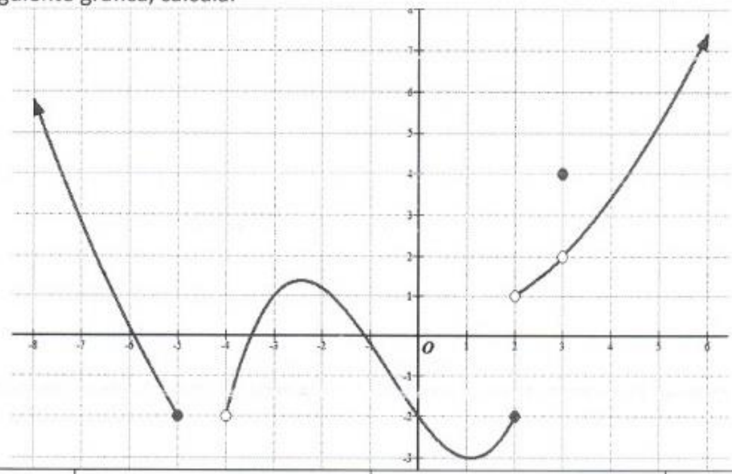
Matemáticas II 1º Bachillerato

HOJA 2 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 1: **FUNCIONES REALES. LÍMITES Y CONTINUIDAD**

Ejercicio 1: Dada la siguiente gráfica, calcula:



a) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)$ $= -2$	b) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)$ $\nexists$	c) $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$ $\nexists$	d) $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$ $\nexists$
e) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ $= -2$	f) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ $\nexists$	g) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ $= -2$	h) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $= -2$
i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ $= -2$	j) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ $= -2$	k) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ $= 1$	l) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\nexists$
m) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ $= 2$	n) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ $= 2$	o) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ $= 2$	p) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ $= +\infty$

Ejercicio2: Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{6+x-x^2}$ $= 0$	b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^3}{5x^3-3x+8}$ $= -\dfrac{2}{5}$
c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-x^3+x-9}{x^3-3}$ $= -\infty$	d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$ $= \dfrac{1}{2}$
e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{x^2+2}-4}$ $= +\infty$	f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$ $= 0$

© *ManoloMat.com*

Matemáticas II 1º Bachillerato

g) $\displaystyle lim_{x\to 1} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1} =$ $= -2$	h) $\displaystyle \lim_{x\to -3} \frac{(x+1)^3}{x+3}$ $= \infty$
i) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^3-6}{x^2}$ $= -\infty$	j) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ $= \frac{3}{4}$
k) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}$ $= -\frac{1}{4}$	l) $\displaystyle \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1}$ $= -\infty$
m) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$ $= 8$	n) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$ $= 0$
o) $\displaystyle lím_{x\to +\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2+3x}}$ $= -\infty$	p) $\displaystyle lim_{x\to 1} \frac{x-\|x\|}{2x}$ $= 0$

Ejercicio 3: Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x}-x}{x}$ Sólo x puede hacer 0^+ pues 0^- no tiene sentido por la $\sqrt{\ }$. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x}-x}{x} = +\infty$	b) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^3}{x+2}-2x\right)$ $= +\infty$
c) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{2-x}$ $= -12$	d) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^2-1}{5x^2+x}\right)^{x^2-6x}$ $= \left(\frac{3}{5}\right)^{+\infty} = +\infty$

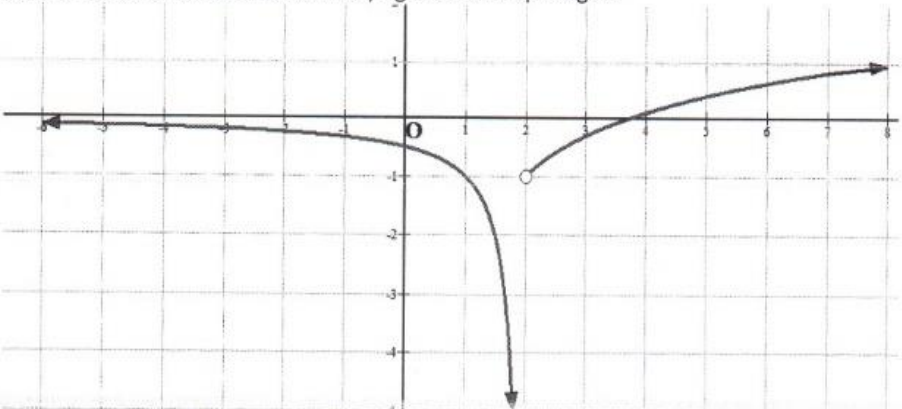
2

© ManoloMat.com

Matemáticas II 1º Bachillerato

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}\right)$ $= 1$	f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+1}{x^3-6}$

Ejercicio 4: Estudia la continuidad de la función cuya gráfica es la que sigue:



Si $x < 2$, f es continua

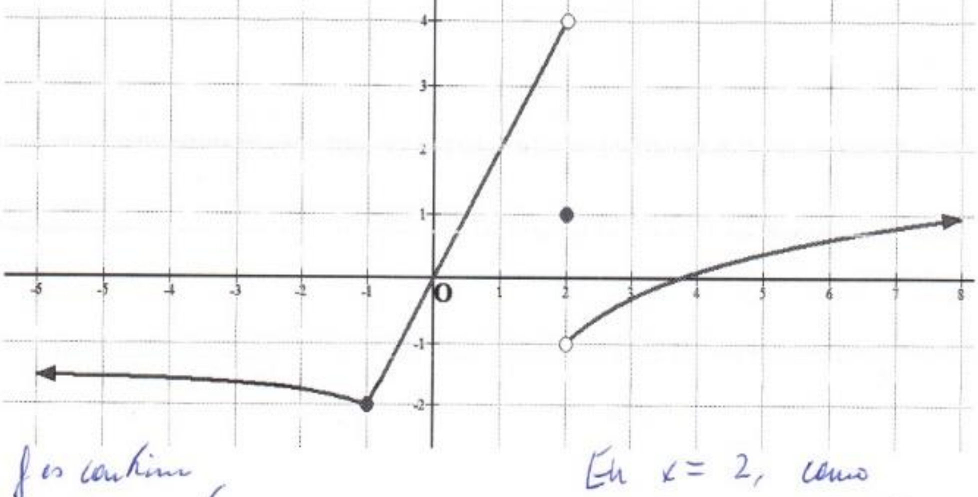
Si $x > 2$, f es continua

En $\underline{x = 2}$ como:

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$

se trata de una discontinuidad de salto infinito.

Ejercicio 5: Estudia la continuidad de la función cuya gráfica es la que sigue:



Si $x < -1$, f es continua

Si $-1 < x < 2$, f es continua

Si $x > 2$, f es continua

En $x = -1$, como

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = -2 \Rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f(x) = -2$ f es continua

En $x = 2$, como

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$

$\Rightarrow f$ es discontinua en $x = 2$ de salto finito y amplitud 5.

3

© ManoloMat.com

Matemáticas II 1º Bachillerato

Ejercicio 6: **Ejercicio 8**: Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+3 & si\ \ x<2\\ x+1 & si\ \ 2\le x<4\\ 5 & si\ \ x\ge 4\end{cases}$. Estudia la continuidad y represéntala gráficamente.

- Si $x<2$, f es continua por ser polinómica
- Si $2<x<4$, f es continua " "
- Si $x>4$, f es continua por ser cte
- En $x_0=2$, como

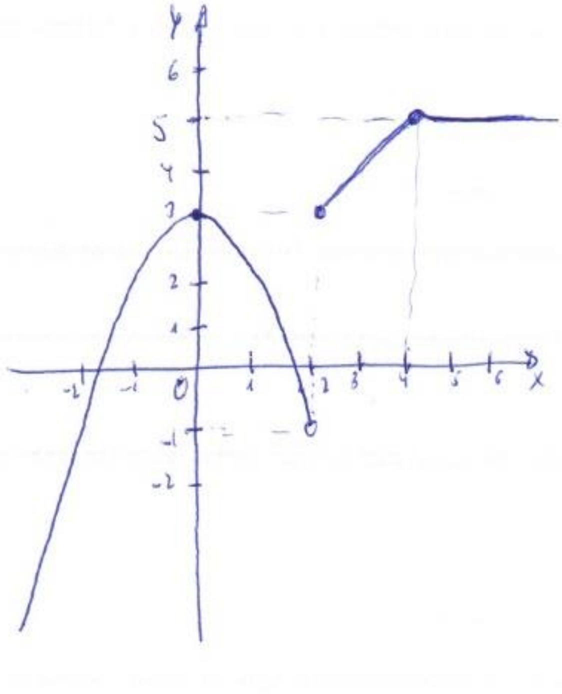
$\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+3)=-1\neq \lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3$

f es discontinua en $x_0=2$ de salto finito y amplitud 4.

- En $x_0=4$ como

$\lim\limits_{x\to 4^-}(x+1)=5=\lim\limits_{x\to 4^+}5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} f(x)=5$

$\exists f(4)=5 \Longrightarrow f$ es continua en $x_0=4$



Ejercicio 7: Estudia la continuidad de la función indicando, en su caso, los tipos de discontinuidad que presenta:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & -2\le x<1\\ 3 & x=1\\ x-1 & 1<x\le 5\\ 2^{x-4} & x>5\end{cases}$$

- Si $-2<x<1$, f es continua por ser polinómica de grado 2
- Si $1<x<5$, f es continua " " " " 1
- Si $x>5$, f " " por ser exponencial.

- En $\underline{x_0=1}$,

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x^2)=0=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

b) $\exists f(1)=3\neq \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$, f es discontinua en $x_0=1$ de tipo evitable

- En $\underline{x_0=-2}$, f es continua sólo por la derecha.
- En $\underline{x_0=5}$ a) $\lim\limits_{x\to 5^-}(x-1)=4\neq \lim\limits_{x\to 5^+}2^{x-4}=2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 5} f(x)$

f es discontinua en $x_0=5$ de salto finito

[illegible]

4
© ManoloMat.com

Matemáticas II 1º Bachillerato

Ejercicio 8: Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<5 \\ 4x+k & si \quad x\geq 5 \end{cases}$$

Si $x<5$, f cont. por ser polinómica
Si $x>5$, f " " " "
En $\underline{\underline{x_0=5}}$, veamos que ocurre
a) $\lim_{x\to 5^-} x^2-1 = 24 = 20+k=24$
$\lim_{x\to 5^+} (4x+k) = 20+k$ $\boxed{k=4}$

Y además como
$f(5)= 20+k = 24 = \lim_{x\to 5} f(x)$
si $k=4$
Luego si $k=4$, f es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 9: Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ 4x^2+ax+b & \text{si} \quad 1\leq x<2 \\ 3x+b & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Análogo al anterior, sólo se plantea problemas de continuidad en $x_0=1$ y $x_0=2$.
En $\underline{x_0=1}$.
a) $\lim_{x\to 1^-} (ax^2-2x) = a-2$
$\lim_{x\to 1^+} 4x^2+ax+b = 4+a+b$

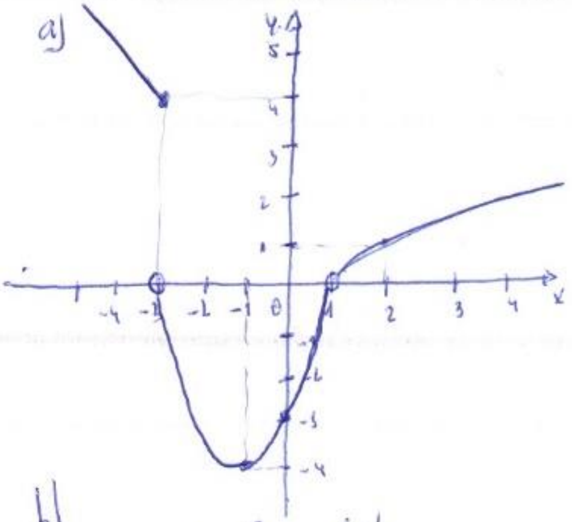
$\Rightarrow$ Para que sea continua, como
$f(1)=4+a+b$,
$\boxed{4+a+b=a-2} \Rightarrow \boxed{b=-6}$

En $\underline{\underline{x_0=2}}$.
a) $\lim_{x\to 2^-} (4x^2+ax-6) = 16+2a-6=10-2a$
$\lim_{x\to 2^+} (3x-6) = 0$ $\Rightarrow 10-2a=0$
$\boxed{a=5}$

Ejercicio 10: Dada la función: $f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x\leq -3 \\ x^2+2x-3 & si \quad -3<x<1 \\ \log_2 x & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente
b) Señala su dominio y su recorrido o imagen.
c) Estudia su continuidad en $x=-3$ y en $x=1$

a)



b)
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
$\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

c) En $\underline{\underline{x_0=-3}}$
a) $\lim_{x\to -3^-} (1-x) = 4 \neq \lim_{x\to -3^+} (x^2+2x-3) = 0$
Discontinuidad de salto finito y amplitud 4.

En $\underline{\underline{x_0=1}}$
a) $\lim_{x\to 1^-} (x^2+2x-3) = 0 = \lim_{x\to 1^+} \log_2 x = 1$
b) $\nexists f(1)$
luego f no es continua en $x_0=1$ y presenta una discontinuidad evitable.