HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 2: **DERIVADAS**

Ejercicio 1: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=x^4+3x^2-6$	b) $y=6x^3-x^2$	c) $y=\frac{x^5}{a+b}-\frac{x^2}{a-b}$	d) $y=\frac{x^3-x^2+1}{5}$
e) $y=2ax^3-\frac{x^2}{b}+c$	f) $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x$	g) $f(x)=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}-4$	h) $y=\frac{(x+1)^3}{x^{\frac{3}{2}}}$
i) $y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+5$	j) $y=\frac{ax^2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{x\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$	k) $h(x)=(1+4x^3)(1+2x^2)$	l) $y=x(2x-1)(3x+2)$
m) $y=(2x-1)(x^2-6x+3)$	n) $f(x)=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$	o) $v(t)=\frac{a-t}{a+t}$	p) $f(t)=\frac{t^3}{1+t^2}$
q) $f(s)=\frac{(s+4)^2}{s+3}$	r) $y=\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$	s) $y=(2x^2-3)^2$	t) $g(a)=(x^2+a^2)^5$
u) $y=\sqrt{x^2+a^2}$	v) $y=(a+x)\sqrt{a-x}$	x) $y=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	y) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$

Soluciones:

1 a) $y'=4x^3+6x$ b) $y'=18x^2-2x$ c) $y'=\frac{5x^4}{a+b}-\frac{2x}{a-b}$

d) $y'=\frac{3x^2-2x}{5}$ e) $y'=6ax^2-\frac{2x}{b}$ f) $y'=\frac{42}{2}x^{5/2}+\frac{20}{2}x^{3/2}+$

$y'=21x^{5/2}+10x^{3/2}+$

g) $y'=\frac{3}{2\sqrt{3x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x^2}$

h) $y'=\frac{[(x+1)^3]'\cdot x^{3/2}-(x+1)^3\cdot(x^{3/2})'}{(x^{3/2})^2}=\frac{3(x+1)^2\cdot x^{3/2}-(x+1)^3\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}}{x^3}$

i) $y'=\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}-\frac{2}{2\sqrt{x}}$; $y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

También : $y'=(x^{2/3})'-2\cdot(x^{1/2})'+(5)'=\frac{2}{3}x^{-1/3}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$

j) $y = \frac{ax^2}{x^{1/3}} + \frac{b}{\sqrt{x^3}} - \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = a\cdot x^{5/3} + b\cdot x^{-3/2} - x^{-1/6}$

$y' = \frac{5}{3}a x^{2/3} - \frac{3}{2}b x^{-5/2} + \frac{1}{6}x^{-7/6}$

$y' = \frac{5}{3}a\sqrt[3]{x^2} - \frac{3b}{2\sqrt{x^5}} + \frac{1}{6\sqrt[6]{x^7}}$

k) $y' = (1+4x^3)'(1+2x^2) + (1+4x^3)\cdot(1+2x^2)'$

$y' = 12x^2\cdot(1+2x^2) + (1+4x^3)\cdot 4x$

$y' = 12x^2 + 24x^4 + 4x + 16x^4$; $y' = 40x^4 + 12x^2 + 4x$

l) $y = (2x^2 - x)\cdot(3x+2)$

$y' = (2x^2-x)'\cdot(3x+2) + (2x^2-x)\cdot(3x+2)'$

$y' = (4x-1)(3x+2) + (2x^2-x)\cdot 3$

$y' = 12x^2 - 3x + 8x - 2 + 6x^2 - 3x$

$y' = 18x^2 + 2x - 2$

m) $y' = (2x-1)'\cdot(x^2-6x+3) + (2x-1)\cdot(x^2-6x+3)'$

$y' = 2(x^2-6x+3) + (2x-1)\cdot(2x-6)$

$y' = 2x^2 - 12x + 6 + 4x^2 - 2x - 12x + 6$; $y' = 6x^2 - 26x + 12$

n) $y' = \frac{(2x^4)'\cdot(b^2-x^2) - 2x^4\cdot(b^2-x^2)'}{(b^2-x^2)^2}$

$y' = \frac{8x^3\cdot(b^2-x^2) - 2x^4\cdot(b^2-2x)}{(b^2-x^2)^2} = \frac{8b^2x^3 - 8x^5 - 2b^2x^4 + 4x^5}{(b^2-x^2)^2}$

$y' = \frac{-4x^5 - 2b^2x^4 + 8b^2x^3}{b^4 - 2b^2x^2 + x^4}$

o) $v'(t) = \frac{(a-t)'\cdot(a+t) - (a-t)\cdot(a+t)'}{(a+t)^2} = \frac{-1\cdot(a+t) - (a-t)\cdot 1}{(a+t)^2}$

$v'(t) = \frac{-a-t-a+t}{(a+t)^2}$; $v'(t) = \frac{-2t}{(a+t)^2}$

p) $f'(t) = \frac{(t^3)'\cdot(1+t^2) - t^3\cdot(1+t^2)'}{(1+t^2)^2} = \frac{3t^2(1+t^2) - t^3(2t)}{1+2t^2+t^4}$

$f'(t) = \frac{3t^2 + 3t^4 - 2t^4}{1+2t^2+t^4}$; $f'(t) = \frac{t^4+3t^2}{1+2t^2+t^4}$

q) $f'(s) = \frac{[(s+4)^2]' \cdot (s+3) - (s+4)^2 \cdot (s+3)'}{(s+3)^2}$

$f'(s) = \frac{2(s+4)\cdot 1(s+3) - (s+4)^2\cdot 1}{(s+3)^2} = \frac{2s^2+14s+24-s^2-8s-16}{s^2+6s+9}$

$f'(s) = \frac{s^2+6s+8}{s^2+6s+9}$

r) $y' = \frac{(x^3+1)'\cdot(x^2-x-2) - (x^3+1)\cdot(x^2-x-2)'}{(x^2-x-2)^2} = \frac{3x^2(x^2-x-2)-(x^3+1)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$

$y' = \frac{3x^4-3x^3-6x^2-(6x^4-x^3+2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-3x^4-2x^3-6x^2-2x+1}{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}$

s) $y' = 2(2x^2-3)\cdot(2x^2-3)'$

$y' = 2\cdot(2x^2-3)\cdot 4x$; $y' = 8x(2x^2-3) = 16x^3-24x$

t) $g'(a) = 5(x^2+a^2)^4\cdot(x^2+a^2)'$ La variable es "a"

$g'(a) = 5\cdot(x^2+a^2)^4\cdot 2a$; $g'(a) = 10a(x^2+a^2)^4$

u) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x^2+a^2)'$; $y' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

v) $y' = (a+x)'\cdot\sqrt{a-x} + (a+x)(\sqrt{a-x})'$

$y' = 1\cdot\sqrt{a-x} + (a+x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{a-x}}\cdot(a-x)'$

$y' = \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}}$

x) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$

y) $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2+x+1}}\cdot(x^2+x+1)'$

$f'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}}$

Ejercicio 2: Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$	b) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$	c) $y=x\ln x$	d) $f(x)=\log_2\left(x^3-2x+5\right)$
e)	f)	g)	h)

$y=\log\left(x^2+x\right)$	$y=\ln^3 x+\sqrt{\log x}+\log_3 x^4$	$y=e^{4x+5}$	$y=a^{x^2}$
i) $g(r)=7^{r^2+2r}$	j) $y=e^x\left(1-x^2\right)$	k) $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$	l) $y=\ln\left(\dfrac{2x}{3x+1}\right)$
m) $y=3\text{sen}x-\cos x+7$	n) $f(x)=\text{cotg}\,x$	ñ) $f(x)=\dfrac{2}{\cos x}$	o) $y=L\dfrac{1+senx}{1-senx}$
p) $h(x)=5^{3x^2+2x-1}$	q) $g(x)=\text{arctg}\left(\sqrt{x}\right)-7$	r) $g(x)=\text{arcos}\left(e^{2x}\right)$	s) $g(x)=\dfrac{3}{(x-5)^2}$
t) $y=sen^2 x$	u) $y=\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x-1}$	v) $f(x)=2\cdot\text{sen}\,x+\cos 3x$	x) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{1+\cos x}$
y) $f(t)=t\cdot\text{sen}\,t+\cos t$	z) $y=\text{sen}\,2x\cdot\cos 3x$	A1) $f(t)=\text{sen}^3\,t\cdot\cos t$	B1) $y=a\sqrt{\cos 2x}$
C1) $y=\dfrac{1}{2}tg^2 x$	D1) $y=\ln(\cos x)$	E1) $y=\ln\ \text{sen}^2 x$	F1) $y=\dfrac{tgx-1}{\sec x}$
G1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}}$	H1) $y=\log_3(x^2-\text{sen}x)$	I1) $y=L\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$	J1) $f(x)=x\ln x$
K1) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	L1) $y=a^{tg(nx)}$	M1) $y=e^{\cos x}\cdot\sin x$	N1) $f(x)=e^{x^2}\cdot tgx$
Ñ1) $f(x)=arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)$	O1) $f(x)=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$	P1) $y=\dfrac{x^2\sin 2x}{2}+\dfrac{x\cos 2x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x$	Q1) $h(t)=\cos^2 t+\sin^2 t$

Soluciones:

2) a) $y' = 3\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)'$

$y' = \cancel{3}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\cancel{3}\sqrt[3]{x^2}}$; $y' = \dfrac{\left(+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

b) $y' = \dfrac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = \dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{2}{1-x^2}$

Otra forma: $y = \ln(1+x)-\ln(1-x) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}$

$= \dfrac{2}{1-x^2}$

c) $y' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$

$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$; $y' = \ln x + 1$

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x + 5) \cdot \ln 2}$ e) $y' = \dfrac{2x+1}{x^2 + x}$

f) $y' = 3(\ln x)^2 \cdot (\ln x)' + \dfrac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot (\log x)' + \dfrac{1}{x^4 \cdot \ln 3} \cdot (x^4)'$

$y' = \dfrac{3\ln^2 x}{x} + \dfrac{1}{2x \ln 10 \cdot \sqrt{\log x}} + \dfrac{4x^3}{x^4 \cdot \ln 3}$

$y' = \dfrac{3\ln^2 x}{x} + \dfrac{1}{2x \ln 10 \sqrt{\log x}} + \dfrac{4}{x \ln 3}$

g) $y' = e^{4x+5} \cdot (4x+5)'$; $y' = 4e^{4x+5}$

h) $y' = a^{x^2} \cdot \ln a \cdot (x^2)'$; $y' = 2x \ln a \cdot a^{x^2}$

i) $g'(r) = 7^{r^2+2r} \cdot \ln 7 \cdot (r^2+2r)'$; $g'(r) = (2r+2) \ln 7 \cdot 7^{r^2+2r}$

j) $y' = e^x (1-x^2) + e^x (-2x)$

k) $y' = \dfrac{(e^x-1)' \cdot (e^x+1) - (e^x-1) \cdot (e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^x \cdot (e^x+1) - e^x \cdot (e^x-1)}{(e^x+1)^2} =$

$= \dfrac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} = \dfrac{2e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1}$

l) $y' = (\ln(2x))' - (\ln(3x+1))' = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{3x+1} = \dfrac{6x+2-3x}{x(3x+1)}$

$y' = \dfrac{3x+2}{x(3x+1)}$

m) $y' = 3 \cdot (\operatorname{sen} x)' - (\cos x)' + (7)' = 3\cos x + \operatorname{sen} x$

n) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ $f'(x) = \dfrac{(\cos x)' \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot (\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x}$

$f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

ñ) $f(x) = 2 \cdot (\cos x)^{-1}$

$f'(x) = 2 \cdot (-1) (\cos x)^{-2} \cdot (\cos x)'$; $f'(x) = \dfrac{+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

o) $y = L(1+\text{sen}x) - L(1-\text{sen}x)$

$$y' = \frac{\cos x}{1+\text{sen}x} - \frac{(-\cos x)}{1-\text{sen}x} = \frac{\cos x(1-\text{sen}x) + \cos x(1+\text{sen}x)}{1-\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos x\cdot\text{sen}x + \cos x + \cos x\cdot\text{sen}x}{1-\text{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

p) $h'(x) = 5^{3x^2+2x-1}\ln 5\,(3x^2+2x-1)'$; $h'(x) = (6x+2)\ln 5\cdot 5^{3x^2+2x-1}$

q) $g'(x) = \dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' - (7)'$; $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

r) $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}\cdot(e^{2x})' = \dfrac{-2\cdot e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$

s) $g(x) = 3\cdot(x-5)^{-2}$; $g'(x) = -6\cdot(x-5)^{-3} = \dfrac{-6}{(x-5)^3}$

t) $y' = 2\cdot\text{sen}x\cdot(\text{sen}x)'$; $y' = 2\text{sen}x\cdot\cos x$

$y' = \text{sen}2x$ (¡de 1º Bach!)

u) $$y' = \frac{(e^{2x}-2e^x+1)'\cdot(e^x-1) - (e^{2x}-2e^x+1)\cdot(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$$

$$y' = \frac{(2e^{2x}-2\cdot e^x)(e^x-1) - (e^{2x}-2e^x+1)\cdot e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$y' = \frac{2e^{3x} - \cancel{2e^{2x}} - 2e^{2x} + 2e^x - e^{3x} + \cancel{2e^{2x}} - e^x}{e^{2x}-2e^x+1}$$

$$y' = \frac{e^{3x}-2e^{2x}+e^x}{e^{2x}-2e^x+1} = \frac{e^x(e^{2x}-2e^x+1)}{(e^x-1)^2}$$

v) $f'(x) = 2\cdot\cos x - 3\,\text{sen}\,3x$

x) $$f'(x) = \frac{(\text{sen}x)'\cdot(1+\cos x) - \text{sen}x\cdot(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x(1+\cos x)+\text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

y) $f'(t) = 1\cdot\text{sen}t + t\cdot\cos t - \text{sen}t$; $f'(t) = t\cdot\cos t$

z) $y' = (\text{sen}2x)'\cdot\cos 3x + (\text{sen}2x)\cdot(\cos 3x)'$

$y' = 2\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x + \text{sen}2x\cdot(-3\cdot\text{sen}3x)$

$y' = 2\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x - 3\cdot\text{sen}2x\cdot\text{sen}3x$

A1) $f'(t) = (3\cdot \operatorname{sen}^2 t\cdot \cos t)\cdot \cos t + \operatorname{sen}^3 t\cdot(-\operatorname{sen} t)$

$f'(t) = 3\operatorname{sen}^2 t\cdot \cos^2 t - \operatorname{sen}^4 t$

B1) $y' = a\cdot\left(\sqrt{\cos 2x}\right)' = a\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\cos 2x}}\cdot(-\operatorname{sen} 2x)\cdot\cancel{2}$

$$y' = \frac{-a\cdot \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

C1) $y' = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \operatorname{tg} x\cdot(\operatorname{tg} x)'$; $y' = \operatorname{tg} x\cdot(1+\operatorname{tg}^2 x)$

$y' = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x$

D1) $y' = \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'$

$y' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

E1) $y' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\cdot 2\operatorname{sen} x\cdot \cos x$

$y' = \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x}$

F1) $$y' = \frac{(\operatorname{tg} x - 1)'\cdot(\sec x) - (\operatorname{tg} x - 1)\cdot(\sec x)}{(\sec x)^2}$$

Más fácil:

$$y = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} - \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \operatorname{sen} x - \cos x$$

$y' = \cos x + \operatorname{sen} x$

G1) $y = \frac{1}{2}\left(L(1+\operatorname{sen} x) - L(1-\operatorname{sen} x)\right)$ (Hecho en 0)

$y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

H1) $y' = \dfrac{1}{(x^2 - \text{sen}x)\cdot \ln 3} \cdot (x^2 - \text{sen}x)'$

$y' = \dfrac{2x - \cos x}{(x^2 - \text{sen}x)\cdot \ln 3}$

I1) $y = L(1+x^2) - L(1-x^2)$

$y' = \dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{-2x}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \dfrac{4x}{1-x^4}$

J1) $f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot \dfrac{1}{x}$; $f'(x) = \ln x + 1$

K1) $y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right)$

L1) $y' = a^{tg(nx)} \cdot \ln a \cdot \left(tg(nx)\right)'$

$y' = a^{tg(nx)} \cdot \ln a \cdot \left(1 + tg^2(nx)\right)\cdot n$

M1) $y' = (e^{\cos x})' \cdot (\text{sen}x) + e^{\cos x}\cdot (\text{sen}x)'$

$y' = -\text{sen}x \cdot e^{\cos x}\cdot \text{sen}x + e^{\cos x}\cdot \cos x$

$y' = -\text{sen}^2x \cdot e^{\cos x} + \cos x \cdot e^{\cos x}$

$y' = e^{\cos x}\cdot \left(-\text{sen}^2 x + \cos x\right)$

N1) $f'(x) = (e^{x^2})' \cdot tg x + e^{x^2}\cdot (tg x)'$

$f'(x) = 2x\cdot e^{x^2}\cdot tg x + e^{x^2}\cdot (1 + tg^2 x)$

$f'(x) = e^{x^2}\cdot (2x\, tg x + 1 + tg^2 x)$

$f'(x) = e^{x^2}\cdot (1 + 2x\, tg x + tg^2 x)$

Ñ1) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)'$

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \cdot \dfrac{-1}{\cancel{x^2}} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

O1) $f'(x) = \dfrac{(\text{arc}\cos x)' \cdot \sqrt{1-x^2} - \text{arc}\cos x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$

$= \dfrac{\frac{-1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cdot \cancel{\sqrt{1-x^2}} - \text{arc}\cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot (-2x)}{1-x^2}$

$= \dfrac{-1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2}\cdot (1-x^2)} = \dfrac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

P1) $y' = \frac{1}{2}(x^2 \cdot \text{sen}\,2x)' + \frac{1}{2}(x \cdot \cos 2x)' - \frac{1}{4} \cdot (\text{sen}\,2x)'$

$y' = \frac{1}{2}(2x \cdot \text{sen}\,2x + x^2 \cdot \cos 2x \cdot 2) +$

$+ \frac{1}{2}(\cos 2x + x \cdot (-\text{sen}\,2x) \cdot 2) - \frac{1}{4} \cdot \cos 2x \cdot 2$

$y' = x \cdot \text{sen}\,2x + x^2 \cdot \cos 2x + \cancel{\frac{1}{2}\cos 2x} - \cancel{x \cdot \text{sen}\,2x} - \cancel{\frac{1}{2}\cos 2x}$

$y' = x^2 \cdot \cos 2x$

Q1) $h(t) = \cos^2 t + \text{sen}^2 t$

$h'(t) = 2\cos t \cdot (-\text{sen}\,t) + 2 \cdot \text{sen}\,t \cdot \cos t$

$h'(t) = -2\,\text{sen}\,t \cdot \cos t + 2\,\text{sen}\,t \cdot \cos t = 0$

$h'(t) = 0$

Es lógico, porque $h(t) = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$

Ejercicio 3: Calcula:

a) Derivada de $f(x) = x^4 + 4x - 1$ en el punto de abscisa *x = 1*

a) $f'(1)$ si $f(x) = x^4 + 4x - 1$

$f'(x) = 4x^3 + 4 \Rightarrow f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 4 = 8$

b) Derivada de $f(x) = L(x+3)$ en *x = 2*

b) $f'(2)$ si $f(x) = L(x+3)$

$f'(x) = \frac{1}{x+3} \cdot (x+3)' = \frac{1}{x+3}$; $f'(2) = \frac{1}{5}$

c) Derivada de $f(x) = \cos(5x + \frac{\pi}{2})$ en $x = \pi$

c) $f'(\pi)$ si $f(x) = \cos(5x + \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = -\text{sen}(5x + \frac{\pi}{2}) \cdot 5 = -5 \cdot \text{sen}(5x + \frac{\pi}{2})$

$f'(\pi) = -5 \cdot \text{sen}(5\pi + \frac{\pi}{2}) = -5 \cdot \text{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right) = 5$ $(270°)$

Ejercicio 4: Calcula la derivada de orden n de la función $f(x)=e^{2x}$

$f(x) = e^{2x}$
$f'(x) = 2\cdot e^{2x}$
$f''(x) = 2\cdot e^{2x}\cdot 2 = 4\cdot e^{2x}$
$f'''(x) = 2\cdot e^{2x}\cdot 4 = 8\cdot e^{2x}$
$\vdots$
$\boxed{f^{n)}(x) = 2^{n}\cdot e^{2x}}$

Ejercicio 5: ¿Qué valores han de tener *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & si\ \ x\le 2 \\ ax^2+b & si\ \ x>2\end{cases}$

sea derivable en *x = 2?*

$f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & x\le 2 \\ ax^2+b & x>2\end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & x\le 2 \\ 2ax & x>2\end{cases}$

• f continua en $x=2$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2-2x+3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} ax^2+b = 4a+b \end{array}\right\}$ $3 = 4a+b$

$f(2) = 2^2-2\cdot 2+3 = 3$

$b = 3-4a$

$b = 1$

• f derivable en $x=2$

$\left.\begin{array}{l} f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2} 2x-2 = 2 \\ f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2} 2ax = 4a \end{array}\right\}$ $4a = 2$; $a = \frac{1}{2}$

Ejercicio 6: Halla la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva $y=3sen2x$ en el punto de abscisa *x = 0*.

(6) $y = 3\cdot sen2x$, en $x=0$ recta tg y recta normal.

$f(0) = 0$

$y' = 3\cdot \cos 2x\cdot 2 = 6\cos 2x$

$y'(0) = 6\cdot\cos 0 = 6$; $P(0,0)$ y $m=6$

$m = f'(0) = 6$

$y-0 = 6\cdot(x-0)$

$\boxed{y=6x}$ t

la recta normal:

$y-0 = -\frac{1}{6}(x-0)$

$\boxed{y=-\frac{1}{6}x}$ r_n

Ejercicio 7: Di si la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x\le 1 \\ 2x-2 & si\ \ x>1 \end{cases}$ es derivable en *x = 1*.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ \ x\le 1 \\ 2x-2 & si\ \ x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x<1 \\ 2 & si\ \ x>1 \end{cases}$$

¿Es derivable en $x=1$?

Es continua porque $f(1)=0$ y

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x^2-1=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} 2x-2=0 \end{array}\right\}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1} 2x=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1} 2=2$$

$$f'_-(1)=f'_+(1)$$

Ejercicio 8: Halla los puntos de derivada nula de la función $y=\left(3x-2x^2\right)\cdot e^x$

$y=(3x-2x^2)\cdot e^x$ ¿Dónde se anula y'?

$$y'=e^x\cdot(3x-2x^2)+(3-4x)\,e^x$$

$$=e^x\left(3x-2x^2+3-4x\right)=e^x\cdot\left(-2x^2-x+3\right)$$

$y'=0 \Leftrightarrow$ $e^x=0$ No tiene solución

$-2x^2-x+3=0$; $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+24}}{2\cdot(-2)}$

$$x=\frac{1\pm 5}{-4} \begin{cases} x=1 \\ x=-\dfrac{6}{4}\ ;\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 9: Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ en su punto de corte con el eje de abscisas

Tg a $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ en su punto de corte con OX ; $y=0$

$0=\dfrac{x-2}{x+1}$; $\begin{array}{l} x=2 \\ y=0 \end{array}$; $P(2,f(2))=P(2,0)$

$$y'=\frac{1(x+1)-(x-2)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$y'(2)=\frac{3}{(2+1)^2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3} \qquad y-0=\frac{1}{3}(x-2)$$

$$\boxed{y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}$$

Ejercicio 10: Sea la función definida para todo nº real x por $f(x) = ax^3 + bx$. Determine a y b para que su gráfica pase por el punto $(1,1)$ y en ese punto la pendiente de la recta normal es $\frac{1}{3}$

$f(x) = ax^3 + bx$

que pase por $(1,1)$ y la pendiente de r_n sea $\frac{1}{3}$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = a + b$

$f'(x) = 3ax^2 + b$; $-\frac{1}{f'(1)} = \frac{-1}{3a+b} = \frac{1}{3}$

$m_{r_t} = -3 \Rightarrow -3 = 3a + b$

$\left.\begin{array}{l} -3 = 3a + b \\ 1 = a + b \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} -3 = 3a + b \\ -1 = -a - b \end{array}\right\}$

$-4 = 2a$ $\quad a = -2$

$b = 1 - a$

$b = 1 + 2$

$b = 3$

$\boxed{f(x) = -2x^3 + 3x}$

Ejercicio 11: Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-k}{x+1} & si \quad x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & si \quad x \le 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de k para que la función f sea continua en $x = 0$. Para ese valor de k, ¿es f derivable en $x = 0$?

b) Para $k = 0$, calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-k}{x+1} & si \ x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & si \ x \le 0 \end{cases}$

2) Si $k = -1 \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 2x + 2 & x \le 0 \end{cases}$

1) Para que f sea continua en $x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-k}{x+1} = -k \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 + 2x + 1 = 1 \end{array}\right\}$ $\quad k = -1$

2) Si $k = -1$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+1} = 1 & x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & x \le 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'_-(0) = 2 \\ f'_+(0) = 0 \end{array}\right\}$ No es derivable en $x = 0$

3) Si $k = 0$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & x \le 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2x + 1 = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+1} = \left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

Ejercicio 12: Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & si \quad 0<x\leq 1 \\ a\left(1-e^{1-x}\right) & si \quad 1<x \end{cases}$$

12

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & 0<x\leq 1 \\ a(1-e^{1-x}) & x>1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} x\ln x = 1\cdot 0 = 0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} a\cdot(1-e^{1-x}) = a\cdot(1-1)=0$

$f(1)=0$ Es continua en $x=1$.

$$f'(x)=\begin{cases} \ln x + 1 & 0<x\leq 1 \\ a\cdot e^{1-x} & x>1 \end{cases}$$

$f'_-(1)=\lim_{x\to 1} \ln x+1 = 1$

$f'_+(1)=\lim_{x\to 1} a\cdot e^{1-x} = a\cdot 1$

$a=1$

Ejercicio 13: Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\leq 0 \\ 1-x & si \quad x>0 \end{cases}$, estudia si es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$

13

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & x\leq 0 \\ 1-x & x>0 \end{cases}$$

f es continua en $x=0$

1) $f(0)=1$

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & x\leq 0 \\ -1 & x>0 \end{cases}$$

f es derivable en $x=0$

$f'_-(0)=-e^0=-1$

$f'_+(0)=-1$

Ejercicio 14: Dada la función $f(x)=e^{\sin x}$, halla: $f'(x), f''(x)$ y $f'''(x)$.

$f(x)=e^{\operatorname{sen}x}$

$f'(x)=e^{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x$

$f''(x)=e^{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x\cdot\cos x + e^{\operatorname{sen}x}\cdot(-\operatorname{sen}x)=$

$=e^{\operatorname{sen}x}\cdot(\cos^2x-\operatorname{sen}x)$

$f'''(x)=e^{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x\cdot(\cos^2x-\operatorname{sen}x)+e^{\operatorname{sen}x}\cdot(2\cos x\,(-\operatorname{sen}x)-\cos x)$

$=e^{\operatorname{sen}x}\cdot(\cos^3x-\cos x\cdot\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}x\cdot\cos x-\cos x)$

$f'''(x)=e^{\operatorname{sen}x}\cdot(\cos^3x-3\cos x\cdot\operatorname{sen}x-\cos x)$

Ejercicio 15: Calcula los puntos de las gráficas de las funciones siguientes donde la recta tangente es horizontal:

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x+3)^2}$ b) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$

Nos piden $f'(x)=0$

recta tg horizontal $\Leftrightarrow$ pendiente nula $\Leftrightarrow f'(x)=0$

a) $f(x)=\dfrac{x}{(x+3)^2}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+3)^2-x\cdot 2(x+3)}{(x+3)^4}=\frac{(x+3)\left[(x+3)-2x\right]}{(x+3)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3-x}{(x+3)^3}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow +3-x=0$

$x=3$

b) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; $y=\dfrac{16}{x^3-4x^2}$

$$y'=\frac{-16}{(x^3-4x^2)^2}\cdot(x^3-4x^2)'$$

$$y'=\frac{-16(3x^2-8x)}{x^4(x-4)^2}$$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-8x=0$

$x(3x-8)=0 \rightarrow x=0$, $x=\dfrac{8}{3}$