Unidad 7 – Producto vectorial y mixto. Aplicaciones. Superficie esférica

PÁGINA 157

cuestiones iniciales

1. Calcula la ecuación de la recta paralela a $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$ y que pase por el origen de coordenadas.

2. Calcula un vector ortogonal a los vectores: $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (1, 2, 0)$.

3. Halla la altura del paralelepípedo cuyas bases se encuentran sobre los planos

$$\pi_1: x + 2y - 2z = 5 \qquad \pi_2: 2x + 4y - 4z = 7$$

4. Determina a, b y c para que la recta: $\frac{x-1}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z+1}{c}$ sea perpendicular a las rectas

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1} \text{ y } s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = z$$

SOLUCIONES

1. La recta es $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

2. Puede ser el vector:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

3. La altura es la distancia entre los planos, es decir:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 5 + 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. Se debe cumplir:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (2, 3, -1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-1, 2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ -a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5b \\ c = -7b \end{cases}$$

Haciendo $b = t \in \mathbb{R}$, obtenemos: $a = -5t$; $b = t$; $c = -7t$ con $t \in \mathbb{R}$

PÁGINA 173

ACTIVIDADES

■ Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia de marcha atrás:

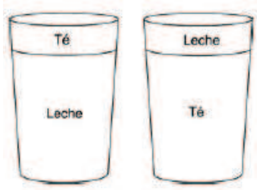
1. **Leche y té.** Un par de amigos se junta a merendar y uno de ellos pide un vaso de leche y el otro, un vaso de té. Deciden hacer mezclas del siguiente modo: toman una cucharada de leche y la echan en el té; después toman una cucharada del té donde pusieron una cucharada de leche y la echan en la leche. ¿Habrá más leche en el té o más té en la leche?

2. **Juego para dos.** Dos amigas dicen, alternativamente, un número natural del 1 al 10. La primera dice un número y la segunda dice otro, sumándole a este el que dijo la anterior, y así sucesivamente. Gana la partida la primera jugadora que consiga llegar a 100. Encuentra la estrategia ganadora para la primera jugadora y para la segunda.

3. **La sucesión de Fibonacci y las abejas.** Las abejas macho (zánganos) nacen de huevos no fecundados, es decir, sólo tienen madre. Las abejas hembra (obreras) nacen de huevos fecundados, es decir, tienen madre y padre. ¿Cuántos antecesores tiene un zángano en la décima generación anterior a él? ¿Cuántos antecesores, en total, tiene un zángano en la vigésima generación anterior a él?, y de estos, ¿cuántos son machos y cuántas son hembras? ¿En qué generación anterior a este zángano tiene 17 711 antecesores?

SOLUCIONES

1. Como comenzamos con dos vasos llenos el uno de té y el otro de leche, al final la leche que hay en el té es la misma cantidad que el té que hay en la leche; como se puede ver en el siguiente dibujo.



2. Comenzando el juego desde el final, observamos que la 1ª jugadora (G) ganara siempre y cuando deje a la 2ª jugadora (P) con 89 en la penúltima jugada. Para ello, simulamos una partida.

$$1.^{\text{a}}\text{ jugada}\begin{cases}\text{G dice 2}\\ \text{P lo que sea de 1 a 10}\end{cases}$$

$$2.^{\text{a}}\text{ jugada}\begin{cases}\text{G, el número necesario para sumar 12 o 23}\\ \text{P, el número que sea de 1 a 10}\end{cases}$$

$$3.^{\text{a}}\text{ jugada}\begin{cases}\text{G, el número necesario para sumar 23 o 34}\\ \text{P, el número que sea de 1 a 10}\end{cases}$$

...

Así sucesivamente G siempre tiene que decir el número necesario para sumar un múltiplo de 11 más 1: 12; 23; 34; 45; 56; 67; 78; 89.

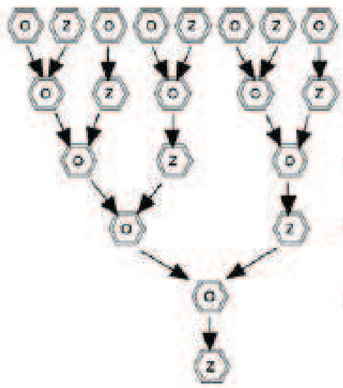
Penúltima jugada $\begin{cases} \text{G, dice el número necesario para sumar 89} \\ \text{P, el número que sea de 1 a 10} \end{cases}$

Última jugada {G dice un número de forma que obtiene 100}

Por lo tanto, la estrategia ganadora para el primer jugador es en la 1ª jugada decir cualquier número del 1 al 10 y en la siguiente jugada, a la vista de la suma que haya obtenido el 2º jugador, el 1er jugador debe decir un numero de modo que deje la suma en un múltiplo de 11 más 1, y así sucesivamente en las siguientes jugadas, hasta que en la penúltima deje al 2º jugador como resultado de la suma 89, de esta forma gana la partida.

La estrategia ganadora para el 2º jugador es la misma: ir diciendo números del 1 al 10 que dejen como resultado de la suma al 1er jugador un número que sea múltiplo de 11 más 1, así en todas las jugadas; en la penúltima debe dejar al 1er jugador como resultado de la suma 89 y de esta forma ganara la partida.

3. En el siguiente diagrama vemos la genealogía de las abejas. Designamos con Z a los zánganos y con O a las obreras.



Obtenemos la sucesión:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… que es la sucesión de Fibonacci.

- En la decima generación anterior a él un zángano tiene 89 antecesores, de los cuales 34 son machos y 5 son hembras.

Generación	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
Antecesores	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Antecesores machos		1	1	2	3	5	8	13	21	34
Antecesores hembras	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Continuando las sucesiones, obtenemos:

- En la vigésima generación anterior a él tiene 10 946 antecesores, de los cuales 4 181 son machos y 6 765 son hembras.
- En la vigésima primera generación anterior a él tiene 17 711 antecesores.

PÁGINA 178

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Para los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (-3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 1)$, calcula $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ y $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ y $\vec{w} = (2, -2, 5)$, calcula $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (-2, 3, -2)$ y $\vec{w} = (5, 0, 2)$:

   a) Calcula los productos vectoriales $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$.

   b) Calcula el producto mixto de los tres vectores anteriores.

4. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1, 1)$. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ f) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$

5. Los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 4)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

   a) Prueba que los conjuntos de vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$ forman bases.

   b) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \times \vec{u}$.

6. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$. Calcula $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

7. Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Calcula:

   a) La ecuación del plano π.

   b) El área del triángulo ABC.

8. Dada la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases}$ y el punto $P(1, 2, -1)$:

   a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r.

   b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.

9. Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, y el tercer vértice está situado en la recta $\begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Halla las coordenadas de este vértice sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$.

10. Tres vértices de un paralelogramo en el espacio son los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(2, -1, 2)$.

    a) Halla el punto D que complete el paralelogramo. ¿Hay uno o varios?

    b) Calcula el área del paralelogramo hallado anteriormente.

11. El plano $-2x + 5y - z + 10 = 0$ corta los ejes OX, OY y OZ en tres puntos A, B y C, respectivamente. Estos puntos determinan, junto al origen de coordenadas O, un tetraedro. Obtén el volumen de dicho tetraedro.

12. Calcula la distancia del punto $(-2, 4, 3)$ a la recta $\begin{cases} x = 2z + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$.

13. Dado el plano de ecuación $2x + 2y + z = 3$ y el punto $A(1, 0, 2)$, sea B el pie de la perpendicular de A a dicho plano y $C(2, 1, -2)$ un punto del plano. Halla el área del triángulo ABC.

SOLUCIONES

1. Al ser $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,5,11)$, se tiene que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(-17,13,-9)$.
   Como $\vec{v}\times\vec{w}=(3,2,-7)$, por tanto $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(-19,11,-5)$.

2. Se tiene que:
   $$\vec{u}\,(\vec{v}\times\vec{w})\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

3. Queda:
   $$\text{a) } \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10i - 2j + 7k$$
   $$\vec{u}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 14j + 5k$$
   $$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6i - 6j - 15k$$
   $$\text{b) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -36$$

4. Queda:
   a) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w} = 4(3, -1, 1) = (12, -4, 4)$
   b) $(\vec{v}\times\vec{w})\,\vec{u} = 3(2, 0, 1) = (6, 0, 3)$
   $$\text{c) } (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1$$
   $$\text{d) } (\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
   e) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (1, 14, 11)$
   f) $(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u} = (5, -18, -10)$

5. Queda:

a) El conjunto de vectores $\{\vec{u}\times\vec{v},\vec{v},\vec{w}\}$ está formado por $\{(-1,-1,1),(0,1,1),(1,2,4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

El conjunto de vectores $\{\vec{u}\times\vec{v},\vec{v}\times\vec{w},\vec{w}\}$ está formado por $\{(-1,-1,1),(2,1,-1),(1,2,4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

b) El producto mixto de los vectores pedidos es:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot[(\vec{v}\times\vec{w})\times(\vec{w}\times\vec{u}\} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

6. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=12$, el ángulo α que forman u y v es:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{12}{10\cdot 2};$$

Luego $a=53^{\circ}\,7'\,48{,}37''$

Por tanto, $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot$ sen $\alpha=10\cdot 2\cdot$ sen $(53^{\circ}\,7'\,48{,}37'')=16$

7. Queda:

a) El plano π pasa por el punto $M(1,4,4)$ y su vector normal es $\overrightarrow{PQ}=(-4,6,-2)$, su ecuación es $-4x(x-1)+6(y-4)+(-2)(z-4)=0$, es decir, $2x-3y+z+6=0$.

b) Las coordenadas de los puntos *A*, *B* y *C* son:

$$A(-3,\,0,\,0),\ B(0,\,2,\,0) \text{ y } C(0,\,0,\,-6).$$

El área del triangulo *ABC* es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|(3,\,2,\,0)\times(3,\,0,\,-6)| = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 11{,}225.$$

8. La recta *r* expresada en la forma continua es:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$$

a) La ecuación del plano es $(x-1, y-2, z+1)\cdot(1,1,2)=0$

Operando se obtiene $x+y+2z-1=0$.

b) Los vértices del triangulo son:

$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1/2)$.

El área de dicho triangulo es:

$$\text{Área}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(-1, 1, 0)\times(-1, 0, 1/2)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=0{,}612 \text{ unidades cuadradas.}$$

9. El tercer vértice tiene de coordenadas $(2t, t, 1)$. El área del triangulo de vértices $A=(0,0,0), B=(1,1,1)$ y $C=(2t,t,1)$ es:

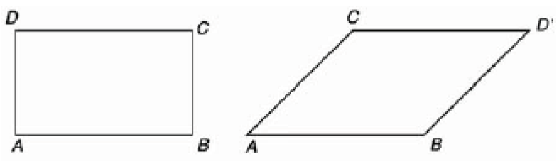
$$\text{Área}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(1, 1, 1)\times(2t, t, 1)\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|(1-t, 2t-1, -t)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(1-t)^2+(2t-1)^2+(-t)^2}$$

Como el área vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se obtiene $t=0$ y $t=1$. Estos valores nos posibilitan dos soluciones: (0, 0, 1) y (2, 1, 1).

10. Queda:

a) Pueden ocurrir dos casos como se observa en el dibujo.



I. En este caso, $\vec{AB} = \vec{DC}$ y el punto D tiene por coordenadas (4, –2, 2).

II. En este caso, $\vec{AB} = \vec{CD'}$ y el punto D' tiene por coordenadas (0, 0, 2).

b) El área del paralelogramo es:

Área = $|AB \times AC| = |(-2,1,0)\times(1,-1,1)| = |(1,2,1)| = \sqrt{6} = 2{,}45$ unidades cuadradas.

- El área del paralelogramo es igual en cualquiera de los dos casos.

11. Los puntos *A, B* y *C* son:

$A(5,0,0), B(0,-2,0)$ y $C(0,0,10)$

El área del tetraedro es la suma de las aéreas de los triángulos siguientes:

$$\text{Área }(ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-5, -2, 0) \times (-5, 0, 10)\right| = \frac{1}{2}\left|(-20, 50, -10)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3000} = 27{,}39$$

$$\text{Área }(ABO) = \frac{1}{2}\left|\vec{OA} \times \vec{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, 0, 0) \times (0, -2, 0)\right| = \frac{1}{2}\left|(0, 0, -10)\right| = \frac{1}{2}\,10 = 5$$

$$\text{Área }(ACO) = \frac{1}{2}\left|\vec{OA} \times \vec{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, 0, 0) \times (0, 0, 10)\right| = \frac{1}{2}\left|(0, -50, 0)\right| = \frac{1}{2}\,50 = 25$$

$$\text{Área }(BCO) = \frac{1}{2}\left|\vec{OB} \times \vec{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(0, -2, 0) \times (0, 0, 10)\right| = \frac{1}{2}\left|(-20, 0, 0)\right| = \frac{1}{2}\,20 = 10$$

Por tanto, el área del tetraedro es:

$27{,}39 + 5 + 25 + 10 = 67{,}39$ unidades cuadradas

12. La recta en forma continua puede expresarse:

$$\frac{x - 1/2}{2} = \frac{y - 4}{-2/3} = \frac{z}{1}$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|(5/2,\ 0,\ -3) \times (2,\ -2/3,\ 1)|}{|(2,\ -2/3,\ 1)|} = \frac{\sqrt{2\,845}}{14} = 3{,}81$$

13. Las coordenadas del punto B son las soluciones del sistema $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$

Por tanto, los vértices del triangulo son los puntos

$A(1,\ 0,\ 2)$, $B\left(\frac{7}{9},\ -\frac{2}{9},\ \frac{17}{9}\right)$ y $C(2,\ 1,\ -2)$

El área del triangulo es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{2}{9},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{1}{9}\right) \times (1,\ 1,\ -4)\right| = 0{,}71$$

PÁGINA 179

14. Sean $A(1, -5, a)$, $B(2, a, -1)$ y $C(a, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de a para que ese triángulo sea rectángulo en C y después calcula su área.

15. Halla la distancia entre las rectas:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

16. Calcula los puntos de la recta $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ que equidistan de los planos:

$$\pi_1: 2x + y - 2z = 0 \qquad \pi_2: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

17. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

18. Dada la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ y los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(3, 0, -2)$ encuentra los puntos P de r para los cuales el triángulo ABP es rectángulo con hipotenusa AB. Halla en estos casos el área del triángulo.

19. Halla el valor de a para que la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi: x - 3y + az = -6$ sean paralelos. Para este valor de a halla la distancia entre ellos.

20. Los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(0, 2, 1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.
    a) Determina los restantes vértices del rectángulo.
    b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene el segmento PQ para que la solución fuese única?

21. Halla la ecuación de la superficie esférica de centro el punto $C(1, 3, -1)$ y radio 3.

22. Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 20 = 0$.

23. Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $P(5, 1, 3)$, $Q(1, 2, 0)$, $R(-2, -2, 1)$ y $S(1, 1, -1)$.

24. Determina la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ en el punto $(2, 4, 4)$.

25. Determina el área de una superficie esférica que es tangente a los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $\pi_1: 3x - y + 5z = 5$, $\pi_2: 3x - y + 5z = 12$.

26. Halla la intersección de la esfera de centro $(3, 1, 0)$ y radio 2 con la recta de ecuaciones paramétricas $x = 2 + t$, $y = t$, $z = 1 - t$.

27. Halla la ecuación de la esfera de centro $C(-1, 4, 2)$ y tangente al plano de ecuación $4x - 4y + 4z - 12 = 0$.

14. Debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares. Es decir, el producto escalar de ambos debe ser nulo.

$\overrightarrow{CA} = (1 - a, 0, a - 2)$,

$\overrightarrow{CB} = (2 - a, a + 5, -3)$

De $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ se obtiene $a^2 - 6a + 8$

Las soluciones de la ecuación son: $a = 2$ y $a = 4$

El área del triangulo ABC es:

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left|10 - 3a - a^2, a^2 - a + 1, 5 - 4a - a^2\right|$$

Si $a = 2 \Rightarrow$ área = 3,81 unidades cuadradas.

Si $a = 4 \Rightarrow$ área = 17,48 unidades cuadradas.

15. Ambas rectas se cruzan.

Hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a la recta s. Su ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 2 = 0$$

La distancia entre las rectas es:

$$d = \frac{|0 - 0 - 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

16. Sea $P(t, -t+2, t-1)$ un punto cualquiera de la letra *r*. Se cumple:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Leftrightarrow \frac{|2t - t + 2 - 2t + 2|}{\sqrt{4+1+4}} =$$

$$= \frac{|t + 2t - 4 + 2t - 2 - 1|}{\sqrt{1+4+4}} \Leftrightarrow |-t+4| = |5t-7| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t+4 = \ \ 5t-7 \Rightarrow t = 11/6 \\ \qquad \text{o} \qquad\qquad\quad \text{o} \\ -t+4 = -5t+7 \Rightarrow t = 3/4 \end{cases}$$

$$\text{Para } t = \frac{11}{6} \text{ el punto es } P\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

$$\text{Para } t = \frac{3}{4} \text{ el punto es } P\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

17. Sea $P(t, 0, 0)$ un punto cualquiera de *r* y *Q(0, s, 3)* un punto genérico de *s*.

Los puntos *P* y *Q* por los que pasa la perpendicular común deben cumplir:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0; \quad (-t, s, 3) \cdot (1, 0, 0) = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0; \quad (-t, s, 3) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

Operando obtenemos: $t = 0$ y $s = 0$.

La recta buscada es la que pasa por $P(0,0,0)$ y $Q(0,0,3)$ y su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

18. Sea $P(-1+2t, 2-2t, 1-t)$ un punto cualquiera de la recta *r*. Para que el triangulo *ABP* sea rectángulo en *P* debe cumplirse:

$$\vec{AP}\cdot\vec{BP}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2t-3, -2t+3, -t)\cdot$$
$$\cdot(2t-4, -2t+2, -t+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t=1 \text{ o } t=2.$$

Para $t=1$ el punto es $P(1, 0, 0)$.

Para $t=2$ el punto es $P(3, -2, -1)$.

En el primer caso el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}|\vec{AP}\times\vec{AB}|=\frac{1}{2}|(-1, 1, -1)\times(1, 1, -3)=$$
$$=\frac{1}{2}|(-2, -4, -2)|=\sqrt{6}\approx 2{,}45$$

En el segundo caso el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}|\vec{AP}\times\vec{AB}|=\frac{1}{2}|(1, -1, -2)\times(1, 1, -3)=$$
$$=\frac{1}{2}|(5, 1, 2)|=\frac{\sqrt{30}}{2}\approx 2{,}74$$

19. La ecuación de la recta *r* puede ser expresada en la forma:

$$\frac{x}{5}=\frac{y+1/5}{2}=\frac{z+7/5}{-1}$$

Para que la recta *r* y el plano π sean paralelos, debe cumplirse:

$$(1, -3, a)\cdot(5, 2\ -1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-1$$

La distancia buscada es:

$$d=\frac{|0-3\cdot(-1/5)-(-7/5)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{11}}=2{,}41$$

20. a) sea $R(t, 0, 1)$ un punto genérico de la recta r. Para que R sea vértice de un rectángulo se debe cumplir:

$$\vec{PR}\cdot\vec{PQ}=0 \Leftrightarrow (t-1, -1, 1)\cdot(-1, 1, 1)=0 \Leftrightarrow t=1$$

o

$$\vec{QR}\cdot\vec{PQ}=0 \Leftrightarrow (t, -2, 0)\cdot(-1, 1, 1)=0 \Leftrightarrow t=-2$$

21. La ecuación es: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$

22. El centro es el punto $(1,-2,3)$ y el radio es $r=2$.

23. La esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2+mx+ny+pz+q=0$ cumple las condiciones:

$$\begin{cases} 5m+n+3p+q=-35 \\ m+2n \qquad +q=-5 \\ -2m-2n+p+q=-9 \\ m+\;n-p+q=-3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$m=-\frac{7}{2} \quad n=\frac{5}{2} \quad p=-\frac{9}{2} \quad q=-\frac{13}{2}$$

La ecuación de la esfera es:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}z-\frac{13}{2}=0$$

24. El centro de la esfera es el punto (1, 2, 2).
El plano buscado tiene por ecuación:

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-4)+2\cdot(z-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2y+2z-18=0.$$

25. El diámetro de la superficie de la superficie esférica es la distancia entre los planos. Esta es:

$$d(\pi_1,\pi_2)=$$
$$=\frac{|3\cdot 0-0+5\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{35}}=\frac{7}{\sqrt{35}}=1{,}18$$

El área buscada es:

$$4\pi r^2=4\pi\left(\frac{1{,}18}{2}\right)^2=4{,}398 \text{ unidades cuadradas.}$$

26. La solución del sistema:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4 \\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

Nos da como resultado los puntos:

$(4{,}155;\ 2{,}155;\ -1{,}155)$ y $(1{,}845;\ -0{,}155;\ 1{,}155)$.

27. El radio es la distancia del centro C al plano dado y vale:

$$r = \frac{|4(-1) - 4(4) + 4(2) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{48}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = 12$$

PÁGINA 180

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

28. Halla la distancia entre el punto $A(1, 2, 3)$ y cada uno de los ejes coordenados.

29. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

30. a) Encuentra las coordenadas del punto B, proyección ortogonal del punto $A(1, 0, 2)$ sobre el plano π: $2x + y + z = 10$.

    b) El punto $C(2, 1, 5)$ es un punto del plano π. ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC?

31. Halla la recta perpendicular común a las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

32. Halla la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y el eje OY.

33. a) Dado el punto $A(-6, 2, 0)$, halla su simétrico A' con respecto a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$$

    b) Halla un punto P de la recta r tal que el área del triángulo $AA'P$ valga $3\sqrt{66}$ u^2.

34. Dada la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ encuentra la ecuación del plano que la contiene y es perpendicular al plano OXY.

35. Nos dan los vectores $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$ y $\vec{c} = (2, 0, 0)$. Halla:

    a) Valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y da su significado geométrico.

    b) Ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

    c) Razona si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base, y en caso afirmativo halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (1, -2, 0)$ en dicha base.

36. Halla el lugar geométrico de los puntos P que determinan con $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$ un tetraedro de volumen 1/6.

37. Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(8, 0, 0)$, $B(0, 8, 0)$, $C(0, 0, 8)$ y $E(8, 8, 8)$. Obtén también las coordenadas de los otros vértices.

38. Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$.

39. a) Comprueba que los vectores $\vec{a} = (1, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{c} = (1, 3, 5)$ son linealmente dependientes.

    b) Encuentra la ecuación del plano que contiene a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y corta al eje OX a distancia 3 del origen.

40. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera del espacio, prueba que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} \times \vec{v}$$

28. La distancia del punto $A(1,2,3)$ al eje OX viene dado por la expresión:

$$d(A,\ OX) = \frac{|(1,\ 2,\ 3) \times (1,\ 0,\ 0)|}{|(1,\ 0,\ 0)|} =$$

$$= \frac{|(0,\ 3,\ -2)|}{|(1,\ 0,\ 0)|} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

La distancia a OY es:

$$d(A,\ OY) = \frac{|(1,\ 2,\ 3) \times (0,\ 1,\ 0)|}{|(0,\ 1,\ 0)|} =$$

$$= \frac{|(-3,\ 0,\ 1)|}{|(0,\ 1,\ 0)|} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

La distancia a OZ es:

$$d(A,\ OZ) = \frac{|(1,\ 2,\ 3) \times (0,\ 0,\ 1)|}{|(0,\ 0,\ 1)|} =$$

$$= \frac{|(2,\ -1,\ 0)|}{|(0,\ 0,\ 1)|} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

29. Estas rectas se cruzan. Por tanto

$$d(r,\ s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\ \vec{v}_r,\ \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 64 + 121}} = 1{,}09$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 8j - 11k$$

30. Quedan:

a) Junto B es la intersección del plano π con la recta que pasa por $A(1,0,2)$ y es perpendicular a π.

El punto B es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ x - 2y \quad = 1 \\ \quad y - z = -2 \end{cases}$$

Las coordenadas del punto B son $B(3,1,3)$.

b) El área del triangulo de vértices $A(1,0,2)$, $B(3,0,3)$ y $C(2,1,5)$ es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(2,\ 1,\ 1) \times (1,\ 1,\ 3)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30} = 2{,}739$$

31. Sean $P(t,t,t)$ y $Q(s+1,3s,s)$ dos puntos genéricos de las rectas r y s. Los puntos anteriores quedan fijados bajo las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{PQ} \times (1,\ 1,\ 1) = 0 \ \Rightarrow \quad 3t - 5s = 1 \\ \vec{PQ} \times (1,\ 3,\ 1) = 0 \ \Rightarrow \ 5t - 11s = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4},\ s = \frac{1}{4}$$

Los puntos fijados son $P(3/4,3/4,3/4)$ y $Q(5/4,3/4,1/4)$.

La perpendicular común tiene por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \frac{3}{4} - t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Otra forma de resolver este problema es hallar la intersección del plano que contiene a r y al vector $\vec{v}$ perpendicular a r y s, y el plano que contiene a s y al vector $\vec{v}$. Esta intersección nos da la recta perpendicular común.

$\vec{v} = (-2,0,2)$

$\pi_1 \supset$ r y a $\vec{v}: x - 2y + z = 0$

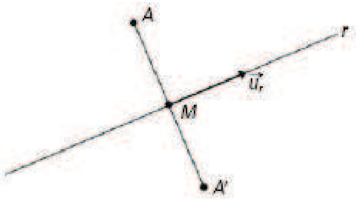
$\pi_2 \supset$ s y a $\vec{v}: 3x - 2y + 3z - 3 = 0$

Luego la recta buscada es $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

32. Estas rectas r (que pasa por A y B) y s (eje OY) se cruzan, por tanto la distancia viene dada por:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left\{\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{v_{PQ}}\right\}\right|}{\left|\vec{v}_r x \vec{v}_s\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|}{|(-1,0,-1)|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ unidades.}$$

33. Se da:



a) Sea $M(1-t,-2+t,-3t)$ un punto cualquiera de la recta r. Para determinar el punto M, punto medio del segmento de extremos A y A' se cumple:

$$\overrightarrow{AM}\perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot \vec{u}_r=0 \Leftrightarrow (-t+7,\ t-4,\ -3t)\cdot$$

$$\cdot(-1,\ 1,\ -3)=0 \Leftrightarrow t-7+t-4+9t=0 \Leftrightarrow t=1.$$

El punto M es $(0,-1,-3)$ y el simétrico de A es $A'(6,-4,-6)$.

b) Sea $P(1-t,-2+t,-3t)$ un punto de la recta r. El área del triangulo $AA'P$ es:

$$3\sqrt{66}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AA'}\times\overrightarrow{AP}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3\sqrt{66}=\frac{1}{2}|(24\,t-24,\ -42\,t+42,\ 6t-6)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 6\sqrt{66}=\sqrt{2\,376\,t^2-4\,752\,t+2\,376} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,376\,t^2-4\,752\,t=0 \Leftrightarrow t=0 \quad \text{o} \quad t=2$$

Los puntos solución son $(1,-2,0)$ o $(-1,0,-6)$.

34. El haz de planos cuya arista es la recta dada puede expresarse en la forma:

$(x+2y+1)+\lambda(3x-2z-3)=0$

Operando:

$(1+3\lambda)\,x+2y-2\lambda z+(1-3\lambda)=0$

Si este plano es perpendicular a OXY se cumplirá:

$(1+3\lambda,\ 2,\ -2\lambda)\cdot(0,\ 0,\ 1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=0$

El plano buscado es $x+2y+1=0$

35. Queda:

a) el producto misto vale 4 y representa el volumen del paralelepípedo de vectores concurrentes en un vértice los dados.

b) $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|}=0$ luego los vectores forman un Angulo de 90º.

c) los vectores son linealmente independientes pues el determinante formado por ellos vale 4 distinto de cero. Por tanto forman base.

d) escribimos el vector $\vec{v}$ dado en combinación lineal de los de la base y obtenemos:

(1, -2, 0) = x (1, 0, -1) +y (0, 2, -1) + z (2, 0, 0)

Y resolviendo el sistema tenemos que $x=1; y=1; z=0.$ por tanto las coordenadas son (1,- 1,0)

36. Sean los puntos $P(x,y,z)$. Deben verificar que $\frac{1}{6}\left|\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right\}\right|=\frac{1}{6}$ de donde $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix}=1$y obtenemos que el lugar geométrico son los planos de ecuación $x+y+z=0$.

37. El volumen vendra dado por:

$$V=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}]\right|=\begin{vmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}=1\,024\ \text{m}^3$$

38. la recta puede expresarse en la forma: $\begin{cases} x=t \\ y=-4 \\ z=t \end{cases}$

la distancia buscada es:

$$d=\frac{|(1,3,3)\times(1,0,1)|}{|(1,0,1)|}=$$

$$=\frac{|(3,2,-3)|}{|(1,0,1)|}=\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}=\sqrt{11}=3{,}317$$

39. Queda:

a) El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ vale cero.

Por tanto los vectores dados son linealmente dependientes.

b) El plano está determinado por el punto (3, 0, 0) y los vectores $(-1,2,0)$ y $(1,3,5)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10x + 5y - 5z - 30 = 0$$
$$2x + y - z - 6 = 0$$

40. Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial, se obtiene:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) =$$
$$= \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u}$$
$$= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{u} \times \vec{v}$$