ANÁLISIS - EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA 2015-2018

Ejercicio 1: (2015)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) **[1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1'5 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f.

Ejercicio 2: (2015)

Ejercicio 2.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{2x}$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y sea F la primitiva de f tal que $F(1) = 2$.

a) **[0'5 puntos]** Calcula $F'(e)$.

b) **[2 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = e$.

Ejercicio 3: (2015)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

Ejercicio 4: (2015)

Ejercicio 2.- Sean $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

a) **[0'75 puntos]** Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Haz un esbozo del recinto que limitan.

b) **[1'75 puntos]** Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 5: (2015)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1, 0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

Ejercicio 6: (2015)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$.

Ejercicio 7: (2015)

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

a) **[0'5 puntos]** Estudia la derivabilidad de f.

b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) **[1 punto]** Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 8: (2015)

Ejercicio 2.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ y sea F la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(2, \ln(2))$ ($\ln$ denota logaritmo neperiano).

a) **[0'5 puntos]** Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P.

b) **[2 puntos]** Determina la función F.

Ejercicio 9: (2015)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x=1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local en el punto de abscisa $x=3$.

Ejercicio 10: (2015)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x)\,dx$.

Ejercicio 11: (2015)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener $180\,000\ m^2$ para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

Ejercicio 12: (2015)

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

a) **[0'75 puntos]** Haz un esbozo de la gráfica de f.

b) **[1'75 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 5$.

Ejercicio 13: (2015)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

Ejercicio 14: (2015)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Calcula $\displaystyle\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$.

Ejercicio 15: (2015)

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

Ejercicio 16: (2015)

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] Determina la función $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Ejercicio 17: (2015)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28 800 euros.

Ejercicio 18: (2015)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} \qquad \text{(Sugerencia: } \sqrt{x+2} = t\text{)}.$$

Ejercicio 19: (2015)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Determina a y b sabiendo que $b > 0$ y que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es derivable. ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Ejercicio 20: (2015)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Sea g la función definida por $g(x) = \ln(x)$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de $a > 1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es 1.

Ejercicio 21: (2015)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Halla a y b sabiendo que es continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - a\,e^x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 22: (2015)

Ejercicio 2.- Sea f la función definida por $f(x) = |\ln(x)|$ para $x > 0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) **[0'5 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

b) **[0'5 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y = 1$.

c) **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto citado.

Ejercicio 23: (2015)

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

a) **[1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1 punto]** Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

c) **[0'5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 24: (2015)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int e^{2x}\,\text{sen}\,(x)\,dx$.

Ejercicio 25: (2016)

Ejercicio 1.- Sea la función $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) **[1 punto]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1'5 puntos]** Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 26: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ae^x-bx$, donde a, $b\in\mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x=0$ y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=e-\frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b.

Ejercicio 27: (2016)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determina a,b,c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x=1$ y un punto de inflexión en $(-1,5)$.

Ejercicio 28: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m>0$. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de f y el eje OX.

Ejercicio 29: (2016)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(e^{ax}+b)x$, con $a\neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=0$ y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es $x=1$.

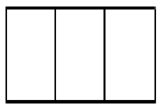
Ejercicio 30: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula el valor de $a>0$ para el que se verifica $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{2+x^2}\,dx=1$.

Ejercicio 31: (2016)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** De un terreno se desea vender un solar rectangular de $12\,800\ \text{m}^2$ dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.

Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Ejercicio 32: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-x^2+mx$ siendo $m>0$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=-mx$ y calcula el valor de m para que el área de dicho recinto sea 36.

Ejercicio 33: (2016)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.

Ejercicio 34: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad (\text{sugerencia} : t=\sqrt{2x+1}).$$

Ejercicio 35: (2016)

Ejercicio 1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=|x^2-4|$.

a) **[1'5 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

Ejercicio 36: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f''(x)=-2\,\mathrm{sen}(2x), \quad f(0)=1 \ \text{ y } \ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Ejercicio 37: (2016)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,\mathrm{sen}(x)+x\cos(3x)}{x^2}$$

es finito, calcula a y el valor del límite ($\ln$ denota logaritmo neperiano).

Ejercicio 38: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

Ejercicio 39: (2016)

Ejercicio 1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f.

b) **[1'25 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) **[0'5 puntos]** Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 40: (2016)

Ejercicio 2.- Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\ln(x)$ ($\ln$ representa logaritmo neperiano).

a) **[0'5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

b) **[2 puntos]** Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.

Ejercicio 41: (2016)

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{m}{2x}\right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

Ejercicio 42: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de f formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

Ejercicio 43: (2016)

Ejercicio 1.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$.

a) **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) **[1'25 puntos]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) **[0'5 puntos]** Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 44: (2016)

Ejercicio 2.- **[2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ (sugerencia: $t=\sqrt{x}$).

Ejercicio 45: (2017)

Ejercicio 1.- Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2a\cos(x) & \text{si} \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si} \quad x\ge\pi \end{cases}$$

es continua.

a) **[1,5 puntos]** Determina a y b.

b) **[1 punto]** Estudia la derivabilidad de f.

Ejercicio 46: (2017)

Ejercicio 2.- Considera la función dada por $f(x)=\sqrt{3+|x|}$ para $x\in[-3,3]$.

a) **[0,5 puntos]** Expresa la función f definida a trozos.

b) **[2 puntos]** Halla $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$

Ejercicio 47: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$

Ejercicio 48: (2017)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\arctan(x)$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0,\pi)$.

Ejercicio 49: (2017)

Ejercicio 1.- Se considera la función f dada por $f(x)=\dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) [1,5 puntos] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Ejercicio 50: (2017)

Ejercicio 2.- Sea f la función definida como $f(x)=(x+2)\ln(x)$ para $x>0$, donde $\ln(x)$ representa al logaritmo neperiano de x.

a) [1,75 puntos] Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

b) [0,75 puntos] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.

Ejercicio 51: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una cuerda de un metro de longitud se divide en dos trozos con los que se construyen un cuadrado y una circunferencia respectivamente.

Determina, si es posible, las longitudes de los trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Ejercicio 52: (2017)

Ejercicio 2.-

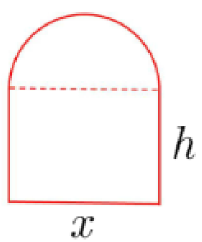
a) [2 puntos] Halla $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{3/2}}\,dx$ (sugerencia $t=1+x^3$).

b) [0,5 puntos] Halla la primitiva cuya gráfica pasa por $(2,0)$.

Ejercicio 53: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados.

Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



Ejercicio 54: (2017)

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

b) [0,75 puntos] Expresa el área como una integral.

c) [1 punto] Calcula el área.

Ejercicio 55: (2017)

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1,5 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 56: (2017)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ (sugerencia $t = \sqrt[4]{x}$).

Ejercicio 57: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2 cm, el inferior de 3 cm y los laterales de 5 cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Ejercicio 58: (2017)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x = 1$.

Ejercicio 59: (2017)

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) [2 puntos] Estudia y determina los intervalos de crecimiento y los intervalos de decrecimiento de f. Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) [0,5 puntos] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 60: (2017)

Ejercicio 2.- Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y = x$, la gráfica $y = \dfrac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo del recinto descrito.

b) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto.

c) [0,5 puntos] Si consideras la gráfica $y = \dfrac{1}{x}$ en lugar de $y = \dfrac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial? ¿por qué?

Ejercicio 61: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapas inferior y superior, con capacidad de 20π m^3. El material para las tapas cuesta 10 euros cada m^2 y el material para el resto del cilindro 8 euros cada m^2. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

Ejercicio 62: (2017)

Ejercicio 2.- Sea $I = \displaystyle\int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,dx.$

a) [1,25 puntos] Expresa I aplicando el cambio de variable $t = 2+\sqrt{x+1}$.

b) [1,25 puntos] Calcula el valor de I.

Ejercicio 63: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Calcula a, b, c y d sabiendo que f tiene un extremo relativo en $(0,1)$ y su gráfica un punto de inflexión en $(1,-1)$.

Ejercicio 64: (2017)

Ejercicio 2.- Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x) = \sqrt{2x-2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x-5$ y el eje de abscisas.

a) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.

b) [0,75 puntos] Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.

c) [1 punto] Calcula el área.

Ejercicio 65: (2017)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula la función polinómica, de grado 3, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto $(0,2)$ y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=1$ es la recta $x+y=3$.

Ejercicio 66: (2017)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (sugerencia $t = \sqrt[3]{x}$).

Ejercicio 67: (2017)

Ejercicio 1.- Considera la función definida por $f(x) = -x + \dfrac{4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0,5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 68: (2017)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$

Ejercicio 69: (2018)

Ejercicio 1.- **[2,5 puntos]** Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 1)$.

Ejercicio 70: (2018)

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Ejercicio 71: (2018)

Ejercicio 1.- **[2,5 puntos]** Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

es derivable.

Ejercicio 72: (2018)

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ y $f(x) = 3 - x^2$.

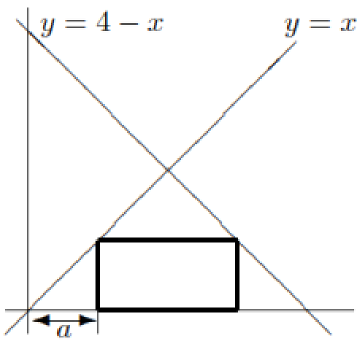
a) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) **[0,75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) **[0,75 puntos]** Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 73: (2018)

Ejercicio 1.-
Se desea construir un rectángulo, como el de la figura, de área máxima. La base está situada sobre el eje OX, un vértice está en la recta $y = x$ y el otro, en la recta $y = 4 - x$. Se pide:



a) **[0,25 puntos]** Halla la altura del rectángulo en función de a (ver la figura).

b) **[1 punto]** Halla la base del rectángulo en función de a.

c) **[1,25 puntos]** Encuentra el valor de a que hace máximo el área del rectángulo.

Ejercicio 74: (2018)

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{2-x}$.

a) **[0,75 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

b) **[0,5 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta $x + y = 3$.

c) **[1,25 puntos]** Calcula el área del recinto indicado.

Ejercicio 75: (2018)

Ejercicio 1.- Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x\,e^{x-1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x\,e^{x-1} & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x\,e^{1-x} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

a) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y en $x = 1$.

b) [1,5 puntos] Estudia la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

Ejercicio 76: (2018)

Ejercicio 2.- Considera la función $f : \left(-\frac{e}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(2x+e)$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) [0,75 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

b) [1,75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

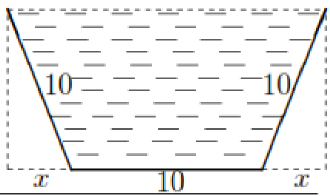
Ejercicio 77: (2018)

Ejercicio 1.- Se desea construir una canaleta, para la recogida de agua, cuya sección es como la de la figura. La base y los costados deben medir 10 cm y se trata de darle la inclinación adecuada a los costados para obtener una sección de área máxima. Se pide:

a) [0,25 puntos] Halla la altura de la canaleta en función de x (ver la figura).

b) [0,75 puntos] Halla el área de la sección de la canaleta en función de x.

c) [1,5 puntos] Encuentra el valor de x que hace máximo dicho área.



Ejercicio 78: (2018)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = x + 2$.

Ejercicio 79: (2018)

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{e^{-}}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [0,75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y halla sus máximos y mínimos relativos (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

c) [0,75 puntos] Esboza la gráfica de f indicando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

Ejercicio 80: (2018)

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) [1,75 puntos] Calcula $\displaystyle\int f(x)\,dx$

b) [0,75 puntos] Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 1)$.

Ejercicio 81: (2018)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}(x)} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Determina a, b y c sabiendo que f es continua, alcanza un máximo relativo en $x=-1$ y la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$ tiene pendiente 2.

Ejercicio 82: (2018)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Considera la función f definida por $f(x)=a\,x\ln(x)-b\,x$ para $x>0$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=1$ y que

$$\int_1^2 f(x)\,dx = 8\ln(2)-9$$

Ejercicio 83: (2018)

Ejercicio 1.- Considera la función f definida por $f(x)=a\ln(x)+bx^2+x$ para $x>0$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

a) [1,5 puntos] Halla a y b sabiendo que f tiene extremos relativos en $x=1$ y en $x=2$.

b) [1 punto] ¿Qué tipo de extremos tiene f en $x=1$ y en $x=2$?

Ejercicio 84: (2018)

Ejercicio 2.- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-2x}$.

a) [0,75 puntos] Determina el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=-2ex$.

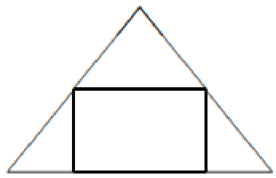
b) [0,5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y=-2ex$ y el eje de ordenadas.

c) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 85: (2018)

Ejercicio 1.-

[2,5 puntos] Considera un triángulo isósceles en el que el lado desigual mide 8 cm y la altura correspondiente mide 5 cm. Calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en dicho triángulo (ver figura).



Ejercicio 86: (2018)

Ejercicio 2.- Siendo $a>1$, considera el rectángulo de vértices $A(1,0), B(1,1), C(a,1)$ y $D(a,0)$. La gráfica de la función f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ para $x\neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

a) [0,5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo descrito.

b) [2 puntos] Determina el valor de a para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

Ejercicio 87: (2018)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x + xe^{-x}$

a) [1,25 puntos] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a la recta $x - y + 1 = 0$.

b) [1,25 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 88: (2018)

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Calcula $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{1+e^x}\,dx$ donde $\ln$ denota logaritmo neperiano (sugerencia $t = e^x$).

Ejercicio 89: (2018)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

Ejercicio 90: (2018)

Ejercicio 2.- Considera las funciones f y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -x^2 - x + 3$ y $g(x) = |x|$.

a) [1,25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) [1,25 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Ejercicio 91: (2018)

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Se desea construir una caja sin tapadera de base cuadrada. El precio del material es de 18 euros/m^2 para los laterales y de 24 euros/m^2 para la base. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir si disponemos de 50 euros.

Ejercicio 92: (2018)

Ejercicio 2.- Se sabe que la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si} \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} & \text{si} \quad x > 8 \end{cases}$$

es continua.

a) [0,5 puntos] Determina a.

b) [2 puntos] Para $a = 8$, calcula $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,dx$.