

UNIDAD 1: EJERCICIOS RESUELTOS NÚMEROS REALES**Ejercicio 1:** Calcula:

a) $(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

b) $(2^{-3})^{-3} = 2^{-3 \cdot (-3)} = 2^9$

c) $\left[(3^{-3})^{-2} \right]^{-2} = 3^{-3 \cdot (-2) \cdot (-2)} = 3^{6 \cdot (-2)} = 3^{-12}$

d) $(3^4)^0 = 3^{4 \cdot 0} = 3^0 = 1$

e) $\left\{ \left[(3^3)^{-1} \right]^{-2} \right\}^{-2} = 3^{3 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1)} = 3^{3 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1)} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$

Nota teórica:

En una potencia de potencias, los exponentes se multiplican.

Ejercicio 2: Calcula:

a) $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$

b) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^6 = 3^{1+2+6} = 3^9$

c) $2^4 \cdot 2^{-2} = 2^{4+(-2)} = 2^{4-2} = 2^2$

d) $2^{-4} \cdot 2^{-2} = 2^{-4+(-2)} = 2^{-4-2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6}$

e) $2^{-1} \cdot 2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{-1+3+(-2)} = 2^{-1+3-2} = 2^0 = 1$

f) $27^5 \cdot 81^7 = (3^3)^5 \cdot (3^4)^7 = 3^{3 \cdot 5} \cdot 3^{4 \cdot 7} = 3^{15} \cdot 3^{28} = 3^{15+28} = 3^{43}$

g) $25^3 \cdot 5^4 \cdot 125^2 = (5^2)^3 \cdot 5^4 \cdot (5^3)^2 = 5^{2 \cdot 3} \cdot 5^4 \cdot 5^{3 \cdot 2} = 5^6 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{6+4+6} = 5^{14}$

Nota teórica:

En la multiplicación de potencias con la misma base, los exponentes se suman.

Ejercicio 3: Calcula:

a) $5^3 : 5^2 = 5^{3-2} = 5^1 = 5$

b) $11^3 : 11^{-3} = 11^{3-(-3)} = 11^{3+3} = 11^6$

Nota teórica:

En la división de potencias con la misma base, los exponentes se restan.

$$e) \frac{2^2 : 2^{-3}}{2^{-3}} = \frac{2^{2-(-3)}}{2^{-3}} = \frac{2^{2+3}}{2^{-3}} = \frac{2^5}{2^{-3}} = 2^{5-(-3)} = 2^{5+3} = 2^8$$

$$f) (3^5 : 3^{-2}) : 3^{-4} = 3^{5-(-2)} : 3^{-4} = 3^{5+2} : 3^{-4} = 3^7 : 3^{-4} = 3^{7-(-4)} = 3^{7+4} = 3^{11}$$

$$g) (8^5 : 4^{-2}) : 2^{-4} = \left[(2^3)^5 : (2^2)^{-2} \right] : 2^{-4} = (2^{15} : 2^{-4}) : 2^{-4} = 2^{15-(-4)} : 2^{-4} = 2^{19} : 2^{-4} = 2^{19-(-4)} = 2^{19+4} = 2^{23}$$

Ejercicio 4: Calcula:

$$a) \frac{(5^2)^3}{(5^3)^7} = \frac{5^{2 \cdot 3}}{5^{3 \cdot 7}} = \frac{5^6}{5^{21}} = 5^{6-21} = 5^{-15} = \frac{1}{5^{15}}$$

$$b) (3^2)^3 : (3^3)^3 = 3^{2 \cdot 3} : 3^{3 \cdot 3} = 3^6 : 3^9 = 3^{6-9} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$c) \frac{(3^2)^5 \cdot 3^3}{(3^3)^2} = \frac{3^{2 \cdot 5} \cdot 3^3}{3^{3 \cdot 2}} = \frac{3^{10} \cdot 3^3}{3^6} = \frac{3^{10+3}}{3^6} = \frac{3^{13}}{3^6} = 3^{13-6} = 3^7$$

$$d) \frac{(5^{-2} \cdot 5^{-3})^{-1} : 5^2}{5^3 : ((5^2)^2)^{-1}} = \frac{(5^{-2+(-3)})^{-1} : 5^2}{5^3 : 5^{2 \cdot 2 \cdot (-1)}} = \frac{(5^{-2-3})^{-1} : 5^2}{5^3 : 5^{-4}} = \frac{5^{(-5)(-1)} : 5^2}{5^{3-(-4)}} =$$

$$= \frac{5^5 : 5^2}{5^{3+4}} = \frac{5^{5-2}}{5^7} = \frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

Ejercicio 5:

Calcula las siguientes potencias.

$$a) 3^4 \qquad e) \left(\frac{-3}{5} \right)^3$$

$$b) \left(\frac{5}{-2} \right)^5 \qquad f) (-5)^7$$

$$c) (-2)^6 \qquad g) \left(-\frac{4}{9} \right)^3$$

$$d) \left(\frac{5}{7} \right)^2 \qquad h) 2^5$$

a) $3^4 = 81$

e) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

b) $\left(\frac{5}{-2}\right)^5 = -\frac{3.125}{32}$

f) $(-5)^7 = -78.125$

c) $(-2)^6 = 64$

g) $\left(-\frac{4}{9}\right)^3 = -\frac{64}{729}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$

h) $2^5 = 32$

Ejercicio 6:

Sumar los siguientes radicales, reduciéndolos previamente a radicales semejantes (véase el 1º ejemplo):

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = \sqrt{2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} - \sqrt{2^5} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2^2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80} =$ (Soluc: $6\sqrt{5}$)

c) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486} =$ (Soluc: $6\sqrt{6}$)

d) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16} =$ (Soluc: $-\sqrt[3]{2}$)

e) $27\sqrt{3} - 5\sqrt{27} - 9\sqrt{12} =$ (Soluc: $-6\sqrt{3}$)

f) $\sqrt{75} - \sqrt{20} - \sqrt{12} + \sqrt{45} =$ (Soluc: $3\sqrt{3} + \sqrt{5}$)

Ejercicio 7:

Calcular, dando el resultado lo más simplificado posible (véanse los ejemplos):

a) $2\sqrt{2}^2 =$ (Soluc: 8)

b) $(3\sqrt{5})^2 =$ (Soluc: 45)

Ejercicio 8:

Extrae los factores que puedas de la raíz.

a) $\sqrt{8}$

c) $\sqrt{50}$

e) $\sqrt{12}$

g) $\sqrt[3]{1.000}$

b) $\sqrt{18}$

d) $\sqrt{98}$

f) $\sqrt{75}$

h) $\sqrt[3]{40}$

a) $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

e) $\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

f) $\sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = 5\sqrt{3}$

c) $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$

g) $\sqrt[3]{1.000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 5 = 10$

d) $\sqrt{98} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$

h) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

Ejercicio 9:

Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales. Comprobar el resultado haciendo la división a mano (sin calculadora):

1) 0,25 (Soluc: 1/4)

2) $0,\hat{6}$ (Soluc: 2/3)

3) $0,2\hat{3}$ (Soluc: 7/30)

4) 0,12 (Soluc: 3/25)

5) $0,1\hat{2}$ (Soluc: 11/90)

6) $0,12\overline{35}$ (Soluc: 1223/9900)

7) 1,125 (Soluc: 9/8)

8) $0,\overline{126}$ (Soluc: 14/111)

Ejercicio 10:

Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 0,0000085

c) 31.940.000.000

b) 5.000.000.000.000

d) 0,000000000479

a) $0,0000085 = 8,5 \cdot 10^{-6}$

c) $31.940.000.000 = 3,194 \cdot 10^{10}$

b) $5.000.000.000.000 = 5 \cdot 10^{12}$

d) $0,000000000479 = 4,79 \cdot 10^{-10}$

Ejercicio 11:

Desarrolla estos números escritos en notación científica.

a) $4,8 \cdot 10^8$

b) $8,32 \cdot 10^{-11}$

c) $6,23 \cdot 10^{-18}$

d) $3,5 \cdot 10^{-12}$

- a) $4,8 \cdot 10^8 = 480.000.000$ c) $6,23 \cdot 10^{-18} = 0,000000000000000000623$
 b) $8,32 \cdot 10^{-11} = 0,00000000000832$ d) $3,5 \cdot 10^{-12} = 0,0000000000035$

Ejercicio 12:

Opera y expresa el resultado en notación científica.

- a) $(5,2 \cdot 10^3 + 4,75 \cdot 10^{-2}) : 8,05 \cdot 10^{-4}$
 b) $3,79 \cdot 10^8 \cdot (7,73 \cdot 10^4 - 6,54 \cdot 10^{-2})$
 a) $(5,2 \cdot 10^3 + 4,75 \cdot 10^{-2}) : 8,05 \cdot 10^{-4} = 6,465968 \cdot 10^{-2}$
 b) $3,79 \cdot 10^8 \cdot (7,73 \cdot 10^4 - 6,54 \cdot 10^{-2}) = 2,92966 \cdot 10^{13}$

Ejercicio 13:

Realiza las operaciones.

- a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4$
 b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3$
 c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3}$
 d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2}$
 e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2$
 a) $1,32 \cdot 10^4 + 2,57 \cdot 10^4 = 3,89 \cdot 10^4$
 b) $8,75 \cdot 10^2 + 9,46 \cdot 10^3 = 1,0335 \cdot 10^4$
 c) $3,62 \cdot 10^4 + 5,85 \cdot 10^{-3} = 3,620000585 \cdot 10^4$
 d) $2,3 \cdot 10^2 + 3,5 \cdot 10^{-1} + 4,75 \cdot 10^{-2} = 2,303975 \cdot 10^2$
 e) $3,46 \cdot 10^{-2} + 5,9 \cdot 10^4 + 3,83 \cdot 10^2 = 5,93830346 \cdot 10^4$

Ejercicio 14:

Halla el resultado de estas operaciones.

- a) $9,5 \cdot 10^4 - 3,72 \cdot 10^4$
 b) $8,6 \cdot 10^3 - 5,45 \cdot 10^2$
 c) $7,9 \cdot 10^{-4} - 1,3 \cdot 10^{-6}$
 d) $4,6 \cdot 10^6 + 5,3 \cdot 10^4 - 3,9 \cdot 10^2$
 e) $5 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$

- c) Aproximación por exceso: 1,732051
Aproximación por defecto: 1,732052

Ejercicio 18:

Calcula los errores absoluto y relativo al redondear el número 1,3456 a las décimas.

$$V_{\text{real}} = 1,3456$$

$$V_{\text{aproximado}} = 1,3$$

$$E_a = |1,3456 - 1,3| = 0,0456 \quad E_r = \left| \frac{0,0456}{1,3456} \right| = 0,0338$$

Ejercicio 19: Calcular el error absoluto y relativo en los dos casos siguientes:

- a) Al tomar 3,5 m como longitud de un terreno que mide realmente 3,59 m.
b) Al considerar 60 m como la distancia entre dos postes que están situados a 59,91 m.

Solución:

$$\text{a) } E_a = |3,59 - 3,5| = 0,09 \text{ m}$$

$$E_r = |3,59 - 3,5| : 3,59 = 0,025 = 2,5 \% \quad \text{b) } E_a = |59,91 - 60| = 0,09 \text{ m}$$

$$E_r = |59,91 - 60| : 59,91 = 0,0015 = 0,15 \%$$

Observamos que el error absoluto es el mismo en ambos casos, pero el error relativo es considerablemente mayor en el primer caso y, por tanto, la aproximación es menos precisa.

Ejercicio 20: En la medida de 1 m se ha cometido un error de 1 mm, y en 300 Km, 300 m. ¿Qué error relativo es mayor?

Solución:

En los dos casos nos están dando el error absoluto a la hora de hacer las dos medidas. Antes de realizar ningún cálculo, es necesario expresar las longitudes en la misma unidad. Para ello, vamos a utilizar los metros en el primer caso y los Km en el segundo.

$$\text{a) } E_a = 1\text{mm} = 0,001 \text{ m por lo que el error relativo en el primer caso es: } \bullet \quad E_r = 0,001 / 1 = 0,001, \text{ es decir, el } 0,1 \%$$

$$\text{b) } E_a = 300 \text{ m} = 0,3 \text{ Km, por lo que el error relativo en el segundo caso es: } \bullet \quad E_r = 0,3/300 = 0,001, \text{ es decir, el } 0,1\%.$$

Vemos que, en ambos casos, el error relativo es el mismo por lo que las dos mediciones, aunque no son iguales, tienen comparativamente la misma precisión.

Ejercicio 21:

Como medida de un radio de 7 dm hemos obtenido 70.7 cm. Calcula el error absoluto y el relativo.

Solución:

Antes de operar, tenemos que expresar el valor del radio en cm, para poder realizar las operaciones: 7dm=70cm. De aquí tenemos:

- a) $E_a = |70 - 70,7| = 0,7$ cm.
- b) $E_r = 0,7/70 = 0,0$

Ejercicio 22: Al medir la distancia entre dos pueblos, sabemos que el valor real es de 5,478 Km.

- a) Aproxima la distancia hasta las décimas tanto por redondeo y por truncamiento.
- b) Calcula el error absoluto cometido en ambos casos.
- c) Calcula el error relativo cometido en ambos casos.
- d) Justifica, de acuerdo con los resultados anteriores, qué aproximación es mejor.

Solución:

- a) La distancia, aproximada por redondeo hasta las décimas, es de 5,5Km y, aproximada por truncamiento, es de 5,4Km.
- b) El error absoluto en el primer caso viene dado por: $E_a = |5,478 - 5,5| = 0,022$ Km y, en el segundo caso: $E_a = |5,478 - 5,4| = 0,078$ cm.
- c) El error relativo en el primer caso es de $E_r = 0,022/5,478 = 0,00402$ y, en el segundo caso de $E_r = 0,014$.
- d) La mejor aproximación es la que hacemos por redondeo, ya que el error absoluto es más pequeño. De ahí también que el error relativo también sea más pequeño.

Ejercicio 23:

Imagina que queremos calcular la longitud de una circunferencia de 3 cm de radio.

- a) Razona a qué conjunto de números pertenece la longitud de la circunferencia.
- b) Calcula la longitud en cm con una aproximación hasta las diezmilésimas.
- c) Calcula la longitud en dm con una aproximación hasta las diezmilésimas.

Solución:

- a) La longitud de una circunferencia se calcula con la fórmula $L = 2 \cdot \pi \cdot r$. Puesto que π es un número irracional, es decir, su expresión decimal tiene infinitos decimales que no siguen ningún patrón periódico; al multiplicar este número por 2 y por r (=3 cm), el número que obtengamos tendrá también infinitos decimales no periódico con lo que será, por tanto, también un número irracional.
- b) $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 3 =$ (usando la calculadora) $= 18,84955592\dots$ y si aproximamos hasta las diezmilésimas nos quedamos con 18,8496
- c) Pasamos el radio a dm, $r = 0,3$ dm, y tenemos que $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot (0,3) =$ usando la calculadora) $= 1,884955592\dots$ y si aproximamos hasta la diezmilésimas nos da 1,8850 dm

Ejercicio 24:

Escribe en todas las formas posibles los siguientes intervalos y semirrectas:

- a) $\{ x / -2 \leq x < 3 \}$
- b) Números mayores que -1
- c) $(-\infty, -5]$
- d) Números mayores o iguales que -7 y menores que 19 .
- e) Números mayores que 9 y menores que 5 .

Ejercicio 25: Completa la siguiente tabla:

	REPRES. GRÁFICA	INTERVALO	DEF. MATEMÁTICA
1		$[-1,3]$	$\{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 3\}$
2			
3			
4		$[-2,1)$	
5			$\{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 5\}$
6			
7			$\{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$
8		$(0,\infty)$	
9			
10		$(-1,5)$	
11			$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$
12		$[2/3,\infty)$	
13			$\{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 2\}$
14			$\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$
15			$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$
16			

Ejercicio 26:

Representa los siguientes conjuntos numéricos de todas las formas que conozcas.

- Números menores que π .
- Números mayores que $\sqrt{3}$ y menores o iguales que 7.
- Números menores o iguales que 2 y mayores que -2 .
- Números comprendidos entre los dos primeros números pares, ambos incluidos.

a) $(-\infty, \pi) = \{x: x < \pi\}$



b) $(\sqrt{3}, 7] = \{x: \sqrt{3} < x \leq 7\}$



c) $(-2, 2] = \{x: -2 < x \leq 2\}$



d) $[2, 4] = \{x: 2 \leq x \leq 4\}$



Ejercicio 27:

Escribe, de todas las maneras que conozcas, estos intervalos de la recta real.



a) $(-\infty, -3) = \{x: x < -3\}$

c) $(3, +\infty) = \{x: x > 3\}$

b) $[-3, 2) = \{x: -3 \leq x < 2\}$

d) $(-1, 1) = \{x: |x| < 1\}$

Ejercicio 28:

Escribe el intervalo que corresponde a estas desigualdades.

a) $1 < x < 3$

b) $6 < x \leq 7$

c) $5 \leq x < 9$

d) $10 \leq x \leq 12$

a) $(1, 3)$

b) $(6, 7]$

c) $[5, 9)$

d) $[10, 12]$

Ejercicio 29:

Describe y representa los siguientes intervalos.

a) $(0, 10)$

e) $[5, 10)$

b) $(3, 7]$

f) $[-4, +\infty)$

c) $(-\infty, -2)$

g) $(-\infty, 6]$

d) $[2, 5]$

h) $(100, +\infty)$

a) $\{x: 0 < x < 10\}$



b) $\{x: 3 < x \leq 7\}$



c) $\{x: x < -2\}$



d) $\{x: 2 \leq x \leq 5\}$



e) $\{x: 5 \leq x < 10\}$



f) $\{x: -4 \leq x\}$



g) $\{x: x \leq 6\}$



h) $\{x: 100 < x\}$



Ejercicio 30:

Escribe el intervalo que corresponde a:

a) $x \leq -2$

c) $x > -3$

e) $x < -9$

b) $x < 5$

d) $x \geq 7$

f) $x \geq -6$

a) $(-\infty, -2]$

c) $(-3, +\infty)$

e) $(-\infty, -9)$

b) $(-\infty, 5)$

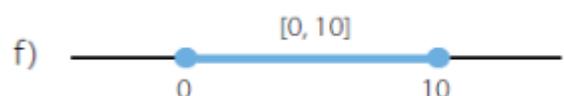
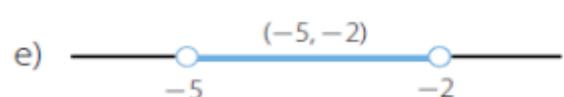
d) $[7, +\infty)$

f) $[-6, +\infty)$

Ejercicio 31:

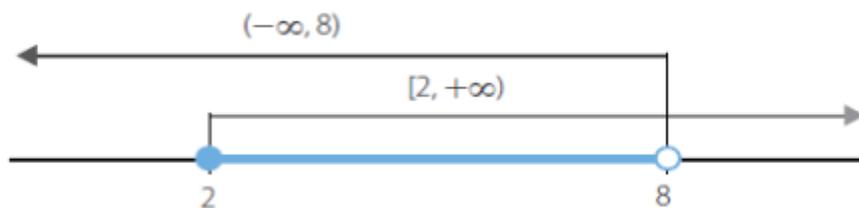
Representa, mediante intervalos, los números:

- a) Mayores o iguales que 5.
- b) Menores o iguales que -8 .
- c) Mayores que -2 .
- d) Mayores que 2 y menores que 4.
- e) Mayores que -5 y menores que -2 .
- f) Comprendidos entre 0 y 10, incluidos estos.



Ejercicio 32:

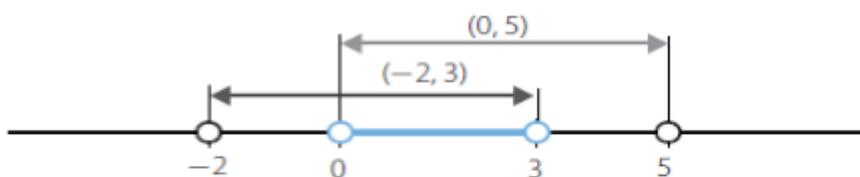
Representa $(-\infty, 8)$ y $[2, +\infty)$ en la misma recta, y señala mediante un intervalo los puntos que están en ambos.



El intervalo es $[2, 8)$.

Ejercicio 33:

Representa los intervalos $(0, 5)$ y $(-2, 3)$ en la misma recta, y señala el intervalo intersección.



El intervalo es $(0, 3)$.