UNIDAD 1.- **PROBABILIDAD**

1. **EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL.**

Definición: Un fenómeno o experiencia se dice **aleatorio** cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado.
Si por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia aún antes de realizarla, se dice que el experimento es **determinista**.

Son fenómenos aleatorios:

- Extracción de una carta de la baraja.
- Lanzamiento de un dado.
- Respuestas a una encuesta.

Definición: El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama **espacio muestral** y se designa por la letra E

Ejemplo: El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar un dado es:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Ejemplo: El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar una moneda al aire tres veces es:

$$E = \{(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(x,c,c),(x,x,c),(x,c,x),(c,x,x),(x,x,x)\}$$

Ejemplo: El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos:

$$E = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$$

Definición: Cada elemento del espacio muestral E se llama **suceso** elemental.

Ejemplo: Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.

E = {(b, b, b); (b, b, n); (b, n, b); (n, b, b); (b, n, n); (n, b, n); (n, n, b); (n, n, n)}

2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.

A = {(b, b, b); (n, n, n)}

3. El suceso B = {extraer al menos una bola blanca}.

B= {(b, b, b); (b, b, n); (b, n, b); (n, b, b); (b, n, n); (n, b, n); (n, n ,b)}

4. El suceso C = {extraer una sola bola negra}.

C = {(b, b, n); (b, n, b); (n, b, b)}

2. SUCESOS

Un suceso de un fenómeno o experimento aleatorio es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E.
Se suelen representar por letras mayúsculas o una expresión que lo identifique claramente.

Tipos de sucesos:

- **Sucesos elementales,** son los formados por un solo resultado del espacio muestral.

- **Sucesos compuestos,** son los formados por varios sucesos elementales.

Ejemplo:

Tirando un dado obtener una puntuación que sea par.

$$PAR = \{2,4,6\}$$

- **Suceso seguro, E,** está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

Ejemplo:

Tirando un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

- **Suceso imposible,** $\emptyset$ **,** es el que no tiene ningún elemento.

Ejemplo:

Tirando un dado obtener una puntuación igual a 7.

- **Unión de sucesos**. Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B.

Ejemplo:

Se el experimento aleatorio de lanzar un dado. Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6} y el suceso B = {salir un 5}. El suceso $A \cup B$ = {2, 4, 5, 6}

- **Intersección de sucesos**. Dados dos sucesos A y B se llama intersección entre A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo se realizan simultáneamente A y B

Ejemplo:

Se el experimento aleatorio de lanzar un dado. Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6} y el suceso B = {salir un múltiplo de 3} = {3, 6}. El suceso $A \cap B$ = {6}
Si consideramos C = {salir impar}, entonces tenemos que $A \cap C = \emptyset$

- **Suceso contrario o complementario de A**. Se representa por $\overline{A}$ o por A^c, al suceso que se realiza cuando no se realiza A y recíprocamente.
El suceso contrario de E es $\emptyset$ y recíprocamente.

Ejemplo:

Se el experimento aleatorio de lanzar un dado. Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6}.
El suceso $A^c = \overline{A}$ = {salir nº impar} = {1, 3, 5}

- **Sucesos incompatibles**. Dados dos sucesos A y B se dicen incompatibles si es imposible que ocurran a la vez, es decir, $A \cap B = \emptyset$

Ejemplo:

Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6} y el suceso B = {salir un múltiplo de 5} = {5}. Los sucesos son incompatibles pues $A \cap B = \emptyset$

- **Diferencia de sucesos**. La diferencia de dos sucesos, $A-B$, es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B. Es decir, la diferencia de los sucesos A y B se verifica cuando lo hace A y no B. Por tanto, $A-B=A\cap B^c$
  A − B se lee como "A menos B".

Ejemplo: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Entonces $A-B=A\cap B^c$ = {2, 4}

Definición: Un suceso A está **incluido** (contenido) en otro suceso B si todos los sucesos elementales de A son sucesos elementales de B. Se representa por $A\subseteq B$.
Dos sucesos A y B son **iguales** si están formados por los mismos sucesos elementales. Se representa por $A=B$.
Ejemplo: Considerando el experimento de lanzar un dado, el suceso $A=\{2,6\}$ está contenido en el suceso $B=\{salir\ par\}$. Y el suceso $C=\{\text{salir par o impar}\}$ y el suceso $D=\{\text{salir un nº menor que 7}\}$ son iguales

3. ÁLGEBRA DE BOOLE DE SUCESOS

Se llama **espacio de sucesos** al conjunto de todos los sucesos posibles de un experimento aleatorio. Se representa por la letra S
Se verifican las siguientes propiedades con la unión, intersección y complementación (contrario) de sucesos:

PROPIEDAD	UNIÓN	INTERSECCIÓN
1. Conmutativa	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
2. Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3. Idempotente	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
4. Simplificación	$A\cup(B\cap A)=A$	$A\cap(B\cup A)=A$
5. Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
6. Elemento neutro	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
7. Absorción	$A\cup E=E$	$A\cap\varnothing=\varnothing$

Por verificar estas propiedades, al espacio de sucesos con estas operaciones de unión, intersección y complementación se le llama **álgebra de Boole de los sucesos aleatorios**.

También se verifican estas dos importantísimas propiedades conocidas como Leyes de Morgan:

- El suceso contrario de la unión de sucesos es la intersección de sus sucesos complementarios
  $$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

- El suceso contrario de la intersección de sucesos es la unión de sus sucesos complementarios
  $$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

Ejemplo: Tenemos una urna con nueve bolas numeradas del 1 al 9. Realizamos el experimento que consiste en sacar una bola de la urna, anotar el número y devolverla a la urna. Consideremos estos sucesos:
A = “sacar un nº par”, B = “salir un nº cuadrado” y C = “salir un nº primo”

Tenemos que el espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y los sucesos dados son $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,4,9\}$ y $C=\{2,3,5,7\}$. Pasemos a comprobar algunas de las propiedades

a. Distributiva de la unión respecto de la intersección $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$A\cup(B\cap C)=\{2,4,6,8\}\cup(\{1,4,9\}\cap\{2,3,5,7\})=\{2,4,6,8\}\cup\varnothing=\{2,4,6,8\}$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=(\{2,4,6,8\}\cup\{1,4,9\})\cap(\{2,4,6,8\}\cup\{2,3,5,7\})=\{1,2,4,6,8,9\}\cap\{2,3,5,4,6,7,8\}=\{2,4,6,8\}$$

b. Primera ley de Morgan

$$(A\cup B)^c=(\{2,4,6,8\}\cup\{1,4,9\})^c=(\{1,2,4,6,8,9\})^c=\{3,5,7\}$$

$$A^c\cap B^c=\{2,4,6,8\}^c\cap\{1,4,9\}^c=\{1,3,5,7,9\}\cap\{2,3,5,6,7,8\}=\{3,5,7\}$$

c. Segunda ley de Morgan

$$(A\cap B)^c=(\{2,4,6,8\}\cap\{1,4,9\})^c=(\{4\})^c=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$$

$$A^c\cup B^c=\{2,4,6,8\}^c\cup\{1,4,9\}^c=\{1,3,5,7,9\}\cup\{2,3,5,6,7,8\}=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$$

4. PROBABILIDAD. PROPIEDADES

La probabilidad mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado resultado (suceso) cuando se realiza un experimento aleatorio.
La probabilidad toma valores entre 0 y 1 (o expresados en tanto por ciento, entre 0% y 100%)

Definición: **La probabilidad de un suceso** A es el límite al que tiende la frecuencia relativa de A cuando el nº de experiencias es muy grande, es decir, tiende a ∞

Definición: Llamamos **probabilidad** a toda aplicación P definida entre los conjunto S y $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P:\ S &\to \mathbb{R} \\ \mathrm{A} &\to \mathrm{P(A)} \end{aligned}$$ que verifica los axiomas siguientes:

- Axioma 1. La probabilidad del suceso seguro o espacio muestral es 1
  $P(E)=1$
- Axioma 2. Cualquiera que sea el suceso A, su probabilidad es un nº no negativo
  $P(A)\geq 0$
- Axioma 3. Si A y B son dos sucesos incompatibles, $A\cap B=\varnothing$, entonces la probabilidad del suceso unión es la suma de las probabilidades de los sucesos
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Propiedades

- La probabilidad del suceso seguro, E, es 1: $P(E)=1$
- Se cumple que para cualquier suceso $0\leq P(A)\leq 1$
- La probabilidad de la unión de dos sucesos, *A y B*, que sean incompatibles ($A\cap B$ = ∅) es:
  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
- La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing)=0$

- La probabilidad el suceso contrario o complementario es: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- La probabilidad de la unión de dos sucesos, *A y B*, es:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- Si A y B son sucesos tales que $A \subseteq B$ entonces $P(A) \le P(B)$

Ejemplo: ¿Cuál de las siguientes aplicaciones define una probabilidad en $E = \{A, B, C\}$?

a) $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{2}$. No se trata de una probabilidad pues
$$P(E) = P(A) + P(B) + \mathrm{P(C)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12} \neq 1$$

b) $P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{2}$. En este caso cumple los tres axiomas luego es una probabilidad

Ejemplo: Sea P una probabilidad definida en $E = \{A, B, C\}$. Encuentra $P(A)$ sabiendo que:

a) $P(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{6}$. Como se tiene que cumplir el axioma 1, tenemos que
$$P(E) = P(A) + P(B) + \mathrm{P(C)} = P(A) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) $P(A) = 2 \cdot P(B)$ y $\mathrm{P(C)} = \frac{1}{4}$. Como se tiene que cumplir el axioma 1, $P(E) = P(A) + P(B) + \mathrm{P(C)} = 1$

Sustituyendo, $2 \cdot P(B) + P(B) + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow 3 \cdot P(B) = \frac{3}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{4}$ Y por tanto $P(A) = 2 \cdot P(B) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Ejemplo: Por una encuesta realizada entre los estudiantes de Bachillerato de un instituto, se sabe que lee el periódico el 40 % y el 30 % lee alguna revista de información general. Además, el 20 % lee periódicos y revistas. Con estos datos, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, lea el periódico o revistas?

Consideremos los sucesos, $LP =$”lee periódico” y $LR =$ “lee revista”, tenemos como datos por el enunciado del problema que: $P(LP) = 0,4$ $P(LR) = 0,3$ $P(LP \cap LR) = 0,2$

Aplicando la propiedad de la unión de sucesos:

$$P(LP \cup LR) = P(LP) + P(LR) - P(LP \cap LR) = 0,4 + 0,3 - 0,2 = 0,5$$

5. REGLA DE LAPLACE

Un caso particular y simple de probabilidad en un espacio muestral finito es aquel en el que se puede suponer que cada suceso elemental tiene la misma probabilidad de ocurrir. Cuando esto ocurre se dice que los sucesos elementales son **equiprobables**.

En este caso, y sólo en este caso, podemos aplicar la llamada regla de Laplace para hallar la probabilidad de un suceso:

“Sea un suceso A compuesto por sucesos elementales del espacio muestral E, entonces la probabilidad de A viene dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo: Si se lanza un dado perfecto, la perfección del dado nos induce a suponer que la probabilidad de cada suceso elementales la misma. Como además la suma de estas probabilidades ha de ser 1, se asigna a cada suceso elemental 1/6 de probabilidad.

En este caso, la probabilidad del suceso A:" Obtener número par" es: $P(A)=P\left(\{2,4,6\}\right)=3/6=0,5$

Estas probabilidades que, como en este ejemplo, se asignan a los sucesos por consideraciones teóricas, se llaman probabilidades a priori, y siempre que no exista alguna razón para pensar que un suceso elemental puede aparecer más veces que otro, admitiremos que todos ellos tienen la misma probabilidad.

Ejemplo: En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40

Casos favorables de ases: 4→ $P(as)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=0'1$

Casos favorables de copas: 10 → $P(copas)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0'25$