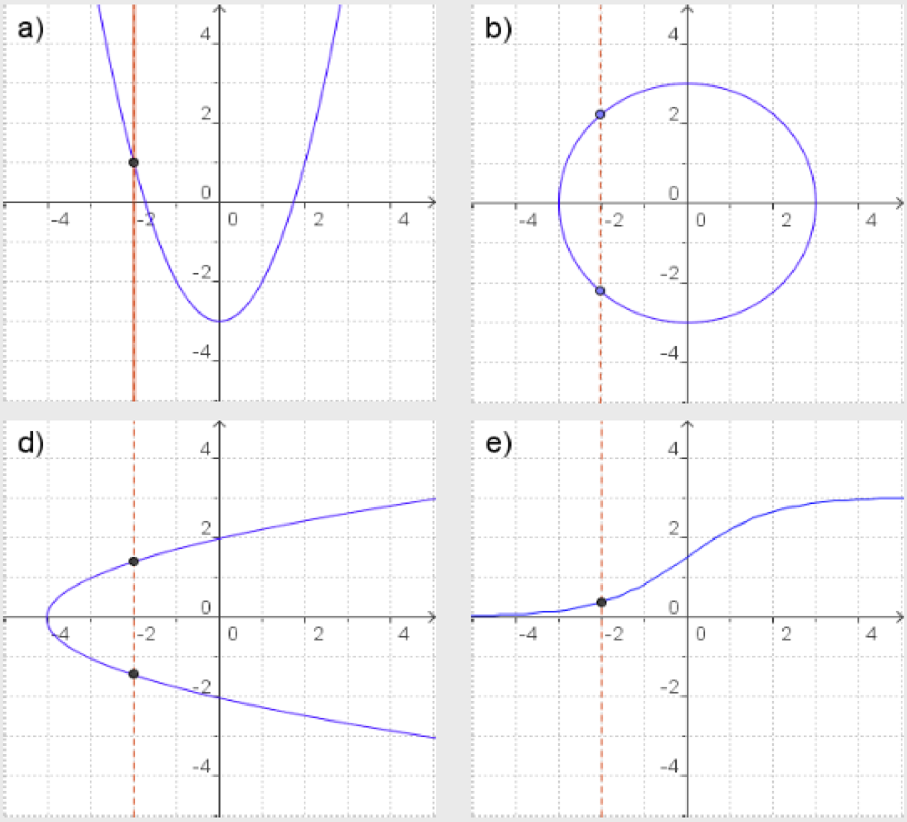
RELACIÓN 1 EJERCICIOS: FUNCIONES. PROPIEDADES GLOBALES

Ejercicio 1:

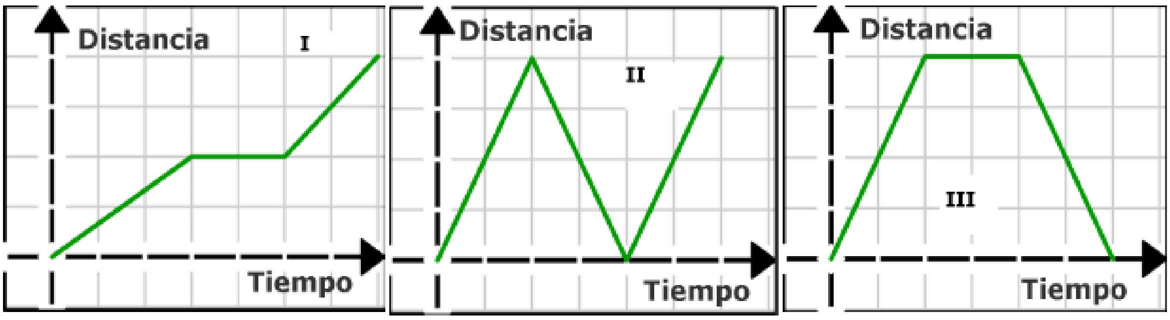
De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.



- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- No son gráficas de una función b) y d)

Ejercicio 2:

Asocia cada enunciado con su gráfica correspondiente:



(A) Pedro sale de su casa al instituto. Por el camino, se da cuenta que ha olvidado el libro de matemáticas. Vuelve a por el libro y luego se va al instituto sin pararse.

A esta situación le corresponde la gráfica: **I I**

(B) Un teleférico sube hasta una pista. Allí para 10 minutos y baja de nuevo hasta la base.

A esta situación le corresponde la gráfica: **I I I**

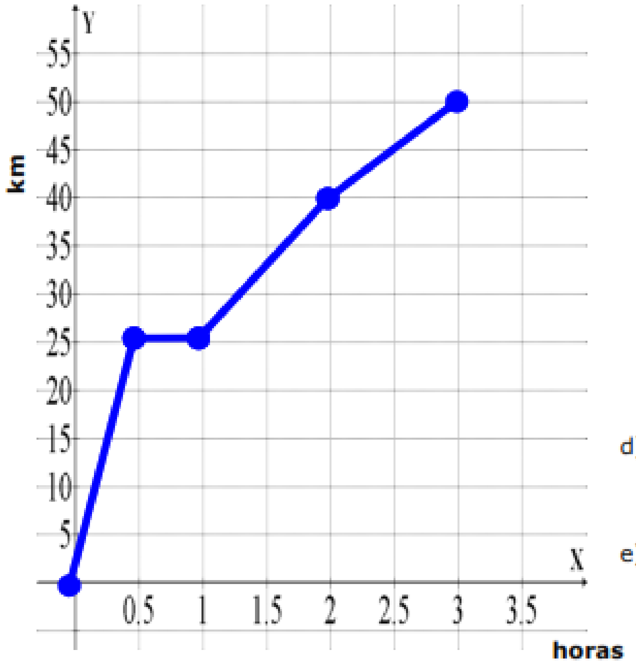
(C) María sale de su casa hacía el gimnasio.
Por el camino se encuentra a Luis y se para a hablar con él. Después sigue andando hasta el gimnasio

A esta situación le corresponde la gráfica: **I**

Ejercicio 3:

Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado.
Esta mañana, Pablo salió a hacer una ruta en bicicleta.

- Tardó media hora en llegar al primer punto de descanso, que estaba a 25 km de su casa.
- Estuvo parado durante 30 minutos.
- Tardó 1 hora en recorrer los siguientes 15 km
- Tardó otra hora en recorrer los 10 km que faltaban para llegar a su destino.



a) ¿Qué escala estamos usando en cada eje?

Eje X: **1 cuadrito = 0,5 h**

Eje Y: **1 cuadrito = 5 km**

b) ¿Cuánto tiempo tardó en hacer la ruta?

3 h

c) ¿Cuántos kilómetros recorrió?

50 km

d) ¿Qué distancia recorrió las dos últimas horas?

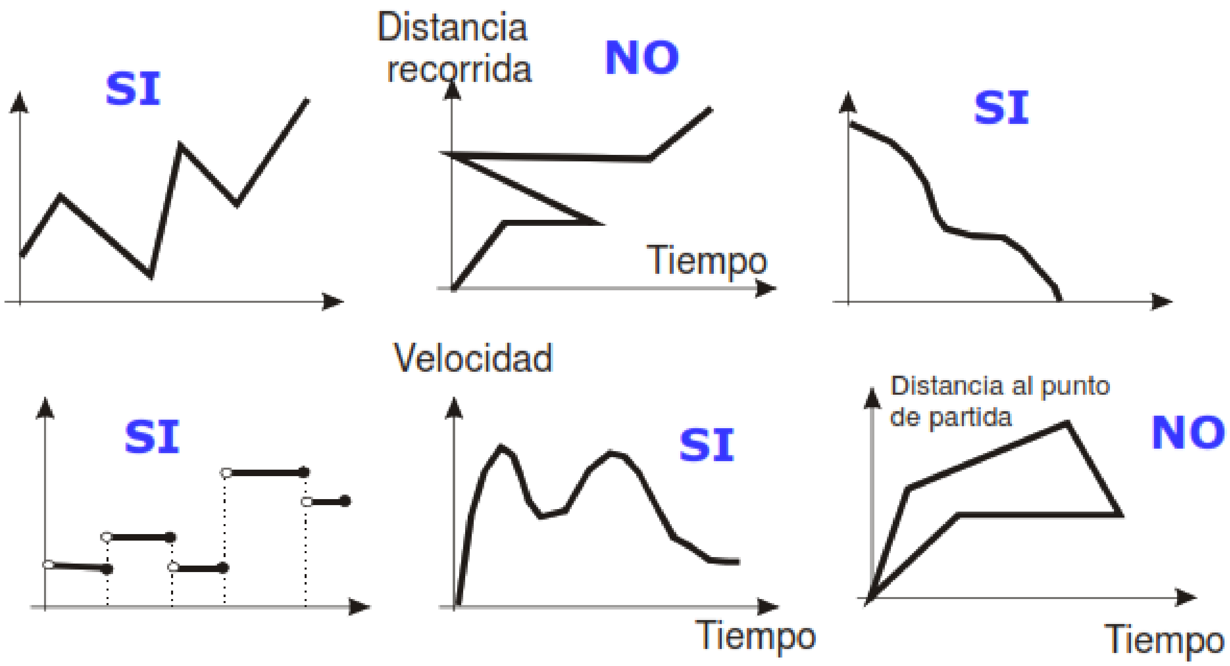
25 km

e) ¿Qué velocidad media llevó las dos últimas horas?

v = 25 km : 2 h = 12,5 km/h

Ejercicio 4:

De las siguientes gráficas, ¿cuáles corresponden a funciones y cuáles no?



Ejercicio 5:

- La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad.

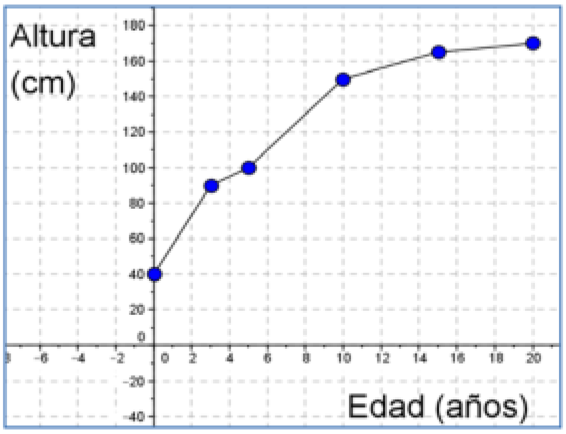
Observando la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad medía 1 metro?

b) ¿Cuánto medía al nacer?

c) ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?

d) ¿En qué periodo creció menos?



olución:

a) Mirando a la gráfica observamos que el punto (5, 100) es el que nos piden pues la ordenada es 100 (1 metro), luego Laura tenía 5 años.

b) El punto que representa el nacimiento es el (0, 40), luego midió 40 centímetros

c) Del mismo modo observamos que a los 10 años medía 155 centímetros y a los 20 años 170.

d) En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo Laura creció menos.

Ejercicio 6:

En las siguientes relaciones di si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuáles son las variables dependientes e independientes.

a) El consumo de un coche y la velocidad a la que circula.
b) El perímetro de un polígono regular y la longitud de su lado.
c) El número de habitantes de los pueblos y la temperatura media en verano.
d) La altura y el número de hermanos de los estudiantes de 2º de E.S.O.

Solución

a) El consumo de un coche sí está en función de la velocidad a la que circula. En este caso el consumo es la variable dependiente y la velocidad la variable independiente.

b) También aquí se da una relación funcional, el perímetro es función del lado. El perímetro es la variable dependiente y el lado la independiente.

c) En este caso no hay una relación funcional pues hay pueblos grandes y pequeños no teniendo que ver con la temperatura media en varano que haga en ellos.

d) Tampoco hay relación funcional en este caso. Puedes comprobarlo en tu clase.

Ejercicio 7:

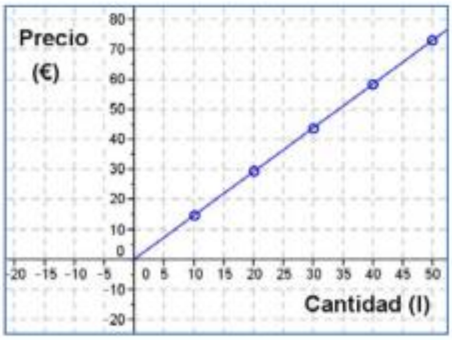
- Si observamos el precio de la gasolina en un día concreto al llenar el depósito de un coche podemos estudiar la relación entre el número de litros de gasolina y lo que pagamos.

El precio que pagamos es función de la cantidad de gasolina que echamos y puede venir dada de las siguientes maneras:

- Descripción verbal: *"El litro de gasolina se situó en la primera semana de agosto en 1,46 €"*.
- Expresión algebraica (fórmula): $\boldsymbol{p = 1{,}46 \cdot l}$ (donde $\boldsymbol{p}$ es el precio y $\boldsymbol{l}$ es la cantidad de gasolina)
- Tabla de valores:

Cantidad (l)	10	20	30	40	50
Precio (€)	14,60	29,20	43,80	58,40	73,00

- Gráfica:



Ejercicio 8:

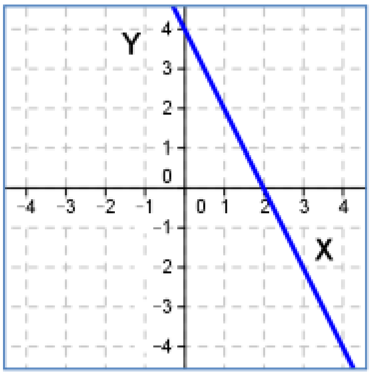
- Cuando tenemos una función que relaciona dos magnitudes que desconocemos, que las llamamos **X** e **Y**, la podemos tener definida por una fórmula (expresión algebraica).

Por ejemplo $\boldsymbol{y = 4 - 2 \cdot x}$

De la que podemos elaborar una tabla de valores como la siguiente:

X	0	1	2	3	4
Y	4	2	0	−2	−4

y, a partir de ella, dibujar una gráfica:



En este caso sí podemos unir los puntos, porque mediante su fórmula para cualquier valor ***x*** de la variable **X** podemos calcular el valor ***y*** de la variable **Y**.

Podríamos dar, también, una descripción verbal que defina la relación entre estas variables, por ejemplo: "*A cada número le corresponden cuatro unidades menos el doble del número*"

Nota: En muchas ocasiones no es posible, a nuestro nivel, encontrar la fórmula que define una función dada como una tabla de valores, su descripción verbal o su gráfica.

Ejercicio 9: Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 + x - 8$

Sol.:

Dado que se trata de una función polinómica, su dominio son todos los números reales: $Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 4$

Sol.:

Como se trata de una función polinómica, en este caso una función constante, su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

c) $y = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{3}$

Sol.:

Se trata de una función polinómica pues es la función $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x - 1$ que resulta del expandir la fracción.

Su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

d) $y = \dfrac{-1}{x - 8}$

Sol.:

Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el 8: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{8\}$

e) $f(x) = \dfrac{x - 4}{5x + 10}$

Sol.:

Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$5x + 10 = 0 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

f) $f(x) = 6 + \dfrac{x^2}{3x - 2}$

Sol.:

Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

h) $y=-3+x+\dfrac{6}{x^2+6x}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2+6x=0 \Rightarrow x\cdot(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-6,0\}$

i) $y=\dfrac{-5x+1}{x^2+x-6}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{2}=2 \\ x=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,2\}$

j) $y=\dfrac{x+9}{x^2+x+12}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x^2+x+12=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-48}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-47}}{2}$, que no tiene soluciones, es decir, no se anula nunca el denominador, y así su dominio son todos los números reales. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}$

k) $y=\dfrac{2x+3}{x\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$

Sol.:

Veamos dónde se anula el denominador:

$x\cdot(x+2)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$, por lo que: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,-2,-1\}$

Ejercicio 10: Calcula el dominio de las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \sqrt[3]{x+2}$

Sol.:

Primero nos fijamos en el índice de radicando que es 3, impar, luego la raíz se puede calcular siempre que el radicando tenga sentido. En este caso, como el radicando es $x+2$ que es un polinomio y siempre tiene sentido, se tiene que: $Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt[7]{\dfrac{x}{5x+10}}$

Sol.:

El índice es impar, 7, y entonces nos fijamos en el radicando $\dfrac{x}{5x+10}$ en el cual hemos de descartar los números reales que anulen el denominador.

$5x+10=0 \Rightarrow 5x=-10 \Rightarrow x=-2$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$

Sol.:

El índice es impar, 3, y entonces nos fijamos en el radicando $\dfrac{2}{x}$ en el cual hemos de descartar los números reales que anulen el denominador.

$x=0$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

d) $f(x) = \sqrt{-2x+5}$

Sol.:

El índice es par, luego la raíz tiene sentido cuando el radicando sea positivo o 0. Para hacerlo vemos primero dónde se anula el radicando: $-2x+5=0 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Ahora construimos una tabla de signos para saber dónde es positivo: con los dos intervalos que nos salen al usar $\dfrac{5}{2}$ para dividir la recta real.

En cada uno de esos intervalos cogemos un número y sustituimos en el radicando y consideramos el signo del número resultante.

	$(-\infty,\frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2},+\infty)$
$-2x+5$	Probando con $x=0$ nos resulta $-2\cdot 0+5=5$ que es positivo **+**	Probando con $x=7$ nos resulta $-2\cdot 7+5=-14+5=-9$ que es negativo **-**

El dominio es ese intervalo donde ha salido positivo, incluyendo el extremo $x=\frac{5}{2}$, pues la raíz cuadrada de 0 tiene sentido. Por tanto, $Dom(f)=(-\infty,\frac{5}{2}]$

e) $y=\sqrt[8]{3x-6}$

Sol.:

El índice es par, luego la raíz tiene sentido cuando el radicando sea positivo o 0. Para hacerlo vemos primero dónde se anula el radicando: $3x-6=0 \Rightarrow x=2$

Ahora construimos una tabla de signos para saber dónde es positivo: con los dos intervalos que nos salen al usar $x=2$ para dividir la recta real.

En cada uno de esos intervalos cogemos un número y sustituimos en el radicando y consideramos el signo del número resultante.

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$3x-6$	Probando con $x=0$ nos resulta $3\cdot 0-6=-6$ que es negativo **-**	Probando con $x=4$ nos resulta $3\cdot 4-6=6$ que es positivo **+**

Por tanto, $Dom(f)=[2,+\infty)$

f) $y=\sqrt{x^2-3x-4}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,4)$	$(4,+\infty)$
x^2-3x-4	Probando con $x=-2$ nos resulta $(-2)^2-3\cdot(-2)-4=4+6-4=6$ que es positivo	Probando con $x=0$ nos resulta $0^2-3\cdot 0-4=-4$ que es negativo	Probando con $x=5$ nos resulta $5^2-3\cdot 5-4=25-15-4=6$ que es positivo

	+	**-**	**+**

Como los extremos tienen sentido: $Dom(y) = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

g) $y = \sqrt[6]{2x^2 - 1}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$
$2x^2 - 1$	Probando con $x = -2$ nos resulta $2\cdot(-2)^2 - 1 = 8 - 1 = 7$ que es positivo **+**	Probando con $x = 0$ nos resulta $2\cdot 0^2 - 1 = -1$ que es negativo **-**	Probando con $x = 5$ nos resulta $2\cdot 5^2 - 1 = 50 - 1 = 49$ que es positivo **+**

Como los extremos tienen sentido: $Dom(y) = (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

h) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ No existen soluciones. Se trata de un caso especial, en el cual el radicando siempre es positivo o siempre es negativo. Comprobamos con un valor de x si es positivo o negativo, por ejemplo, para $x = 0$ sustituimos: $0^2 + 0 + 1 = 1 > 0$. Podemos deducir que siempre es positivo, así, por tanto, $Dom(y) = \mathbb{R}$

i) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x}{x-3}}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el numerador y el denominador del radicando:

Sol.:

$\begin{cases} -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\frac{-2x}{x-3}$	Probando con $x=-2$ nos resulta $\frac{4}{-5}=-\frac{4}{5}$ que es negativo **-**	Probando con $x=1$ nos resulta $\frac{-2}{-2}=1$ que es positivo **+**	Probando con $x=5$ nos resulta $\frac{-10}{2}=-5$ que es negativo **-**

Por lo que obtenemos que es factible en el intervalo $(0,3)$. Veamos que ocurre en $x=0$ y en $x=3$ para ver si son del dominio.

En $x=0$ al sustituir nos queda $f(0)=\sqrt{\frac{-2\cdot 0}{0-3}}=\sqrt{0}=0$ luego $x=0$ es del dominio.

En $x=3$ al sustituir nos queda $f(0)=\sqrt{\frac{-2\cdot 3}{3-3}}=\sqrt{\frac{-6}{0}}\Rightarrow \text{No } \exists$ luego $x=3$ NO es del dominio.

Concluimos entonces que $Dom(f)=[0,3)$

j) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{-2x}{x-3}}$ Es parecida a la función anterior, pero como el índice es impar, vemos dónde se anula el denominador del radicando que serán los puntos que no son del dominio:

Sol.:

$x-3=0\Rightarrow x=3\Rightarrow \; Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

<u>Ejercicio 11</u>:

Sin necesidad de representarlas, hallar **analíticamente** el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$

b) $f(x)=\frac{8x}{x+5}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-8}$

d) $f(x)=\frac{2}{4x-x^2}$

e) $f(x)=\frac{2x}{x^2-16}$

f) $f(x)=\frac{2x}{x^2+16}$

g) $f(x)=\sqrt{x+5}$

h) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$

i) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

j) $f(x)=\sqrt{4-x}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

m) $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$

n) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2-16}}$

o) $f(x)=\frac{x+1}{(2x-3)^2}$

p) $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x^2-x-6}}$

q) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x-12}}$

r) $f(x)=\frac{3x}{x^2+4}$

s) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

t) $f(x)=\frac{14}{x^2+2x+1}$

u) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

v) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

w) $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x^2-4}}$

(*Sol:* ***a)*** *IR;* ***b)*** *IR-[-5};* ***c)*** *IR-{-2,4};* ***d)*** *IR-{0,4};* ***e)*** *IR-[±4};* ***f)*** *IR;* ***g)*** *[-5,∞);* ***h)*** *(-5,∞);* ***i)*** *[5/2,∞);* ***j)*** *(-∞,4];* ***k)*** *(-∞ ,-3]U[3,∞);* ***l)*** *(-∞,-4]U[2,∞);* ***m)*** *IR;* ***n)*** *(-4,0]U(4,∞);* ***o)*** *IR-{3/2};* ***p)*** *[-3,-2)U(3,∞);* ***q)*** *(4,∞);* ***r)*** *IR;* ***s)*** *(-∞,2)U(3,∞);* ***t)*** *IR-{-1};* ***u)*** *IR;* ***v)*** *IR;* ***w)*** *IR-{±2}*)

Ejercicio 12:

Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{7}$ b) $f(x) = \dfrac{7}{x-3}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

Ejercicio 13:

Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{x+3}$ c) $y = \sqrt{x^2-4x+4}$ e) $y = \sqrt{x^2+2x+9}$

b) $y = \sqrt{2x^2+3x-2}$ d) $y = \sqrt{5-2x}$ f) $y = \sqrt{6+x-x^2}$

a) $\text{Dom } f = [-3, +\infty)$

b) $2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f = \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$

e) $x^2 + 2x + 9 = 0 \rightarrow \Delta = -32 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f) $6 + x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$\text{Dom } f = [-2, 3]$