Unidad 9 – Límites de funciones

PÁGINA 209

cuestiones iniciales

1. Representa gráficamente la función que satisfaga las siguientes propiedades:

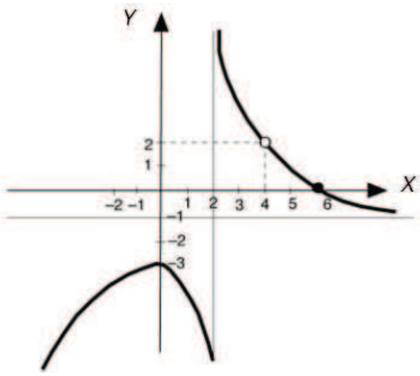
- Dom $f = \mathbb{R} - \{2, 4\}$
- Asíntota horizontal: $y = -1$
- Asíntota vertical: $x = 2$
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $f(6) = 0; \ f(0) = -3$

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$, halla:

- $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

SOLUCIONES

1. La gráfica queda:



2. Los límites en cada caso quedan:

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 2 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 0$$

PÁGINA 225

A C T I V I D A D E S

■ Utiliza el lenguaje matemático en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Números impares.** Demuestra que la suma de dos números naturales impares es un número par.

2. **Números cuadrados.** Demuestra que si a, b, c y d son números naturales, tales que

$$P = a^2 + b^2 \quad \text{y} \quad Q = c^2 + d^2$$

entonces el producto PQ es también suma de los cuadrados de dos números naturales.

SOLUCIONES

1. Se puede decir:

   Los números de la forma $2n+1$ y $2n+3$ son números impares. Su suma es:

$$(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$$

2. Queda del siguiente modo:

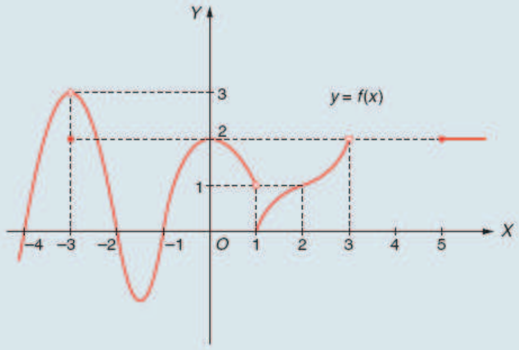
$$P\cdot Q=(a^2+b^2)+(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

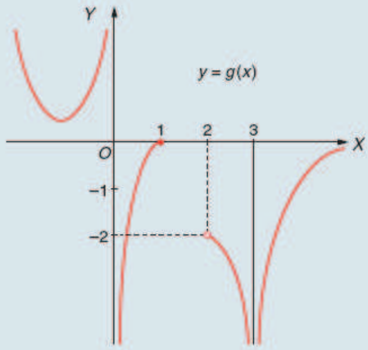
PÁGINA 230

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina, en las siguientes funciones, los datos pedidos:





- $f(-3)$
- $f(-2)$
- $f(0)$
- $f(4)$
- $\lim_{x \to -3} f(x)$
- $\lim_{x \to 0} f(x)$
- $\lim_{x \to 3^-} f(x)$
- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x)$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x)$
- $\lim_{x \to 1} f(x)$
- $\lim_{x \to 2} f(x)$
- $\lim_{x \to 3} g(x)$
- $\lim_{x \to 2^+} g(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} g(x)$
- $\lim_{x \to -\infty} g(x)$
- $\lim_{x \to 0^-} g(x)$
- $\lim_{x \to 0^+} g(x)$

2. Representa gráficamente funciones que satisfagan, respectivamente, las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -2$; $f(-3) = -2$; Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [-3, +\infty)$.

b) g estrictamente decreciente en $(0, 6)$; asíntota vertical en $x = 6$; $\lim_{x \to 3} g(x) = -2$; no existe $g(3)$.

c) h acotada inferiormente por 2; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 2$; asíntota vertical en $x = 2$; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x+2}\right]$

b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{x^3}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$

d) $\lim_{x \to +\infty} 3^{-x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{x^{-2}}{5}$

f) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^5}$

g) $\lim_{x \to -\infty} 3^{-x}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{3}\right]^x$

i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}}$

4. Determina las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \frac{2x^2}{x + 2}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x}$

5. Halla los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$ con su asíntota oblicua.

SOLUCIONES

1. Los datos requeridos son los siguientes:

$\boxed{y = f(x)}$

$f(-3) = 2;\ f(-2) = 0;\ f(0) = 2;\ f(4)$ no definida

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 3;\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2;\quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe; $\quad \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1;\quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0;$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe; $\quad \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

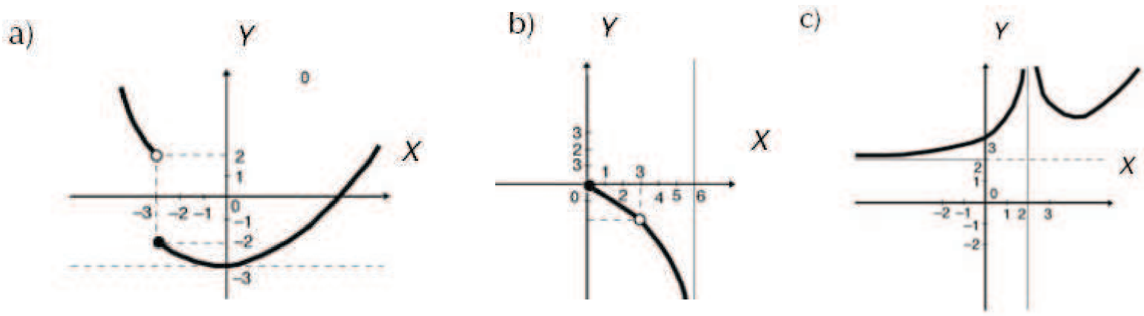
$\boxed{y = g(x)}$

$\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = -2;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$ no existe; $\quad \lim\limits_{x \to 2} g(x)$ no existe

2. Las gráficas quedan:



3. La solución en cada caso es:

a) 0	b) $+\infty$	c) $-\infty$
d) 0	e) $+\infty$	f) 0
g) $+\infty$	h) 0	i) $+\infty$

4. Queda:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Asíntotas verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +1}$ $\boxed{x = -1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

b) $g(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$

Asíntotas verticales: $x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2}{x+2} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2+2x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x+2} - 2x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x}{x+2} = -4$$

La asíntota oblicua queda $\boxed{y = 2x - 4}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

Asíntotas verticales: no existen.

Asíntoras horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$

Asíntotas oblicuas: no existen.

d) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3 - 9x}$

Asíntotas verticales: $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=3}$ $\boxed{x=-3}$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+3}{x^3-9x} = 0$ quedando $\boxed{y=0}$

5. La solución queda:

La asíntota oblicua tendrá por ecuación $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^3 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x^2 + x}{2x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $\boxed{y = x - 2}$

Para hallar los puntos de corte de la asíntota oblicua con la función $f(x)$, resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = \dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{el punto es } P(2, 0)$$

PÁGINA 231

6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x+6}{x^2+3x+2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-x+6}{x^3+3x^2+2x}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

j) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2+6x-9}{x-3}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2+6x-3}{2x^2+5x}$

l) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^2-x+3}{x^2-5x+4}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}$

p) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}}$

7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x^2-4}{x+1} \cdot \dfrac{x^2+4}{x^2-2x}\right]$

b) $\lim\limits_{x \to 2} [x-1]^{\frac{3}{x-2}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1+x}{2+x}\right]^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x+5}{x^2-1}\right]$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}$

i) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-2}$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

k) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}$

l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}$

8. Calcula, utilizando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(7x)}{4x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x-1)}{2x-4}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{3x}-1}{2x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} [1+3x]^{4/x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x^2+3}{4x^2+5}\right]^{x/2}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x-1}{2x+5}\right]^{\sqrt{x^2+3x}-x}$

10. Calcula el valor de a ($a \neq 0$) para que se verifique $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2+5x}{x^2+1}\right]^{ax} = e^{-5}$.

6. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{2}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2+x)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-3}{x^2+x} = -\dfrac{5}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} \overset{\left(\frac{k}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-3}{x-2}$ no existe este límite

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \cdot \dfrac{2 + \sqrt{4-x}}{2 + \sqrt{4-x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{4}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} = 1$

j) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 + 6x - 9}{x - 3} = 0$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} \overset{\left(\frac{k}{0}\right)}{=}$ no existe este límite

l) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0$

n) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \dfrac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \dfrac{1}{2}$

ñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) \dfrac{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x + 1}{5x - 1}\right)^{3x+2} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (3x+2) \cdot \left(\frac{5x+1}{5x-1} - 1\right)} = e^{6/5}$

p) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}\right)^{\frac{3}{x-1}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x-1} \cdot \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} - 1\right)} = e^{3/2}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x-1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2} - 1\right)} = e^2$

7. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1) \cdot x} = \dfrac{32}{6} = \dfrac{16}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{x-2} \cdot (x-1-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 2} 3} = e^3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-5} - (2x-3) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x \to +8} \frac{[\sqrt{4x^2-5} - (2x-3)][\sqrt{4x^2-5} + (2x-3)]}{\sqrt{4x^2-5} + (2x-3)} =$

$= \lim\limits_{x \to +8} \frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5} + (2x-3)} \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim\limits_{x \to +8} \frac{\frac{12x}{x} - \frac{14}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}} + \frac{2x}{x} - \frac{3}{x}} = 3$

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2-2}{x^2-2x+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1} \underset{(1^\infty)}{=} e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2-1)\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^2-1)(-5-x)}{3x^2+x}} = e^{-\infty} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 1} (x+1)(\sqrt{x+3}-2) = 8$

k) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x^2+4}{x+4}\right)^{\frac{x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4} - 1\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x \cdot (x^2-x)}{(x-1)(x+4)}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2}{(x+4)}} = e^{1/5}$

l) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}-3)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = 4$$

8. Los límites quedan:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{\operatorname{tg}^2(x-2)}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{x+2} = 0$$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(7x)}{4x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(7x)^2 / 2}{4x^2} = \frac{49}{8}$$

d) $$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\ln[1+(x-2)]}{2x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x \to 0} \frac{2^{3x}-1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3x \cdot \ln 2}{2x} = \frac{3 \cdot \ln 2}{2}$$

f) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

9. Las soluciones son:

a) $$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{4}{x}} \overset{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \to 0} \frac{4}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{12x}{x}} = e^{12}$$

b) $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2+3}{4x^2+5}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{2}{4}\right)^{\infty} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{\sqrt{x^2+3x}-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x}-x} \overset{(1^{\infty-\infty})}{=}$$

$$1^{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}} = 1^{\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}} = 1^{\frac{3}{2}} = 1$$

10. El límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right)^{ax} \underset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} ax\left(\frac{x^2+5x}{x^2+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{ax(5x-1)}{x^2+1}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{5ax^2-ax}{x^2+1}} = e^{5a}$$

$$e^{5a} = e^{-5} \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

PÁGINA 232

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

11. Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:
   - $f(0) = 0$
   - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$
   - $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
   - $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
   - $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

12. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} e^{\frac{1}{x-2}}$$

13. Calcula el límite cuando x tiende a 2 y cuando x tiende a -2 de la función $f(x) = |x^2 - 4|$.

14. Calcula cuánto debe valer a para que la función siguiente tenga límite cuando x tienda a 1:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

15. Encuentra las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$. ¿Cuántas asíntotas oblicuas puede tener una función racional?, ¿cuántas horizontales?, ¿cuántas verticales?

16. Obtén las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{x - 2}$

17. Estudia si las siguientes funciones tienen asíntotas y, en caso afirmativo, hállalas:

   a) $f(x) = \ln(x - 1)$

   b) $g(x) = e^{x-1}$

18. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

   a) Si $a \notin \text{Dom } f$, ¿puede existir $\lim_{x \to a} f(x)$?

   b) Si $a \in \text{Dom } f$, ¿puede ser $x = a$ asíntota vertical?

19. Determina el valor de a para que se verifiquen las siguientes igualdades:

   a) $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + ax + 1} - x\right] = 2$

   b) $\lim_{x \to +\infty} \left[\dfrac{4x+5}{4x+3}\right]^x = \lim_{x \to +\infty} \left[\dfrac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right]^{ax^2}$

20. Discute el siguiente límite en función de los valores de a: $\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax}\right]$

21. Calcula los siguientes límites:

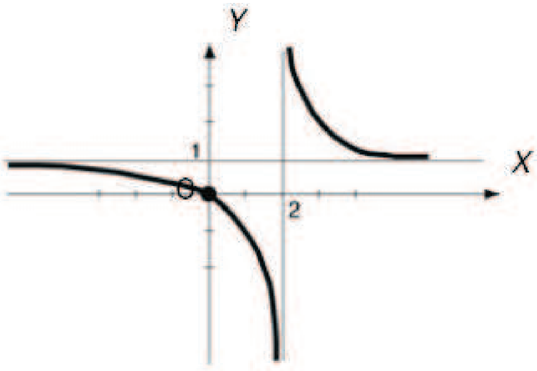
   a) $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2}\right]$

   b) $\lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{8}}\right]$

   c) $\lim_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right]$

   d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}^2\, x - x^2}{x^2}$

11. La gráfica queda:



12. El límite depende de por dónde nos acercamos a $x=2$, en cada caso queda:

$$\lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

13. Queda del siguiente modo:

Sea la función definida a trozos: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si } -\infty < x \le -2 \text{ ó } 2 \le x < +\infty \\ 4-x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$

Los límites quedan:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x^2-4\right)=0 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(4-x^2\right)=0 \qquad \text{entonces: } \lim_{x\to 2} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\left(4-x^2\right)=0 \qquad \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}\left(4-x^2\right)=0 \qquad \text{entonces: } \lim_{x\to -2} f(x)=0$$

14. Queda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1)=2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(3-ax^2\right)=3-a$$

Para que la función tenga límite cuando x tiende a 1 ambos deben coincidir, por tanto $a=1$.

15. La solución es:

Asíntotas verticales: $\boxed{x=2}$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{2x-4} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-3}{2x-4}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{2x^2-4x}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3}{2x-4x}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{2x-4}=1$$

La asíntota oblicua queda $\boxed{y=\frac{1}{2}x+1}$

- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas correspondientes a los límites cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a los límites cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$.

- Una función racional puede tener tantas asíntotas verticales como ceros del denominador que no lo sean en el numerador.

16. La solución queda:

Asíntotas verticales: $\boxed{x=2}$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5}{x-2}=\pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+x-5}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-5}{x^2-2x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x-5}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-5}{x-2}=3$$

La asíntota oblicua queda $\boxed{y=x+3}$

17. Queda del siguiente modo:

a) $f(x)=\ln(x-1)$

Para $x=1$; $y \to -\infty$ tiene asíntota vertical en $\boxed{x=1}$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-1)=+\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x}=0$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\ln(x-1)-0\cdot x)=+\infty$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b) $g(x)=e^{x-1}$

Asíntotas verticales: No tiene.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}=+\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1}=0$ tiene asíntota horizontal en $\boxed{y=0}$

No tiene asíntotas oblicuas.

18. La solución queda:

a) Sí. Por ejemplo $f(x)=x\cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$. El punto $x=0\notin \operatorname{Dom} f$, pero existe $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0$

b) No es posible pues las asíntotas verticales son los valores de x para los cuales $y\to\pm\infty$.

19. Queda del siguiente modo:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax+1}-x \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax+1}-x)(\sqrt{x^2+ax+1}+x)}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax+1-x^2}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\frac{a}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}=2\Rightarrow\boxed{a=4}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x+3}\right)^{x}\overset{1^\infty}{=} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{4x+5}{4x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{4x+3}}=e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}\right)^{ax^2}\underset{a\neq 0}{\overset{1^\infty}{=}} e^{\lim\limits_{x\to+\infty}ax^2\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi}-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a(1-\pi)x^2}{4x^2+\pi}}=e^{\frac{a(1-\pi)}{4}}=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow a=\frac{2}{1-\pi}$$

20. La solución queda:

$$1.^\text{o}\ \text{Si } a=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+4}-\sqrt{ax}=+\infty$$

$$2.^\text{o}\ \text{Si } a>0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x+4}-\sqrt{ax} \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{3x+4}-\sqrt{ax})(\sqrt{3x+4}+\sqrt{ax})}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{ax}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4-ax}{\sqrt{3x+4}+\sqrt{ax}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a=3 \\ -\infty & \text{si } a>3 \\ +\infty & \text{si } 0<a<3 \end{cases}$$

21. Los límites quedan:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(2x)}{3x^2} = \frac{(2x)^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}}-\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}}-\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}\right)}{\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}\right)} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}-\frac{5}{8}}\right)} = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right] = -2$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2 x - x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}^2 x}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1-1=0$