

RELACIÓN 2 EJERCICIOS: LÍMITES DE FUNCIONESEjercicio 1:

Representa las funciones.

$$f(x) = 2x - 3$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 1$$

A partir de la gráfica, calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

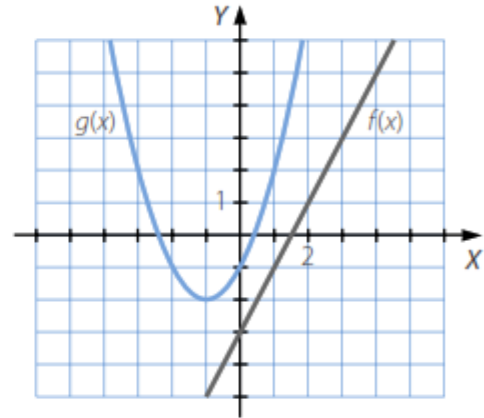
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Ejercicio 2:

Calcula los límites, y comprueba el resultado con tu calculadora.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2} = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x} = -\frac{5}{3}$

Ejercicio 3:

Calcula los límites indicados en la función.

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 6^+} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 6^-} g(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (2x + 4) = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = 10$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 6^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (x^2 - 2x + 1) = 25$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 6^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} (x^2 - 2x + 1) = 25$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x + 4) = 12$$

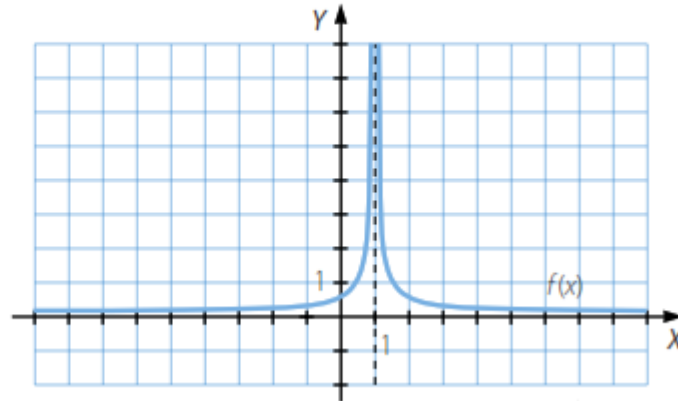
$$f) \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 2x + 1) = 9$$

Ejercicio 4:

Observa las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y halla los siguientes límites.

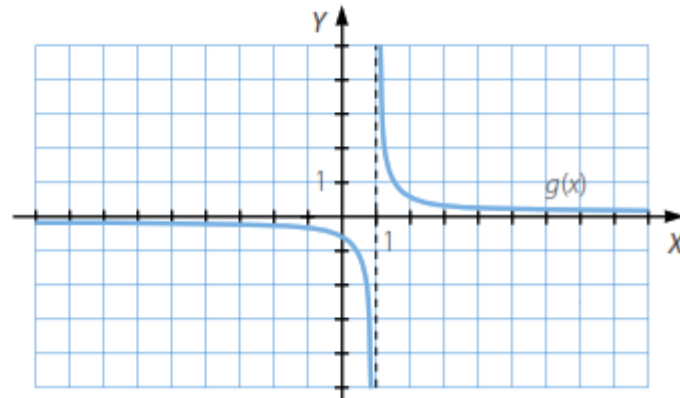
$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$



$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$



$$a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$$

Ejercicio 5:

Determina los límites, y si es preciso, calcula los límites laterales.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2} \rightarrow \frac{10}{0} & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 6}{x - 2} = -\infty & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 6}{x - 2} = +\infty \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2} \rightarrow \frac{3}{0} & \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{9 - x^2} = +\infty & \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{9 - x^2} = -\infty \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} \rightarrow \frac{24}{0} & \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} = +\infty & \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} = -\infty \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \rightarrow \frac{2}{0} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty
 \end{array}$$

Ejercicio 6:

Dada la función $f(x)$ definida a trozos, encuentra los límites.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x - 1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 6x - 32 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \\
 \\
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3 & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -5 & \\
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3 & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ no existe.} & \\
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -3 & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{9}{2} & &
 \end{array}$$

Ejercicio 7:

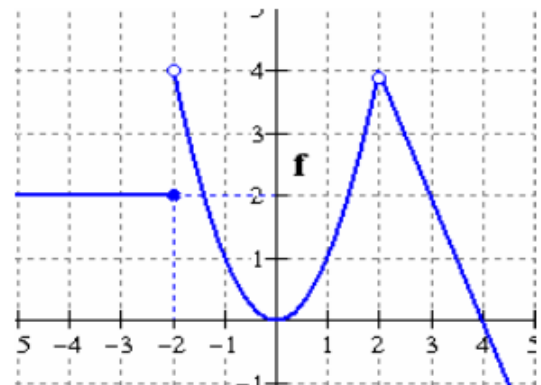
Problema 76. En la grafica de la función f dada encuentra los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, (c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, (d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, (e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, (f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, (g) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, (h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Solución: (a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$; (b) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 4$; (c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe, porque

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$; (d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$; (e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$; (f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$

(g) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ porque $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$; (h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$.



Ejercicio 8:

Ejercicio 9:

Ejercicio 10:

Ejercicio 11:

Problema 85. Encuentre el $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{x^2-5x+6}$

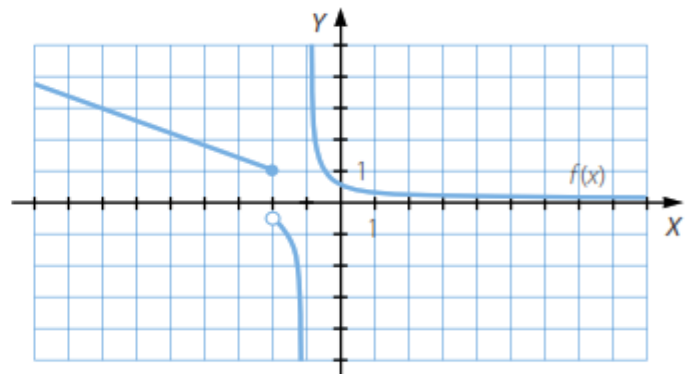
Solución: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{(x-3)(x-2)}$

Cuando $x \rightarrow 2^+$, vemos que $(3x-1) \rightarrow 5$, $(x-3) \rightarrow -1$, y $(x-2) \rightarrow 0^+$; entonces el numerador tiende a 5, pero el denominador es negativo y tiende a cero. Por lo tanto

concluimos que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-1}{x^2-5x+6} = -\infty$

Ejercicio 12:

Observa la gráfica de la función y determina los límites que se indican.



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe.

d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ no existe.

Ejercicio 13:

Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

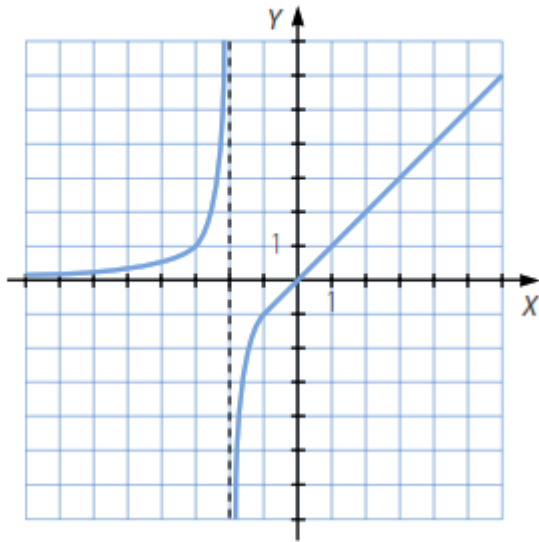
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

Respuesta abierta.

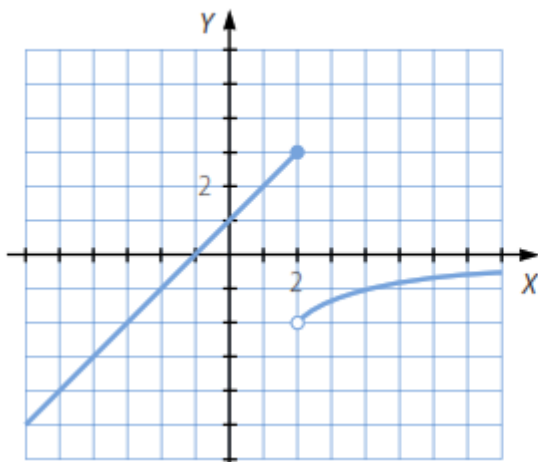


Ejercicio 14:

Realiza la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

Respuesta abierta.



Ejercicio 15:

- Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2 , 0 y 2

b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en 2 , 0 y 3

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 y -3

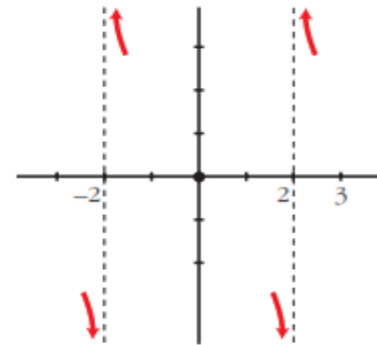
d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 y -3

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x + 2)(x - 2)}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

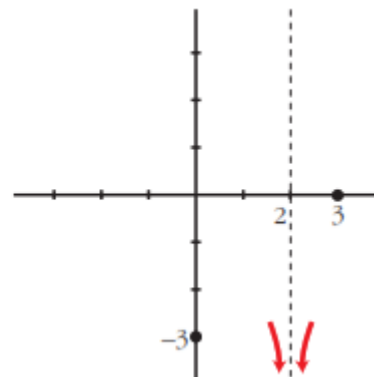


b) $f(x) = \frac{4(x - 3)}{(x - 2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

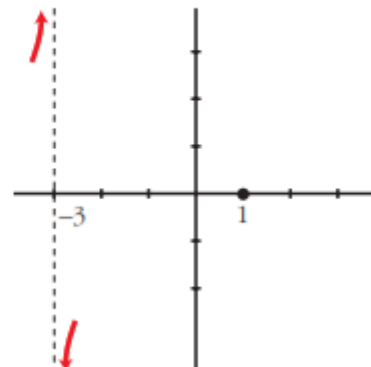
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



c) $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

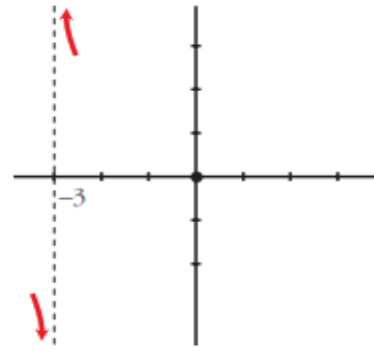
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

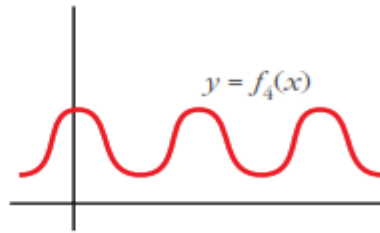
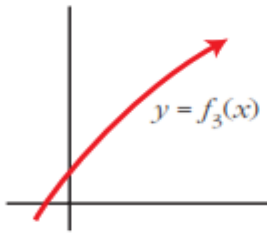
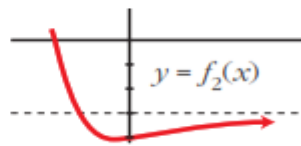
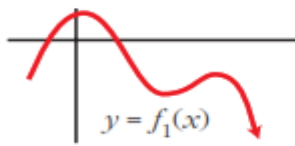
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



Ejercicio 16:

Di el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe.}$$

Ejercicio 17:

Sobre la gráfica de la función $f(x)$, halla:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

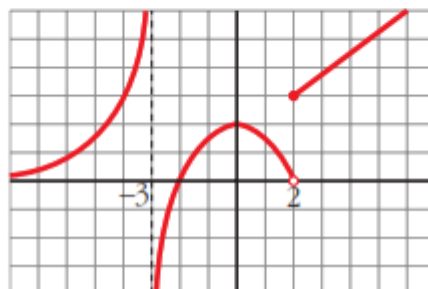
d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

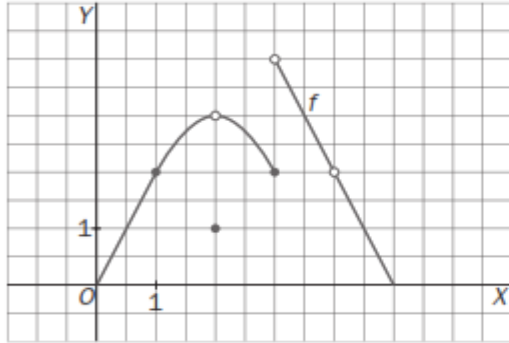
h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2 d) 0
e) 0 f) 3 g) $+\infty$ h) 0

Ejercicio 18:

Analiza la siguiente gráfica que representa una función $f(x)$ y calcula:



- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ f) $f(0)$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ g) $f(1)$
c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ h) $f(2)$
d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ i) $f(3)$
e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ j) $f(4)$

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ No existe c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ e) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ g) $f(1) = 2$ i) $f(3) = 2$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ No existe f) $f(0) = 0$ h) $f(2) = 1$ j) $f(4)$ No existe

Ejercicio 19:

Halla los siguientes límites.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-3}{2x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}}$
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-x+2}} = \frac{1}{2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3+3x^2}}{x+5} = +\infty$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-3x^2}-3}{2x+1} = 1$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-6}{\sqrt[5]{x^{13}-x^5}} = 0$

Ejercicio 20:

Halla, si existen, estos límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2} = -\infty$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$ No existe. Ver casos f) y g)
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x^3-3)}{x^2(x-2)} = \frac{10}{4 \cdot 0^+} = +\infty$
c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x^3-3)}{x^2(x-2)} = \frac{10}{4 \cdot 0^-} = -\infty$
d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = -\infty$

Ejercicio 21:

Halla los siguientes límites, si existen, en la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & x < 1 \\ 2x-1 & 1 \leq x < 4 \\ \sqrt{x} + x + 1 & x \geq 4 \end{cases}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-2} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe. Ver casos c) y d)

f) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x} + x + 1) = 7$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-2} = -1$

g) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 1) = 7$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$

h) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7$

Ejercicio 22:

En cada caso, esboza el dibujo de la gráfica de una función que cumpla las condiciones dadas.

a) • $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

• $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$

• Si $x > 0$, $f(x) < 2$

• Asíntota horizontal $y = 2$ en $-\infty$

• Asíntota oblicua $y = x$

• Asíntota vertical en $x = 1$

• Discontinuidad evitable en $(1, -2)$

