UNIDAD 2: EJERCICIOS DE POLINOMIOS

Ejercicio 1:

Calcular el **valor numérico del polinomio** P(x) para el valor de x indicado:

a) $P(x)=x^2+1$, para x=1

b) $P(x)=x^3+1$, para x=−1

c) $P(x)=x^2+x+2$, para x=2

d) $P(x)=-x^2-x-2$, para x=−2

e) $P(x)=\frac{x^2}{2}-5x+\frac{1}{5}$, para x=−2

f) $P(x)=x^3+2x+3$, para x=−1/2

g) $P(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{3}+1$, para x=1/3

h) $P(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{5x}{3}+1$, para x=0

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 0; **c)** 8; **d)** −4; **e)** 61/5; **f)** 15/8; **g)** 25/18; **h)** 1)*

Ejercicio 2:

En cada caso, hallar k para el valor numérico indicado:

a) $P(x)=2x^2-6x-k$, siendo P(1)=7 *(Soluc: k= −11)*

b) $P(x)=-2x^4-6x^3+kx+29$, siendo P(−2)=35 *(Soluc: k=5)*

Ejercicio 3:

Dados $P(x)=2x^5-3x^4+3x^2-5$ y $Q(x)=x^5+6x^4-4x^3-x+7$, hallar P(x)+Q(x) y P(x)−Q(x)

a) P(x)+Q(x)= *(Soluc: $3x^5+3x^4-4x^3+3x^2-x+2$)*

b) P(x)−Q(x)= *(Soluc: $x^5-9x^4+4x^3+3x^2+x-12$)*

Ejercicio 4:

Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) P(x)+Q(x)+R(x)= *(Soluc: $6x^3+13x^2-5x+11$)*

b) P(x)−Q(x)−R(x)= *(Soluc: $2x^3-x^2+x-5$)*

c) P(x)+3Q(x)−2R(x)= *(Soluc: $10x^3-8x^2-x+22$)*

Ejercicio 5:

Efectuar los siguientes **productos**:

a) $(3x^2+5x-6)\,(8x^2-3x+4)$ *(Soluc: $24x^4+31x^3-51x^2+38x-24$)*

b) $(5x^3-4x^2+x-2)\,(x^3-7x^2+3)$ *(Soluc: $5x^6-39x^5+29x^4+6x^3+2x^2+3x-6$)*

c) $(2x^4-3x^2+5x)\,(3x^5-2x^3+x-2)$ *(Soluc: $6x^9-13x^7+15x^6+8x^5-14x^4-3x^3+11x^2-10x$)*

Ejercicio 6:

Efectuar las siguientes **operaciones combinadas**:

a) $(2x^2+x+3/2)\,(2x^2-3)+8x+7/2$ *(Soluc: $4x^4+2x^3-3x^2+5x-1$)*

b) $(3x^3+5x^2/2-3x+13)\,(2x^2+2)-(-6x+24)$ *(Soluc: $6x^5+5x^4+31x^2+2$)*

c) $(3x^2-6x+1)\,(x^3-2x/3+2)+14x/3$ *(Soluc: $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2$)*

d) $-x/3+1/3+(2x^2-x/3-2/3)\,(3x^2+2)$ *(Soluc: $6x^4-x^3+2x^2-x-1$)*

Ejercicio 7:

Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

a) $[R(x)]^2$ **b)** $P(x)-Q(x)\cdot R(x)$ **c)** $P(x)\cdot[Q(x)+R(x)]$ **d)** $P(x)\cdot Q(x)\cdot R(x)$

e) $Q(x)\cdot[P(x)-R(x)]$ **f)** $P(x)-Q(x)\cdot Q(x)$ **g)** $-Q(x)+P(x)\cdot 2Q(x)$

*(Soluc: **a)** $49x^4-28x^3+18x^2-4x+1$; **b)** $-14x^5+4x^4+9x^3-45x^2+13x-4$; **c)** $8x^6+40x^5+26x^4+6x^3+75x^2-25x+24$;*
__d)__ $56x^8+68x^7-72x^6+224x^5+244x^4-179x^3+225x^2-59x+21$; __e)__ $8x^6-2x^5-4x^4+33x^3-7x^2-2x+14$;
__f)__ $-4x^6+4x^4-24x^3+5x^2+12x-46$; __g)__ $16x^6+24x^5-16x^4+54x^3+88x^2-33x+35$)

Ejercicio 8:

Desarrollar, aplicando las **igualdades notables**:

a) $(x+2)^2$

b) $(x-3)^2$

c) $(x+2)\,(x-2)$

d) $(3x+2)^2$

e) $(2x-3)^2$

f) $(5x+4)\,(5x-4)$

g) $(x^2+5)^2$

h) $(-2x+5)\,(2x+5)$

i) $(x^3-2)^2$

j) $(x^2-1)\,(x^2+1)$

k) $(2x^2+3x)^2$

l) $(2x^2-3)^2$

m) $(-x-3)^2$

n) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

o) $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2$

p) $(-x^2+3)^2$

q) $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)$

r) $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$

s) $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2$

t) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)$

u) $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2$

v) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)$

w) $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2$

x) $\left(24-\frac{7}{4}x\right)^2$

(Soluc: **n)** $x^2+x+\frac{1}{4}$; **o)** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; **q)** $1-\frac{x^2}{4}$; **r)** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; **s)** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; **t)** $4-\frac{a^2}{9}$;
u) $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; **v)** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; **w)** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$; **x)** $576-84x+\frac{49}{16}x^2$)

Ejercicio 9:

Operar y simplificar:

a) $(x+1)^2+(x-2)(x+2)$

b) $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)$

c) $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2$

d) $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)$

e) $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2$

f) $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)$

(Soluc: **a)** $2x^2+2x-3$; **b)** $5x^2-6x+26$; **c)** $3x^2-2x-10$; **d)** $-4x^2-8x+4$; **e)** $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; **f)** $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$)

Ejercicio 10:

Efectuar los siguientes **cocientes**, indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar el resultado de los sombreados mediante la regla D=d·C+R:

1. $x^4-x^3+7x^2+x+15 \mid x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-x+5$; $R(x)=3x+5$)*
2. $2x^5-x^3+2x^2-3x-3 \mid 2x^2-3$ *(Soluc: $C(x)=x^3+x+1$; División exacta)*

   RECORDAR: «Se dice que **P(x) es divisible por Q(x)**, o que **P(x) es múltiplo de Q(x)**, o que **Q(x) es divisor** o factor **de P(x)** si **la división de P(x) entre Q(x) es exacta**, es decir, da resto cero»
3. $6x^4-10x^3+x^2+11x-6 \mid 2x^2-4x+3$ *(Soluc: $C(x)=3x^2+x-2$; División exacta)*
4. $x^3+2x^2+x-1 \mid x^2-1$ *(Soluc: $C(x)=x+2$; $R(x)=2x+1$)*
5. $8x^5-16x^4+20x^3-11x^2+3x+2 \mid 2x^2-3x+2$ *(Soluc: $C(x)=4x^3-2x^2+3x+1$; División exacta)*
6. $x^4+3x^3-2x+5 \mid x^3+2$ *(Soluc: $C(x)=x+3$; $R(x)=-4x-1$)*
7. $x^5-2x^4+3x^2-6 \mid x^4+1$ *(Soluc: $C(x)=x-2$; $R(x)=3x^2-x-4$)*
8. $x^2 \mid x^2+1$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)=-1$)*
9. $3x^6+2x^4-3x^2+5 \mid x^3-2x+4$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+8x-12$; $R(x)=13x^2-56x+53$)*
10. $x^8 \mid x^2+1$ *(Soluc: $C(x)=x^6-x^4+x^2-1$; $R(x)=1$)*
11. $x^3-4x^2+5x-8 \mid x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*
12. $x^2+1 \mid x^2-4x+13$ *(Soluc: $C(x)=1$; $R(x)=4x-12$)*
13. $2x^5+3x^2-6 \mid x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R(x)=-465$)*

Ejercicio 11: realiza las siguientes divisiones de polinomios:

30. $x^6 \mid x^4+1$ *(Soluc: $C(x)=x^2$; $R(x)=x^2$)*

31. $6x^3-3x^2+2x-5 \mid 3x-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/3+8/9$; $R(x)=-29/9$)*

32. $4x^4-x^3+x+5 \mid 2x^2-x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+x/2-11/4$; $R(x)=-13x/4+53/4$)*

33. $6x^4+3x^3-5x^2+x-8 \mid 3x^2-5x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+13x/3+38/9$; $R(x)=121x/9-148/9$)*

34. $8x^4-3x^2+7x-5 \mid 4x^2-3x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2+3x/2-5/8$; $R(x)=17x/8-15/4$)*

35. $6x^5+5x^4+31x^2+2 \mid 2x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+5x^2/2-3x+13$; $R(x)=6x-24$)*

36. $3x^5-6x^4-x^3+10x^2-8x+2 \mid 3x^2-6x+1$ *(Soluc: $C(x)=x^3-2x/3+2$; $R(x)=14x/3$)*

37. $6x^4-x^3+2x^2-x-1 \mid 3x^2+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^2-x/3-2/3$; $R(x)=-x/3+1/3$)*

Ejercicio 12:

Efectuar las siguientes divisiones mediante la **regla de Ruffini**[1], indicando claramente el cociente C(x) y el resto R(x), y comprobar las sombreadas:

1. $x^4-7x^3+8x^2-2 \mid x-1$ *(Soluc: $C(x)=x^3-6x^2+2x+2$; División exacta)*

2. $x^3-4x^2+5x-8 \mid x-2$ *(Soluc: $C(x)=x^2-2x+1$; $R=-6$)*

3. $2x^4+3x^3-4x^2+x-18 \mid x-2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3+7x^2+10x+21$; $R=24$)*

4. $2x^5+3x^2-6 \mid x+3$ *(Soluc: $C(x)=2x^4-6x^3+18x^2-51x+153$; $R=-465$)*

5. $3x^4-10x^3-x^2-20x+5 \mid x-4$ *(Soluc: $C(x)=3x^3+2x^2+7x+8$; $R=37$)*

6. $2x^4-10x+8 \mid x+2$ *(Soluc: $C(x)=2x^3-4x^2+8x-26$; $R=60$)*

Ejercicio 13:

Averiguar, sin efectuar la división, cuáles de las siguientes divisiones son exactas:

a) $x^3-3x^2+2x-10 \mid x-4$ *(Soluc: NO)*

b) $x^3-x^2+x+14 \mid x+2$ *(Soluc: SÍ)*

c) $x^6-1 \mid x-1$ *(Soluc: SÍ)*

d) $x^5-3x^3+2x \mid x-4$ *(Soluc: NO)*

Ejercicio 14:

Determinar, aplicando el teorema del resto, el valor de **a** para que el resto de la división $x^5+3x^4+ax^3+9x^2+2x-7 \mid x-3$ sea -1; comprobar, a continuación, el resultado obtenido haciendo la división. *(Soluc: $a=-21$)*

Ejercicio 15: Halla m en cada caso para que la división sea exacta pero sin aplicar Ruffini:

a) $x^3+8x^2+4x+m \mid x+4$ *(Soluc: m=–48)*

b) $2x^3-10x^2+mx+25 \mid x-5$ *(Soluc: m=–5)*

c) $2x^4+mx^3-4x^2+40 \mid x-2$ *(Soluc: m=–7)*

d) $mx^2-3x-744 \mid x-8$ *(Soluc: m=12)*

Ejercicio 16:

Descompón en factores este polinomio: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

	1	–4	7	–12	12
2		2	–4	6	–12
	1	–2	3	–6	0
2		2	0	6	
	1	0	3	0	

$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2 (x^2 + 3)$

Ejercicio 17:

Factoriza el siguiente polinomio: $x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50$

	1	1	–27	–25	50
1		1	2	–25	–50
	1	2	–25	–50	0
–2		–2	0	50	
	1	0	–25	0	

$x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$

$x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 = (x - 1)(x + 2)(x - 5)(x + 5)$

Ejercicio 18:

Observa y descompón en factores el polinomio:

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$$

	1	−8	11	32	−60
2		2	−12	−2	60
	1	−6	−1	30	0
−2		−2	16	−30	
	1	−8	15	0	
3		3	−15		
	1	−5	0		

$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$

Ejercicio 19:

Factoriza estos polinomios:

a) $x^3 + x^2 - 32x - 60$

b) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

c) $x^4 - 10x^2 + 9$

d) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

e) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

f) $x^4 + 5x^2 - 36$

g) $x^4 - 81$

h) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x - 4$

a)

	1	1	−32	−60
6		6	42	60
	1	7	10	0
−2		−2	−10	
	1	5	0	

$x^3 + x^2 - 32x - 60 = (x - 6)(x + 2)(x + 5)$

b)

	1	8	21	18
−2		−2	−12	−18
	1	6	9	0
−3		−3	−9	
	1	3	0	

$x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = (x + 2)(x + 3)^2$

c)

	1	0	–10	0	9
1		1	1	–9	–9
	1	1	–9	–9	0
–1		–1	0	9	
	1	0	–9	0	
3		3	9		
	1	3	0		

$x^4 - 10x^2 + 9 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$

d)

	1	–5	2	8
–1		–1	6	–8
	1	–6	8	0
2		2	–8	
	1	–4	0	

$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

e) Utilizamos el resultado obtenido en el apartado anterior:

$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = x(x + 1)(x - 2)(x - 4)$

f)

	1	0	5	0	–36
2		2	4	18	36
	1	2	9	18	0
–2		–2	0	–18	
	1	0	9	0	

El polinomio $x^2 + 9$ no tiene raíces reales.

Por tanto, $x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 + 9) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$

g)

	1	0	0	0	–81
3		3	9	27	81
	1	3	9	27	0
–3		–3	0	–27	
	1	0	9	0	

$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

h)

	1	3	−5	−3	4
−4		−4	4	4	−4
	1	−1	−1	1	0
−1		−1	2	−1	
	1	−2	1	0	
1		1	−1		
	1	−1	0		

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 4 = (x + 4)(x + 1)(x - 1)^2$$

Ejercicio 20:

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 4x$ **b)** $x^2 - 2x$ **c)** $4x - 12$

d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ **e)** $x^2 - 2x + 1$ **f)** $x^2 + 2x - 3$

g) $x^3 + 4x^2 + 3x$ **h)** $x^3 - 4x^2 - 5x$ **i)** $x^3 - x$

j) $x^4 + 2x^3 + x^2$ **k)** $x^5 - 16\,x$ **l)** $x^3 - 10^6 x$

a) $x^2 - 4x = x(x - 4)$

b) $x^2 - 2x = x(x - 2)$

c) $4x - 12 = 4(x - 3)$

d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)^2(x - 3)$

e) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

f) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

g) $x^3 + 4x^2 + 3x = x(x + 1)(x + 3)$

h) $x^3 - 4x^2 - 5x = x(x + 1)(x - 5)$

i) $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$

j) $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x + 1)^2$

k) $x^5 - 16\,x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

l) $x^3 - 10^6 x = x(x - 1\,000)(x + 1\,000)$

Ejercicio 21:

Simplifica:

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$

b) $\dfrac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

c) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2}$

e) $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 - 4x^2 - 5x}$ **f)** $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2}$

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \dfrac{x(x^2 - 4)}{x(x - 2)} = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2$

b)

	1	−7	16	−12
3		3	−12	12
	1	−4	4	0

$$\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{4(x - 3)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$$

c) $\dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$ $\begin{cases} \dfrac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \dfrac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}$$

d) $\dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \dfrac{x^2 \cdot x^2}{x^2(x + 3)} = \dfrac{x^2}{x + 3}$

e) $\dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$ $\begin{cases} \dfrac{-4 + 2}{2} = -1 \\ \dfrac{-4 - 2}{2} = -3 \end{cases}$ $\qquad$ $\dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$ $\begin{cases} \dfrac{4 + 6}{2} = 5 \\ \dfrac{4 - 6}{2} = -1 \end{cases}$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 - 4x^2 - 5x} = \frac{x(x^2 + 4x + 3)}{x(x^2 - 4x - 5)} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 1)(x - 5)} = \frac{x + 3}{x - 5}$$

f) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 2x + 1)} = \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 1)^2} = \dfrac{x - 1}{x(x + 1)}$