

Unidad 13 – Representación gráfica de funciones

PÁGINA 315

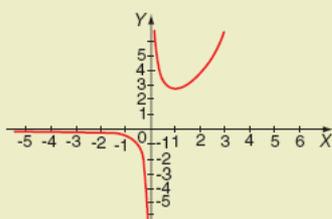
cuestiones iniciales

1. En las siguientes funciones, estudia sus características: dominio, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, la periodicidad, las asíntotas, la monotonía, los extremos relativos, el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión.

a) $y = 2x^2 - 8x$

b) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

2. Estudia las características (dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, curvatura y asíntotas) de la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$, representada en la gráfica.



SOLUCIONES

1. Las funciones son:

a) $f(x) = 2x^2 - 8x$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con el eje OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(4,0) \end{array} \right\}$$

Puntos de corte con el eje OY :

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x^2 - 8x \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,0)$$

- Simetrías:
 $f(x) = 2x^2 - 8x$
 $f(-x) = 2(-x)^2 - 8(-x) = 2x^2 + 8x$

$f(x) \neq f(-x) \Rightarrow f$ no es simétrica respecto al eje OY

$f(x) \neq -f(-x) \Rightarrow f$ No es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Periodicidad: f no es periódica.
- Asíntotas: no tiene asíntotas.
- Monotonía:

$$f'(x) = 4x - 8$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$.



$$f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, 2)$$

$$f'(x) > 0 \text{ en } (2, +\infty)$$

f es estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$

f es estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

- Extremos relativos:

$$f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f''(x) = 4 > 0$$

f tiene un mínimo relativo en $(2, -8)$

- Concavidad:

$$f''(x) = 4 > 0 \Rightarrow f \text{ es cóncava hacia las positivas en todo } \mathbb{R}$$

- No existen puntos de inflexión.

b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

- Dominio: $Dom g = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$
- Puntos de corte con el eje OX :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

Puntos de corte con el eje OY :

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^3}{x^2 - 4} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0, 0)$$

- Simetrías:

$$g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-x^3}{x^2 - 4}$$

Como $-g(x) = +g(-x)$ la función g es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Periodicidad: g no es periódica.
- Asíntotas:
Asíntotas verticales: las rectas de ecuaciones.
 $x=2$ y $x=-2$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty$$

No existen las asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

- Monotonía:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} \begin{cases} x^4 - 12x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\sqrt{3} \end{cases} \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$g'(x) > 0$ en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty) \Rightarrow g$ es estrictamente creciente en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$.

$g'(x) < 0$ en $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3}) \Rightarrow g$ es estrictamente decreciente en $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$.

- Extremos relativos:

$$g'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^2}$$

$g''(2\sqrt{3}) > 0 \Rightarrow g$ tiene mínimo relativo en el punto $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$

$g''(-2\sqrt{3}) < 0 \Rightarrow g$ tiene máximo relativo en el punto $(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$

- Concavidad:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}$$



$g''(x) < 0$ en $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \Rightarrow g$ es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

$g''(x) > 0$ en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

- Puntos de inflexión:

$$g''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}; 8x^3 + 96x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{-24x^4 - 576x^2 - 384}{(x^2 - 4)^4}$$

$$g'''(0) \neq 0$$

Existe un punto de inflexión en el punto $(0, 0)$.

2. La solución es:

Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$

Recorrido $\mathbb{R} - [0, 2, 7)$

Creciente $(2, 7; +\infty)$

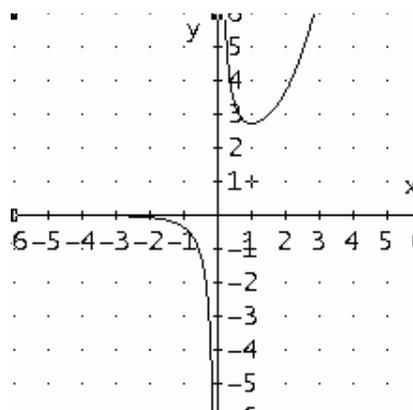
Decreciente $(-\infty, 0) \cup (0, 2, 7)$

Mínimo relativo $(1, 2, 7)$

Cóncava $(0, +\infty)$

Convexa $(-\infty, 0)$

Asíntotas $x = 0$; $y = 0$



PÁGINA 329

ACTIVIDADES

■ Utiliza el proceso diagonal de Cantor para resolver la cuestión siguiente:

1. **Con letras.** Demuestra que el conjunto de todas las «palabras infinitas» de dos letras X e Y tales como:

$$\begin{array}{l} XYXYXYXYXY... \\ YYYXXXYXY... \end{array}$$

no puede ser numerable.

SOLUCIONES

1. Supongamos que todas las palabras indicadas se pueden numerar y por tanto colocar todas una detrás de otra. La lista de todas ellas es la siguiente:

$$\begin{array}{l} XYXYXYXYXYXYXYXYXYXY... \\ YYYXXXYXYXYXYXYXYXY... \\ XXXYYXXXYXYXYXYXYXY... \\ XYXYXYXYXYXYXYXYXYXY... \\ YYYXXXYXYXYXYXYXYXY... \end{array}$$

Nos fijamos ahora en la primera palabra infinita $XYXYX...$, que se obtiene en la lista anterior tomando la primera letra de la primera palabra, la segunda de la segunda, la tercera de la tercera, la cuarta de la cuarta, la quinta de la quinta..., es decir tomando las letras de la diagonal del cuadro de letras.

A partir de esta palabra $XYXYX...$ formamos otra cambiando en ella cada X por Y y cada Y por X . obtenemos así una palabra que empieza:
 $YXYXY...$

Esta palabra tendría que ocupar alguna fila de la lista, pues estamos suponiendo que allí están todas, pero por otra parte, difiere de la primera palabra en la primera letra, de la segunda palabra en la segunda letra, de la tercera palabra en la tercera letra..., de la palabra 538 en la letra 538...Es imposible que este en la lista. Esta contradicción demuestra que nuestro punto de partida es falso.

Podemos afirmar, por consiguiente, que la colección de las palabras infinitas de dos letras no puede ser numerable.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |x + 2| - x$

c) $y = |x^2 - 4x + 3|$

e) $y = x^2 - \frac{4}{3}|x|$

b) $y = \frac{|x-1|}{x-1}$

d) $y = |x-3| + |x+3|$

f) $y = \frac{x-|x|}{2}$

- 2. Construye la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x(x+2)(x-2)$

d) $y = x^4 - 2x^2$

g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

b) $y = x(x-1)(x-2)$

e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$

h) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

c) $y = 3x - x^3$

f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$

i) $y = 2x^2 - 3x - \frac{1}{3}x^3$

- 3. Encuentra una función cuya expresión sea un polinomio del menor grado posible que pase por (0, 0) y tenga un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$. Realiza su representación gráfica.

- 4. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$:

a) Halla a y b de manera que la gráfica de la función $f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX .

b) Representa gráficamente la función.

- 5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{4}{x^2 - 4}$

e) $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$

i) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ (Curva de Agnesi)

b) $y = \frac{x^2}{x+2}$

f) $y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$

j) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

c) $y = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

g) $y = \frac{x}{1+|x|}$

k) $y = \frac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$

d) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

h) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

l) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4}$

- 6. La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - k}$. Halla el valor de k . Realiza la representación gráfica de la función resultante.

- 7. Se considera la función definida por $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$:

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(-2, -6)$ y admita en dicho punto una tangente horizontal.

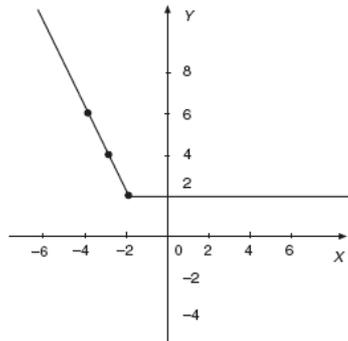
b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.



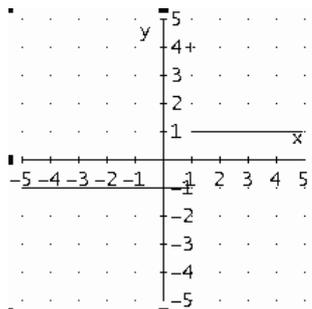
SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

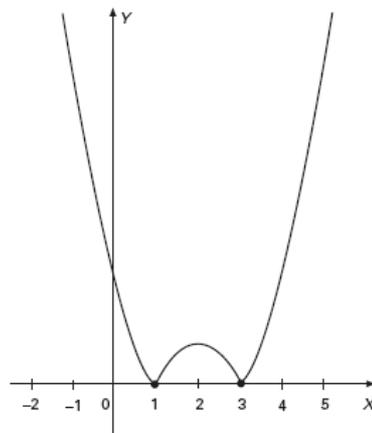
a) La función es $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > -2 \\ -2x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$ y su grafica:



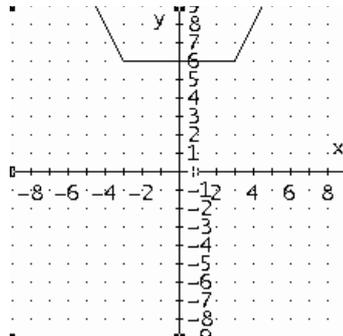
b) La función es $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ y su gráfica:



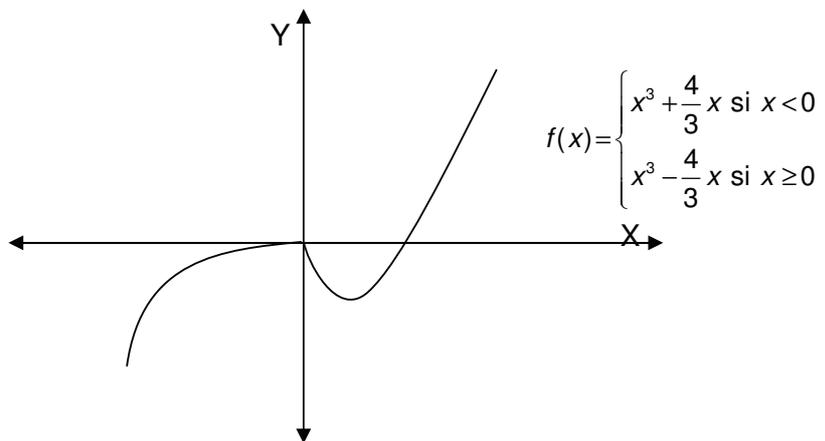
c) la función es $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \in [1, 3] \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \end{cases}$ y su grafica:



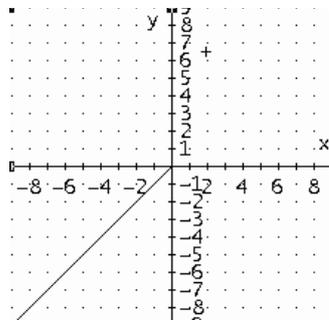
d) La función es $y = |x - 3| + |x + 3|$ y su gráfica:



e) La función es $f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{4}{3}x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - \frac{4}{3}x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ y su gráfica:



f) La función es $y = \frac{x - |x|}{2}$ y su gráfica es:



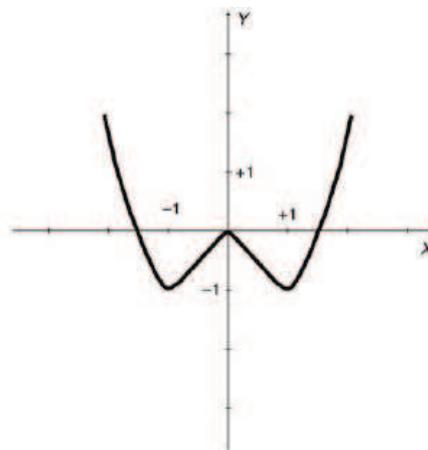
2. La solución queda:

a) $y = x(x+2)(x-2) = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (-2,0), (2,0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene asíntotas.
- Extremos relativos:

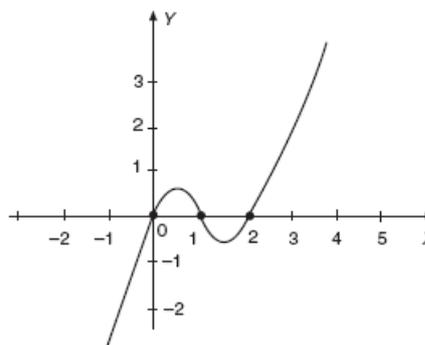
Mínimo $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$ máximo $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$

- Puntos de inflexión: $(0, 0)$
- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
 f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

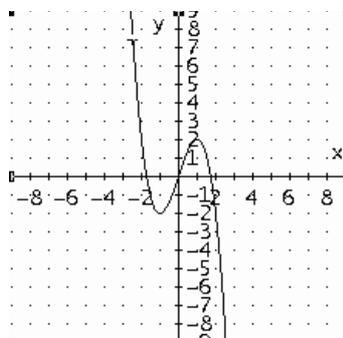


b) $y = x(x-1)(x-2)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- No presenta simetrías ni periodicidad.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (1,0), (2,0)$
- no tiene asíntotas.
- Tiene ramas parabólicas
- Extremos relativos:
Mínimo $(1,58; -0,38)$ máximo $(0,42; 0,38)$
- Puntos de inflexión: $(1, 0)$

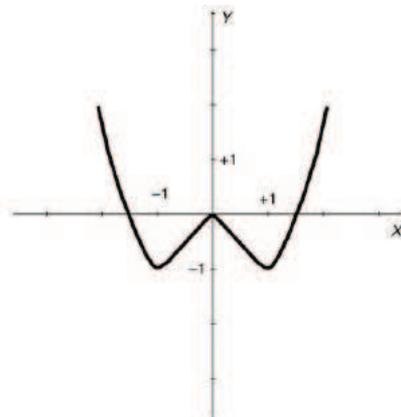


c) $y = 3x - x^3$



d) $y = x^4 - 2x^2$

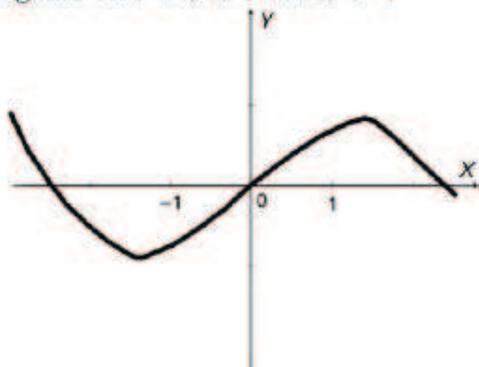
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:
Mínimo $(-1,-1)$ y $(1,-1)$ máximo $(0,0)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
 f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$



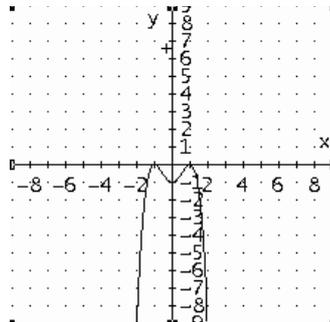
e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (\sqrt{6},0), (-\sqrt{6},0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:
Mínimo $\left(-\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ máximo $\left(\sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
- Puntos de inflexión: $(0,0)$
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty - \sqrt{6}) \cup (0, +\sqrt{6})$
 f es negativa en $(-\sqrt{6}, 0) \cup (+\sqrt{6}, +\infty)$

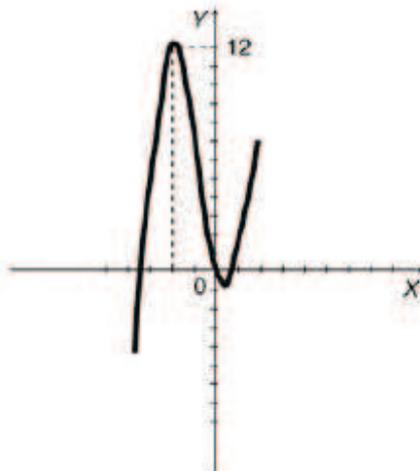


f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$



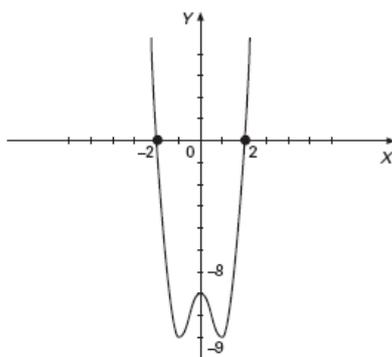
g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: ni es simétrica ni es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (0,64;0), (-3,14; 0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo $\left(\frac{1}{3}, \frac{-19}{27}\right)$ máximo $(-2,12)$
- Puntos de inflexión: $\left(-\frac{5}{6}; 5,65\right)$
- Intervalos de signo constante:
 - f es negativa en $(-\infty; -3,14) \cup (0; 0,64)$
 - f es positiva en $(-3,14; 0) \cup (0,64; +\infty)$

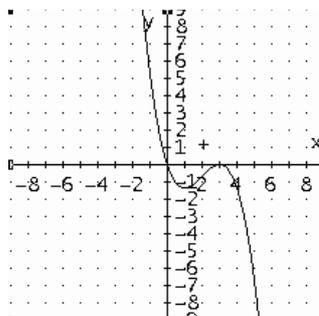


h) $y = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -8), (2, 0), (-2, 0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo $(1, -9)$ y $(-1, -9)$ máximo $(0, -8)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 f es negativa en $(-2, 2)$



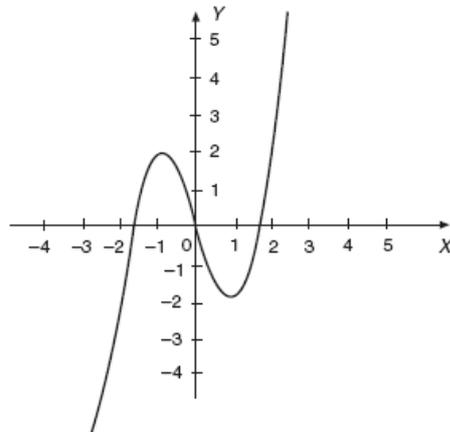
i) $y = 2x^2 - 3x - (1/3)x^3$



3. La función debe cumplir $f'(1)=0, f''(0)=0$ y $f(0)=0$. Suponiendo las condiciones anteriores se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 2a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \text{ cuya solución es } a=0, b=-3 \text{ y } c=0.$$

La función $f(x) = x^3 - 3x$ cumple las condiciones del enunciado.
Su gráfica es:



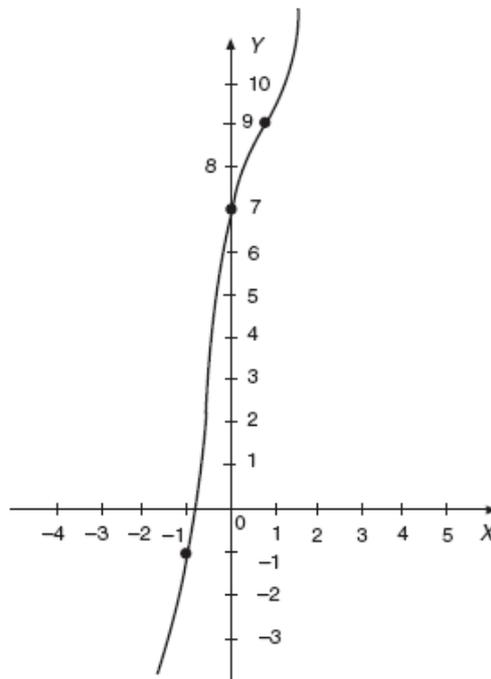
4. La solución es:

a) La función debe cumplir $f'(1)=1$ y $f(1)=0$. Estas condiciones conducen al sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ 2a = -6 \end{cases} \text{ cuya solución es } a = -3, b = 4$$

La función buscada es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 7$

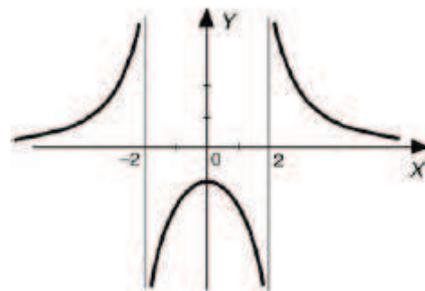
b) La gráfica puede verse en el dibujo.



5. Las funciones quedan:

a) $y = \frac{4}{x^2 - 4} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1)$
- Asíntotas: $x = \pm 2$; $x = -2$; $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo $(0, -1)$



- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$

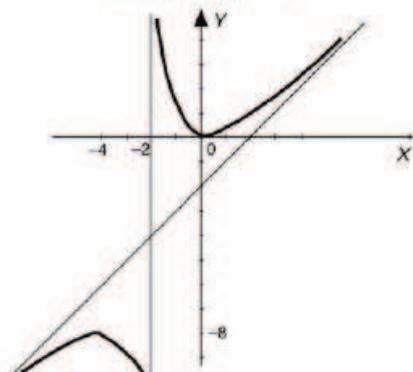
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 f es negativa en $(-2, 2)$

b) $y = \frac{x^2}{x+2} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - 2$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas: $x = -2$; $y = x - 2$
- Extremos relativos: Máximo $(-4, -8)$ mínimo $(0, 0)$

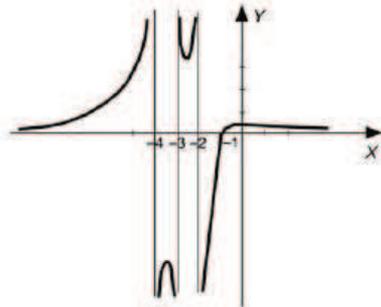
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$

- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\infty, -2)$.
 f es positiva en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.



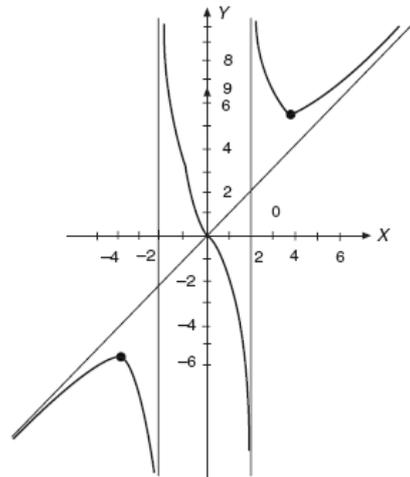
c) $y = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-2, -3, -4\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, \frac{1}{24}), (-1, 0)$
- Asíntotas: $x = -2; x = -3; x = -4; y = 0$
- Extremos relativos: la curva presenta dos máximos relativos y un mínimo, como observamos en la grafica.
- Intervalos de signo constante:
 f es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-3, -2) \cup (-1, +\infty)$
 f es negativa en $(-4, -3) \cup (-2, -1)$



d) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
- Tiene una simetría respecto al origen de coordenadas.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas: $x = -2; y = x$
- Extremos relativos:
Máximo $(-\sqrt{12}, -\frac{3\sqrt{12}}{2})$ mínimo $(\sqrt{12}, \frac{3\sqrt{12}}{2})$
- Puntos de inflexión: $(0, 0)$



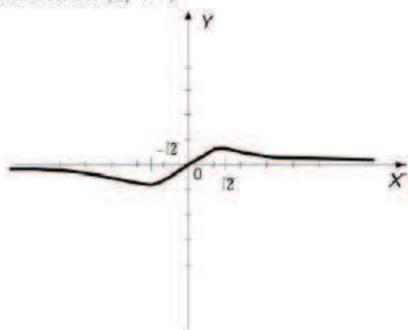
e) $y = \frac{2x}{x^2 + 2}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: simétrica respecto al origen y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: $y=0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ mínimo $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$

f es positiva en $(0, +\infty)$



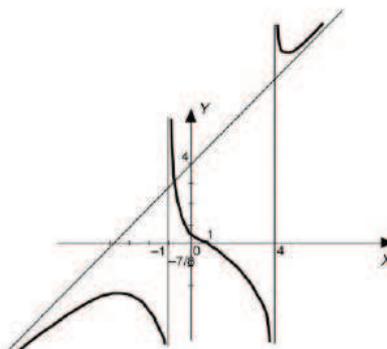
f) $y = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 3x - 4}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{4, -1\}$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \frac{1}{2}\right), (1,0)$
- Asíntotas: $x = -1; x = 4; y = x + 4$ y como oblicua $y = x + 4$ en el punto $\left(-\frac{7}{8}, \frac{25}{8}\right)$

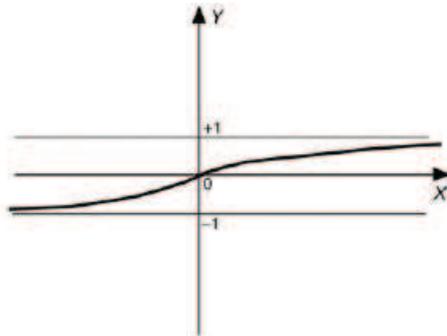
- Extremos relativos: no se pueden hallar fácilmente.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-1, 1) \cup (4, +\infty)$

f es negativa en $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$.

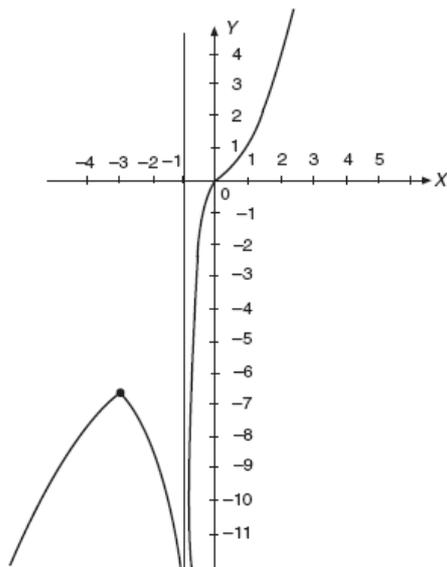


g) $y = \frac{x}{1+|x|}$ que separando el valor absoluto queda $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$



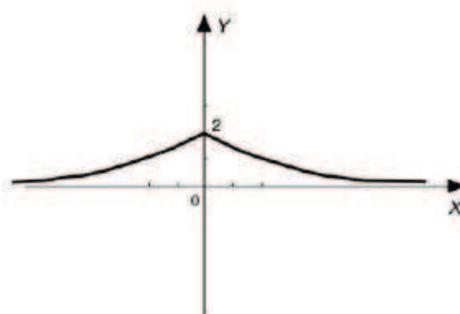
h) $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, \frac{1}{2}), (1, 0)$
- Asíntotas: $x = -1; x = 4; y = x + 4$
- Extremos relativos: Máximo $(-3; -6,75)$
- Punto de inflexión: $(0, 0)$



i) $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

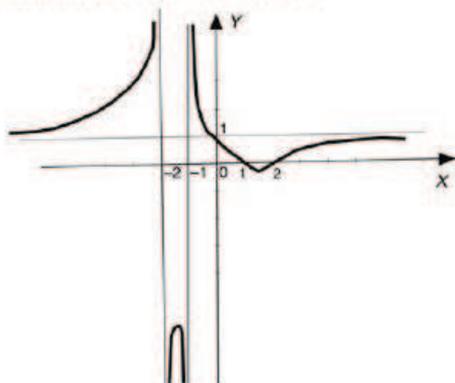
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,2)
- Asíntotas: $y=0$
- Extremos relativos: Máximo (0, 2)
- Intervalos de signo constante: F es positiva en todo su dominio.



j) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

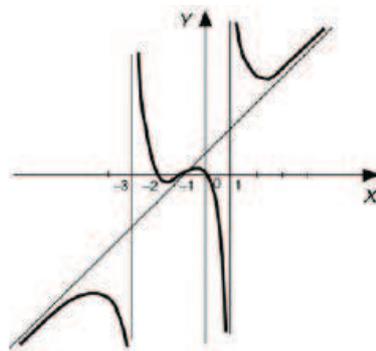
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,1), (1,0), (2,0)
- Asíntotas: $x = -1$; $x = -2$; $y = 1$
- Extremos relativos: Máximo $(-\sqrt{2}, -34)$ mínimo $(\sqrt{2}; -0,03)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
 f es positiva en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.



$$k) y = \frac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{1, -3\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(-1,0)(-2,0)$
- Asíntotas: $x = -1; x = -3; y = x + 1$ La curva corta a la asíntota oblicua en $(-1,0)$
- Extremos relativos:
Máximo $(-4,25; -4,74)$ y $(0,11; 0,38)$ mínimo $(-1,63; -0,11)$ y $(2,25; 4,74)$
- Intervalos de signo constante:
 f es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, 1)$
 f es positiva en $(-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$



l) $y = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4}$ esta función coincide con la función $y = x$ en todos los números reales ya que:

$$\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = x$$

En $x = 2$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

En $x = -2$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} x = -2.$$

La gráfica es la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante.

6. La función queda del siguiente modo:

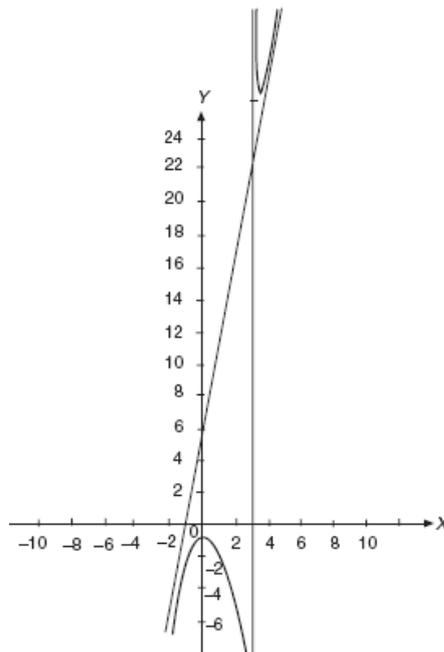
La determinación del valor k se realiza a través del límite:

$$\begin{aligned} \therefore \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - 2x] = 6 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x \right] = \\ 6 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 6 \Leftrightarrow 2k = 6 \Leftrightarrow k = 3.$$

Sea la función $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-3\}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1/3)$
- Asíntotas: $x=3; y=2x+6$
- Extremos relativos:
 Máximo $(-0,08; -0,33)$ y $(0,11; 0,38)$ mínimo $(6,08; -24,34)$



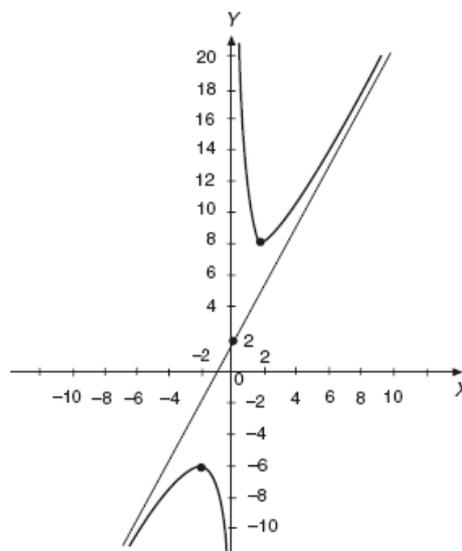
7. Queda:

a) La función debe cumplir: $f(-2) = -6$ y $f'(-2) = 0$. Imponiendo las condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \text{ cuya solución es } a=2, b=2$$

b) La función resultante es $f(x) = 2x + 2 + \frac{8}{x}$ o $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 8}{x}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- No tiene simetrías.
- Cortes con los ejes no tiene.
- Asíntotas: $x=0$; $y=2x+2$
- Extremos relativos: Máximo $(-2, -6)$ mínimo $(2, 10)$



■ 8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

c) $y = [\sqrt[3]{x}]^2$

e) $y = -\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

b) $y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{4x-1}}$

d) $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

f) $y^2 = \frac{x}{3-x}$

■ 9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x-2)$

e) $y = e^{1/x}$

i) $y = x \cdot e^x$

b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

f) $y = \frac{\ln x}{x}$

j) $y = \ln|x+1|$

c) $y = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

g) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

k) $y = \frac{e^x}{x^2}$

d) $y = x^2 \cdot e^x$

h) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

l) $y = \frac{x}{\ln x}$

■ 10. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ y $g(x) = a \ln x + b$ se corten en el punto $(e^2, \frac{2}{e^2})$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación gráfica de las funciones resultantes.

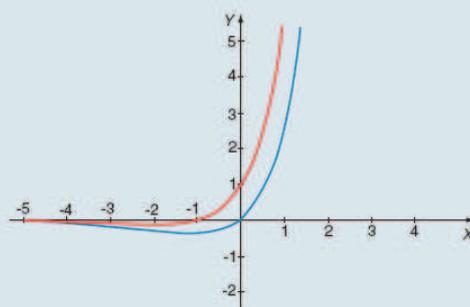
■ 11. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, dibuja de forma razonada las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \ln|x|$

b) $f(x) = |\ln x|$

c) $f(x) = \ln(x-2)$

■ 12. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones: la de la función $f(x) = x e^x$ y la de su derivada $f'(x)$.



Distingue una de la otra, justificando razonadamente el porqué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.

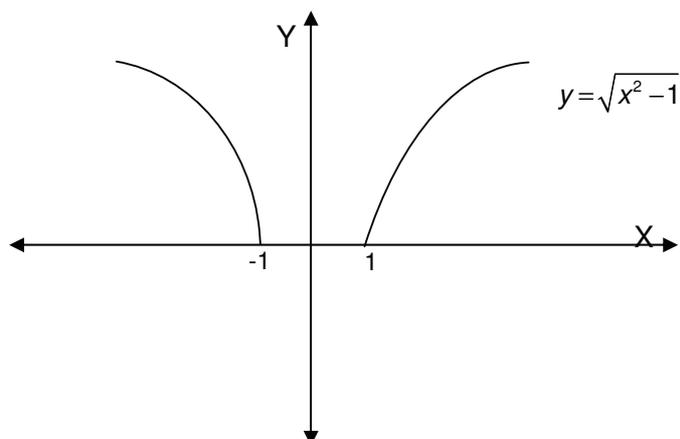
■ 13. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones: $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

SOLUCIONES

8. La solución en cada caso:

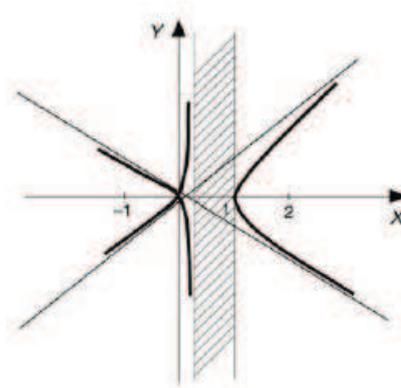
a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)(-1,0)$
- Asíntotas: $y = x; y = -x$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



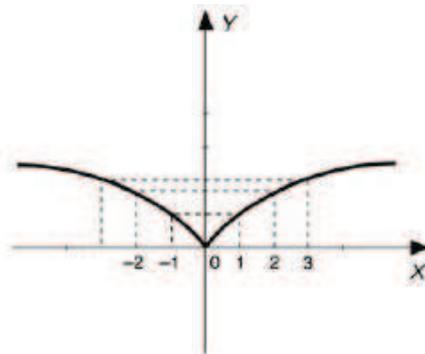
b) $y = \pm x \sqrt{\frac{x-1}{4x-1}}$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, \frac{1}{4}) \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (1,0)$
- Asíntotas: $x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}; y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$
- Extremos relativos: no tiene.



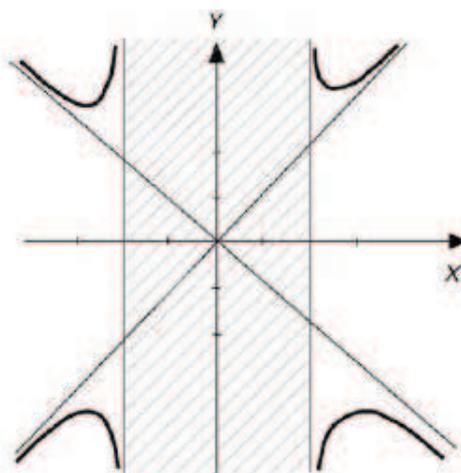
c) $y = [\sqrt[3]{x}]^2$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0)
- Asíntotas: no tiene
- Extremos relativos: no tiene
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



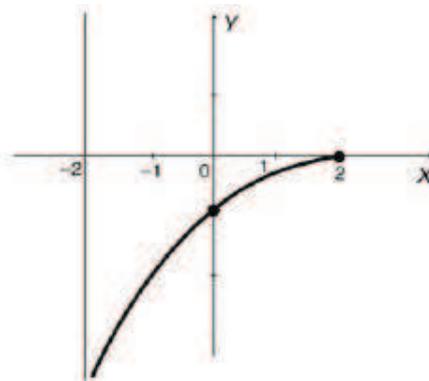
d) $y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: (0,0) no existe.
- Asíntotas: $x = \pm 2$; $y = x$; $y = -x$
- Extremos relativos: Mínimos $(\sqrt{8}, 4)$ $(-\sqrt{8}, 4)$ Máximos $(\sqrt{8}, -4)$ $(-\sqrt{8}, -4)$



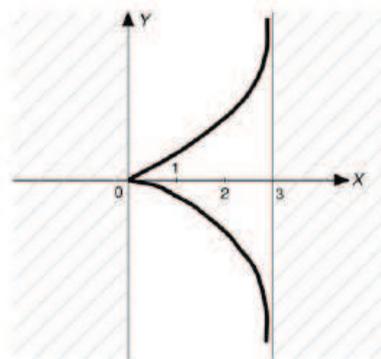
e) $y = -\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = (-2, 2)$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica ni es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, -1)(2, 0)$
- Asíntotas: $x = -2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalo de signo constante: f es negativa en todo su dominio.



f) $y = \frac{x}{3-x} \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x}{3-x}} = f(x)$

- Dominio: $Dom f = [0, 3)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$
- Asíntotas: $x = 3$
- Extremos relativos: no tiene.



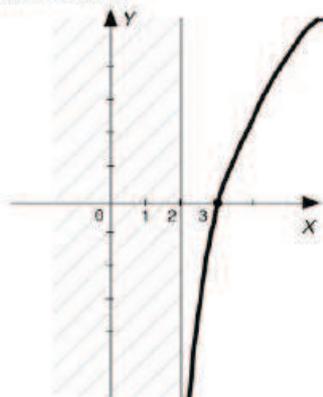
9. Las gráficas quedan:

a) $y = \ln(x-2)$

- Dominio: $Dom f = (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(3,0)$
- Asíntotas: $x=2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(3, +\infty)$

f es negativa en $(2, 3)$



b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

- Dominio: $Dom f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, \ln 4)$; $(4, 2; 0)$; $(0, 8; 0)$

$$x = 1, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 - 5x + 4) = -\infty$$

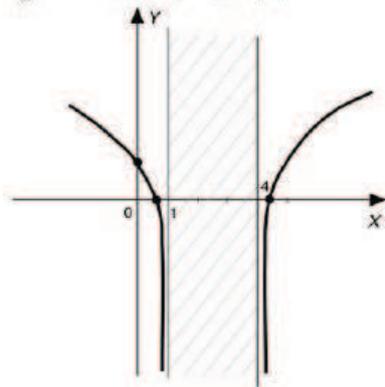
- Asíntotas:

$$x = 4 \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 4^+} \ln(x^2 - 5x + 4) = -\infty$$

- Extremos relativos: no tiene; Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty; 0,8) \cup (4,2; +\infty)$

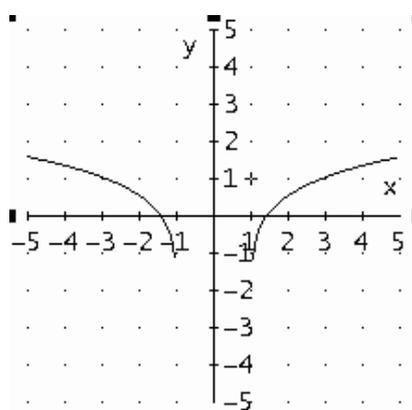
f es negativa en $(0,8; 1) \cup (4; 4,2)$



10. Tiene que cumplirse $g(e^2) = \frac{2}{a^2}$ y $g'(e^2) = -\frac{1}{a^4}$. Las condiciones anteriores nos llevan al

c) $y = \ln\sqrt{x^2 - 1}$

- Dominio $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simétrica respecto al eje OY
- Puntos de corte con los ejes $(\sqrt{2}, 0)$ $(-\sqrt{2}, 0)$
- Asíntotas las rectas $x = 1$ y $x = -1$
- Extremos relativos no tiene
- Monotonía: Creciente en $(1, +\infty)$ y Decreciente en $(-\infty, -1)$
- Intervalos de signo constante: $f(x)$ es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y $f(x)$ es negativa en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

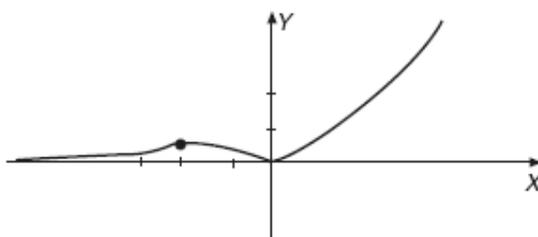


d) $y = x^2 e^x$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : $y = 0$, al ser :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

- Extremos relativos: máximo $(-2; 0,54)$ mínimo $(0,0)$



e) $y = e^{\frac{1}{x}}$

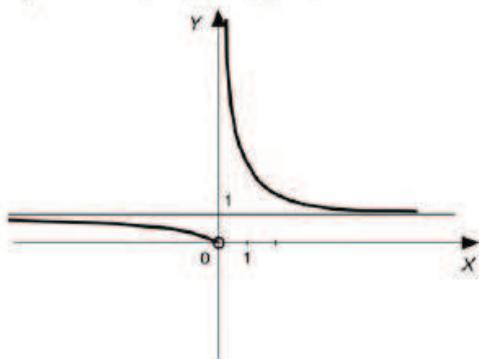
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas :

$x = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

$y = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



f) $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: $Dom f = (0, +\infty)$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(1, 0)$
- Asíntotas :

$x = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

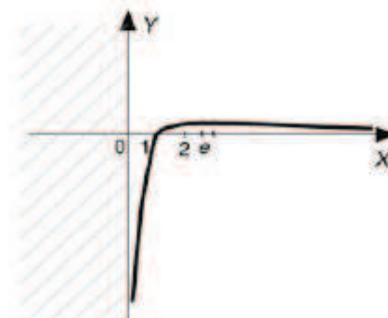
$y = 0$ pues $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- Extremos relativos: máximo $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(0, 1)$

f es positiva en $(1, +\infty)$



g) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

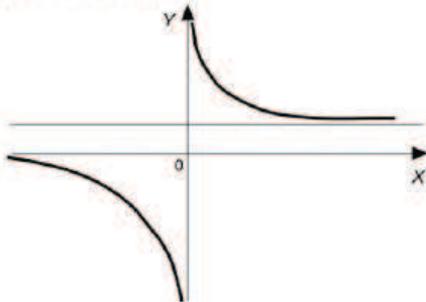
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$
- Asíntotas :

$$y = 1, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

$$y = 0, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$
 f es positiva en $(0, +\infty)$



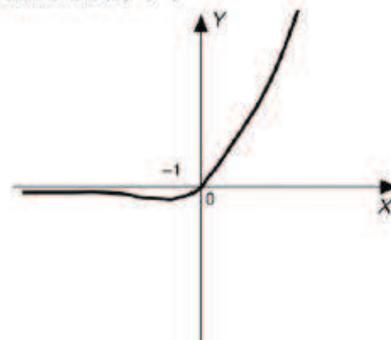
h) $y = x^2 e^{-x}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : $y = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = 0$.

- Extremos relativos: mínimo $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$
- Intervalos de signo constante:

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$
 f es positiva en $(0, +\infty)$



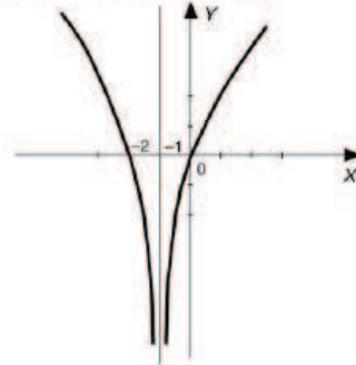
j) $y = \ln|x+1|$ que es de la forma $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x > -1 \\ \ln(-x-1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{-1\}$
-
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(-2,0)$
- Asíntotas : $x = -1$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

• Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f es negativa en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$



k) $y = \frac{e^x}{x^2}$

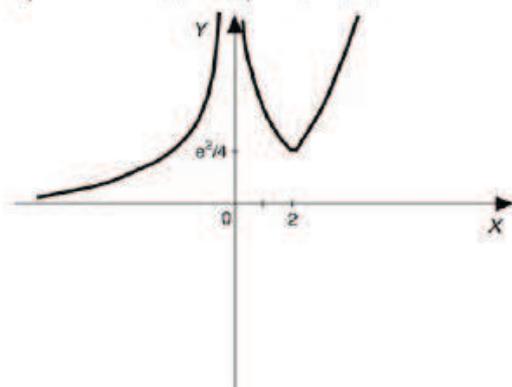
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas : $x = 0$

$$y = 0, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

- Extremos relativos: mínimo $\left(2, \frac{e^2}{4}\right)$

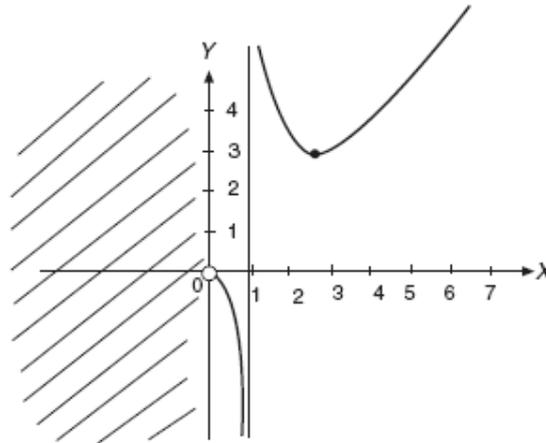
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$



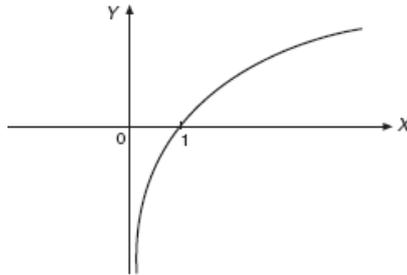
$$l) y = \frac{x}{\ln x} = f(x)$$

- Dominio: $Dom f = (0, +\infty) - \{1\}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : $x = 1$
- Extremos relativos: mínimo (e, e)

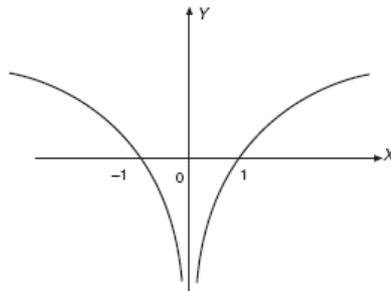


11. Las gráficas son:

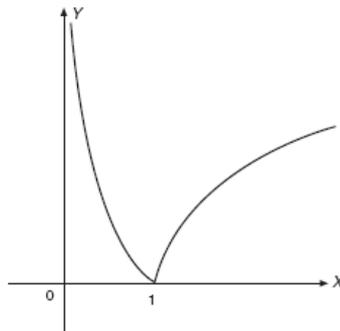
Todas parten de la siguiente gráfica $f(x)=\ln x$



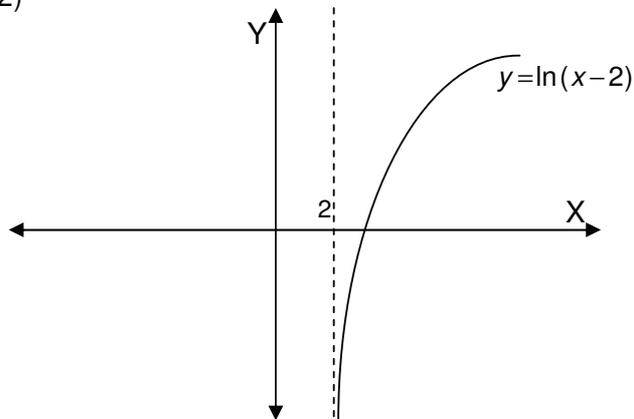
a) $f(x)=\ln|x|$



b) $f(x)=|\ln x|$



c) $f(x)=\ln(x-2)$



12. La función y su función derivada son:

$$f(x) = xe^x \text{ y } f'(x) = (x+1)e^x$$

La grafica de $y = f(x)$ es la que pasa por el origen.

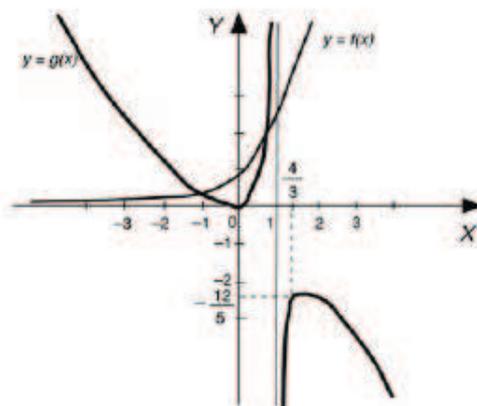
Las características pedidas en el enunciado son:

- Es creciente en $(-1, +\infty)$
- Es decreciente en $(-\infty, -1)$
- Tiene un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{e})$
- Es cóncava hacia las y positivas en $(-2, +\infty)$
- Es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2)$
- Tiene un punto de inflexión en $(-2, -\frac{2}{e^2})$

13. La ecuación dada $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ se puede transformar en: $e^x = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

Por tanto, las soluciones de esta ecuación serán los valores de las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$$f(x) = y = e^x; g(x) = y = \frac{-x^4}{4(x-1)} \text{ + la representamos gráficamente :}$$



A partir de la representación grafica observamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en dos puntos; uno de ellos entre $(-2, -1)$ y otro $(0, 1)$.

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

- 14. La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en $(2/3, 1/9)$. Halla a, b y c ; y representa gráficamente la función obtenida.

- 15. Esboza la gráfica de la función:
$$\begin{cases} \ln(1+x^2) & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

- 16. Sea la función $f(x) = e^x + \ln x$.
- Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.
 - Haz una gráfica aproximada de esta función.

- 17. Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$, los ceros, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

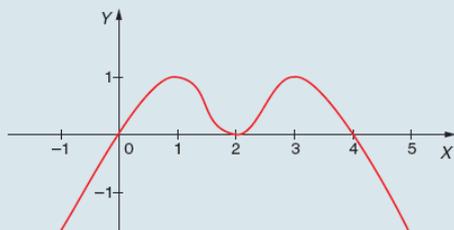
Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

- 18. Representa gráficamente la función $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

- 19. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \quad x^2 = 12(y - 1)$$

- 20. Se sabe que la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función en el intervalo abierto $(-1, 5)$ es la que muestra el dibujo.

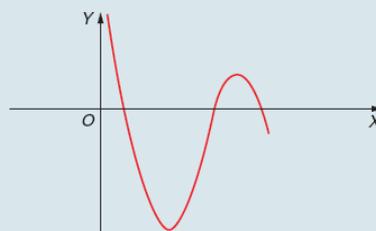


- Sabiendo que $f(0) = 0$, dibuja de manera aproximada la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, 5)$.
- Indica en esta gráfica los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión.

- 21. El esquema adjunto representa el gráfico de la función $y = f(x)$:

- Haz otro esquema que represente el gráfico de la función $y = -f(x)$.
- Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$.

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.



SOLUCIONES

14. La ecuación de la gráfica debe cumplir $f(3)=0$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$ y $f''\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

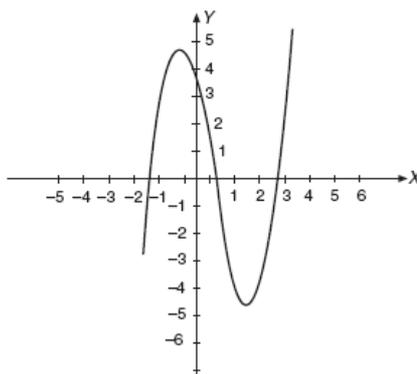
Las condiciones anteriores nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = -27 \\ 12a + 18b + 27c = -5 \\ 2a = -4 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } a = -2, b = -\frac{37}{9}, c = \frac{10}{3}.$$

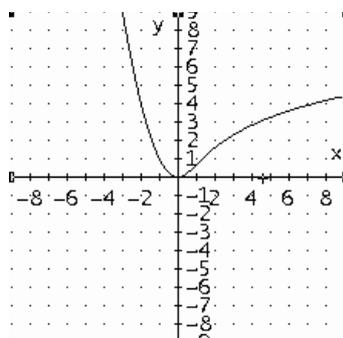
La función es $f(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{37}{9}x + \frac{10}{3}$ y su gráfica tiene las siguientes características:

- Corta al eje OX en los puntos: $(-1,65;0)$; $(0,65;0)$ y $(3,0)$
- Corta al eje OY en el punto $(0;3,3)$
- Tiene un máximo relativo en $(0,69;4,89)$ y un mínimo relativo en $(2,02;-4,89)$
- Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{9}\right)$.

La gráfica puede verse en el dibujo.



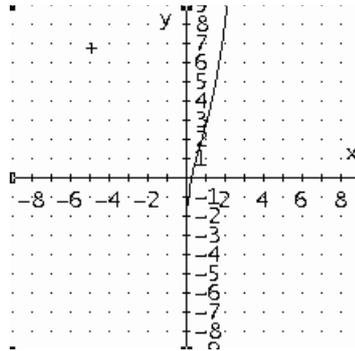
15. La gráfica queda:



16. La solución es:

a) Creciente $(0, +\infty)$
Asíntotas $x = 0$

b) La gráfica es



17. Para la función queda:

- Dominio: $Dom f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \frac{1}{8} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \frac{1}{8}$$

- Puntos de corte con los ejes o ceros : $(0,0)(1,0)$
- Asíntotas:

Verticales: no tiene.

Horizontales: $y = \frac{1}{8}$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{8x^2 + 2x - 1}{(8x^2 + 1)^2}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$



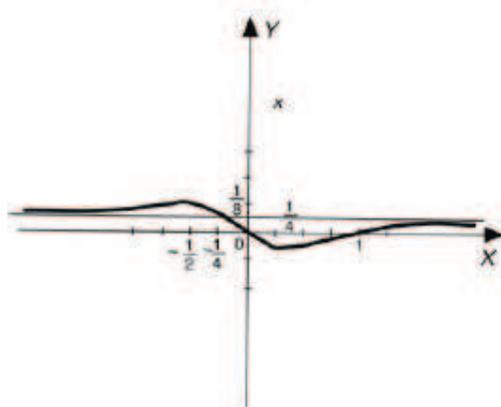
f es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$

f es decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

- Extremos relativos:

f tiene un máximo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$.

Su grafica es:



18. Queda:

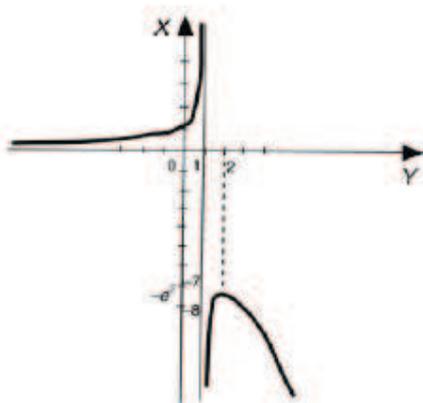
- Dominio: $Dom f = \mathbb{R} - \{1\}$
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$
- Asíntotas: $x = 1$
- $y = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 0$.

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
Crecimiento $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y decrecimiento $(2, +\infty)$

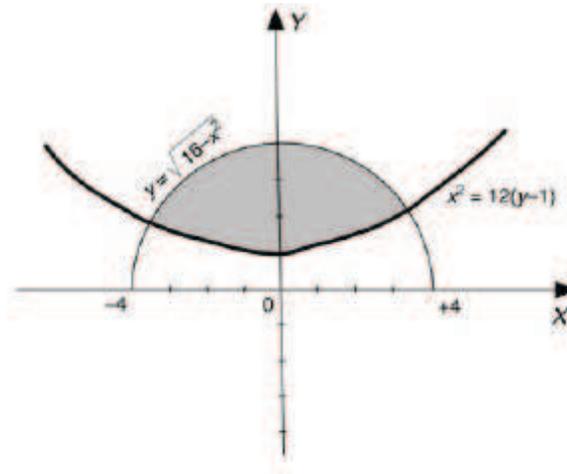
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, 1)$

f es negativa en $(1, +\infty)$



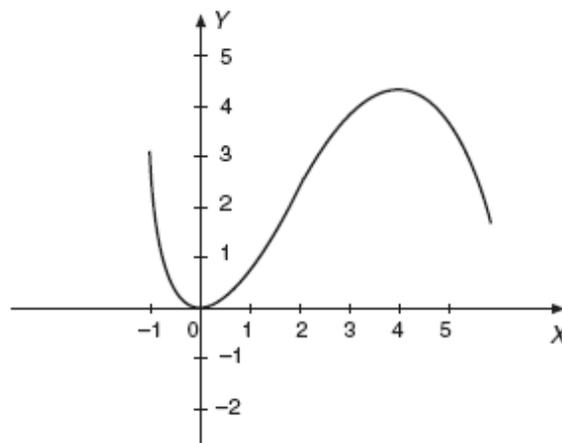
19. Queda:



La zona rayada es la región de plano comprendida entre curvas. Se cortan en los puntos $(-3, 8; 1, 3)$ y $(3, 8; 1, 3)$

20. Las dos funciones quedan:

a) Una grafica aproximada de la función $y = f(x)$ es



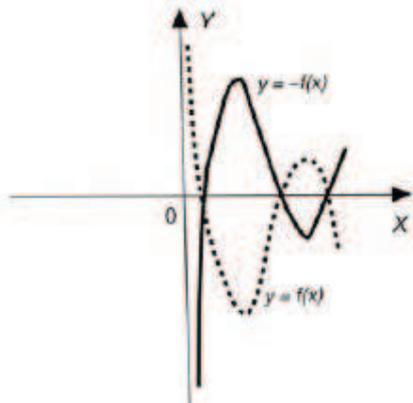
b) La gráfica tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ ya que su función derivada se anula y cambia de signo.

Presenta un máximo relativo para $x = 4$ por la misma razón anterior.

Tiene un punto de inflexión en $x = 2$ ya que la función derivada se anula y no cambia de signo.

21. La solución queda:

a) El gráfico de la función $y = -f(x)$ se obtiene al aplicar al gráfico de la función $y = f(x)$ una simetría del eje de abscisas.



b) El gráfico de la función $y = 2 \cdot f(x)$ se obtiene duplicando las coordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa en la gráfica de la función $y = f(x)$.

