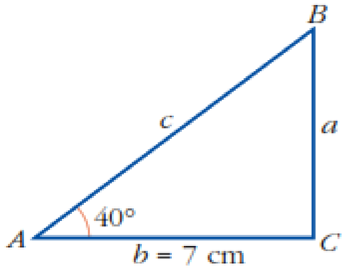
EJERCICIOS RESUELTOS TRIGONOMETRÍA II

Contenido

1. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Cuestión 1:

Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?



$$tg\ 40° = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7\ tg\ 40° = 5{,}87 \text{ m}$$

Cuestión 2:

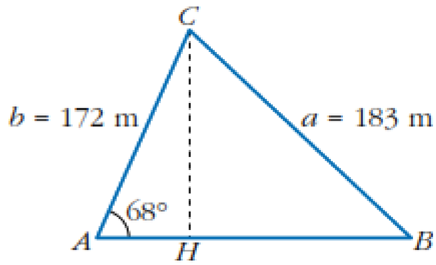
En un triángulo ABC conocemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado c.

$\overline{AH} = 172 \cos 68° = 64{,}43$ m

$\overline{CH} = 172 \text{ sen } 68° = 159{,}48$ m

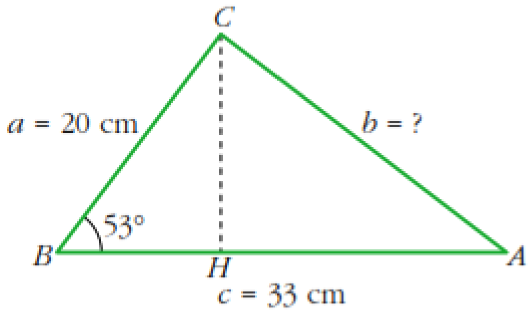
$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89{,}75$ m

$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64{,}43 \text{ m} + 89{,}75 \text{ m} = 154{,}18$ m



Cuestión 3:

En un triángulo ABC conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53°$. Calcula la longitud del lado b.



$\overline{BH} = a \cos 53° = 12{,}04$ cm

$\overline{CH} = a \text{ sen } 53° = 15{,}97$ cm

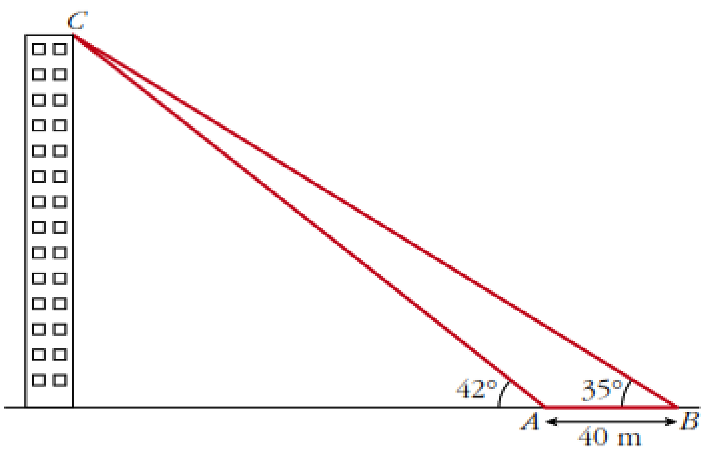
$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20{,}96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26{,}35$ cm

Cuestión 4:

Estamos en A, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

Observa la ilustración:



$$tg\ 42^\circ = \frac{h}{d} \rightarrow h = d\ tg\ 42^\circ$$
$$tg\ 35^\circ = \frac{h}{d+40} \rightarrow h = (d+40)tg\ 35^\circ$$
$$\rightarrow d\ tg\ 42^\circ = (d+40)\ tg\ 35^\circ \rightarrow d = \frac{40\ tg\ 35^\circ}{tg\ 42^\circ - tg\ 35^\circ} = 139{,}90 \text{ m}$$

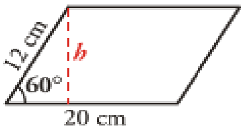
$$h = d\ tg\ 42^\circ = 125{,}97 \text{ m}$$

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

Cuestión 5:

Los lados de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y forman un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la altura del paralelogramo? ¿Y su área?

Solución:



Para hallar la altura hacemos:

$$sen60^\circ = \frac{h}{12} \rightarrow h = 12sen60^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

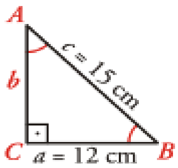
El área será $A = 20 \cdot 6\sqrt{3} = 120\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Cuestión 6:

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Solución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$12^2 + b^2 = 15^2 \rightarrow 144 + b^2 = 225$$
$$b^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos:

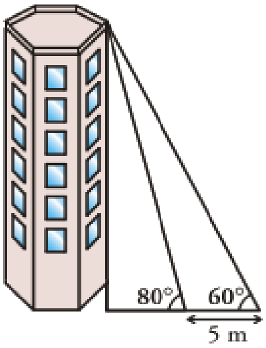
$$sen\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow sen\hat{B} = \frac{9}{15} = 0{,}6 \rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52'12''$$
$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ 7'48''$$
$$\hat{C} = 90^\circ$$

Por tanto:

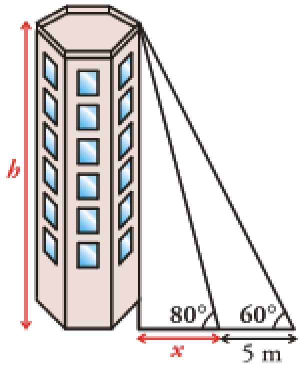
$$a = 12 \text{ cm};\ \hat{A} = 53^\circ 7'48''$$
$$b = 9 \text{ cm};\ \hat{B} = 36^\circ 52'12''$$
$$c = 15 \text{ cm};\ \hat{C} = 90^\circ$$

Cuestión 7:

Para medir la altura de una torre nos situamos en un punto del suelo y vemos el punto más alto de la torre bajo un ángulo de 60°. Nos acercamos 5 metros a la torre en línea recta y el ángulo es de 80°. Halla la altura de la torre.



Solución:



$$\left.\begin{array}{l} tg\,80^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\,60^\circ = \dfrac{h}{x+5} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} h = x\,tg\,80^\circ \\ h = (x+5)\,tg\,60^\circ \end{array}\right\}$$

$$x\,tg\,80^\circ = (x+5)\,tg\,60^\circ$$
$$x\,tg\,80^\circ = x\,tg\,60^\circ + 5\,tg\,60^\circ$$
$$x\,tg\,80^\circ - x\,tg\,60^\circ = 5\,tg\,60^\circ$$
$$x\left(tg\,80^\circ - tg\,60^\circ\right) = 5\,tg\,60^\circ$$

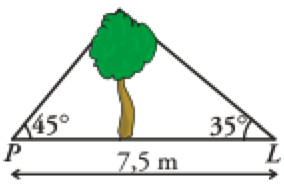
$$x = \frac{5\,tg\,60^\circ}{tg\,80^\circ - tg\,60^\circ} = 2{,}20 \text{ m}$$

$$h = \frac{5\,tg\,60^\circ\,tg\,80^\circ}{tg\,80^\circ - tg\,60^\circ} = 12{,}47 \text{ m}$$

La torre tiene una altura de 12,47 metros.

Cuestión 8:

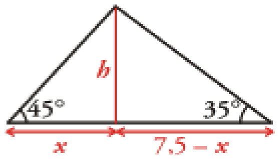
Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



a) Calcula la altura del árbol.

b) ¿A qué distancia está Pablo del árbol?

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} tg\,45^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\,35^\circ = \dfrac{h}{7{,}5-x} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 1 = \dfrac{h}{x} \;\rightarrow\; x = h \\ tg\,35^\circ = \dfrac{h}{7{,}5-x} \end{array}$$

$$tg\,35^\circ = \frac{h}{7{,}5-h}$$

$$(7{,}5-h)tg\,35^\circ = h \;\rightarrow\; 7{,}5tg\,35^\circ - h\,tg\,35^\circ = h$$

$$7{,}5tg\,35^\circ = h + h\,tg\,35^\circ \;\rightarrow\; 7{,}5tg\,35^\circ = h\left(1+tg\,35^\circ\right)$$

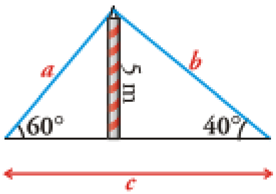
$$h = \frac{7{,}5tg\,35^\circ}{1+tg\,35^\circ} = 3{,}09 \text{ m } = x$$

a) El árbol mide 3,09 metros.

b) Pablo está a 3,09 metros del árbol.

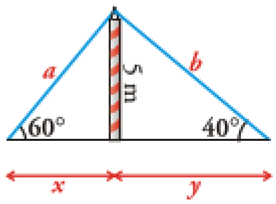
<u>**Cuestión 9**</u>:

Un mástil de 5 metros se ha sujetado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de *c* y la longitud del cable.

Solución:



$$sen60^\circ = \frac{5}{a} \;\rightarrow\; a = \frac{5}{sen60^\circ} = 5{,}77 \text{ m}$$

$$tg\,60^\circ = \frac{5}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{5}{tg\,60^\circ} = 2{,}89 \text{ m}$$

Por otra parte, si consideramos el otro triángulo:

$$sen40^\circ = \frac{5}{b} \;\rightarrow\; b = \frac{5}{sen40^\circ} = 7{,}78 \text{ m}$$

$$tg\,40^\circ = \frac{5}{y} \;\rightarrow\; y = \frac{5}{tg\,40^\circ} = 5{,}96 \text{ m}$$

Por tanto:

La longitud del cable es $a + b = 5{,}77 + 7{,}78 = 13{,}55$ metros.
El valor de c es $x + y = 2{,}89 + 5{,}96 = 8{,}85$ metros.

2. EJERCICIOS DE SUMA, DIFERENCIA DE ÁNGULOS, ÁNGULO DOBLE Y MITAD

Cuestión 10:

Sabiendo que $cos\ 78° = 0,2$, calcula $sen\ 78°$ y $tg\ 78°$. Averigua las razones trigonométricas de 39° aplicando las fórmulas del ángulo mitad.

- $cos\ 78° = 0,2$

$$sen\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$tg\ 78° = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

- $sen\ 39° = sen\ \dfrac{78°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$

$$cos\ 39° = cos\ \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$tg\ 39° = tg\ \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

Cuestión 11:

. Halla las razones trigonométricas de 45° a partir de $cos\ 90° = 0$.

- $cos\ 90° = 0$
- $sen\ 45° = sen\ \dfrac{90°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$cos\ 45° = cos\ \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 45° = tg\ \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$$

Cuestión 12:

Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75° sabiendo que $75° = 30° + 45°$.

$$sen\ 75° = sen\ (30° + 45°) = sen\ 30°\ cos\ 45° + cos\ 30°\ sen\ 45° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$cos\ 75° = cos\ (30° + 45°) = cos\ 30°\ cos\ 45° - sen\ 30°\ sen\ 45° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$tg\ 75° = tg\ (30° + 45°) = \frac{tg\ 30° + tg\ 45°}{1 - tg\ 30°\ tg\ 45°} = \frac{\sqrt{3}/3 + 1}{1 - \sqrt{3}/3} = \frac{(\sqrt{3} + 3)/3}{(\sqrt{3} - 3)/3} =$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{9 + 3 + 6\sqrt{3}}{6} =$$

$$= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

NOTA: También podemos resolverlo como sigue:

$$tg\ 75° = \frac{sen\ 75°}{cos\ 75°} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{6-2} = \frac{2+6+2\sqrt{12}}{4} =$$

$$= \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

Cuestión 13:

Sabiendo que $sen\ x = \frac{3}{5}$ y que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcula, sin hallar previamente el valor de x:

a) $sen\ 2x$ **b)** $tg\ \frac{x}{2}$ **c)** $sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

d) $cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ **e)** $cos\ \frac{x}{2}$ **f)** $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Tienes que calcular $cos\ x = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ y $tg\ x = -\frac{3}{4}$, y aplicar las fórmulas.

$cos\ x = -\sqrt{1-sen^2\ x} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ (Negativo, por ser del 2º cuadrante).

$tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x} = -\frac{3}{4}$

a) $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$

b) $tg\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cos\ x}{1+cos\ x}} = \sqrt{\frac{1-(-4/5)}{1+(-4/5)}} = \sqrt{\frac{9/5}{1/5}} = 3$

Signo positivo, pues si $x \in 2º$ cuadrante, entonces $\frac{x}{2} \in 1^{er}$ cuadrante.

c) $sen\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = sen\ x\ cos\ \frac{\pi}{6} + cos\ x\ sen\ \frac{\pi}{6} =$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$$

d) $cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = cos\ x\ cos\ \frac{\pi}{3} + sen\ x\ sen\ \frac{\pi}{3} =$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$$

e) $cos\ \frac{x}{2} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{1+cos\ x}{2}} = \sqrt{\frac{1-4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

(*) Signo positivo, porque $\frac{x}{2} \in 1^{er}$ cuadrante.

f) $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\ x + tg\ \pi/4}{1 - tg\ x\ tg\ \pi/4} = \frac{-3/4+1}{1-(-3/4)\cdot 1} = \frac{1-3/4}{1+3/4} = \frac{1}{7}$

Cuestión 14:

Halla las razones trigonométricas del ángulo de 15° de dos formas, considerando:

a) $15° = 45° - 30°$ **b) $15° = \frac{30°}{2}$**

a) $sen\ 15° = sen\ (45° - 30°) = sen\ 45°\ cos\ 30° - cos\ 45°\ sen\ 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}258819$$

$cos\ 15° = cos\ (45° - 30°) = cos\ 45°\ cos\ 30° + sen\ 45°\ sen\ 30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 0{,}965926$$

$$tg\ 15° = \frac{sen\ 15°}{cos\ 15°} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{6 - 2} =$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} = 0{,}267949$$

$$\text{b) } sen\ 15° = sen\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 0{,}258819$$

$$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = 0{,}9659258$$

$$tg\ 15° = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{0{,}258819}{0{,}9659258} = 0{,}2679491$$

Cuestión 15:

Si $tg\ \alpha = -4/3$ y $90° < \alpha < 180°$, calcula:

a) $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **b) $cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right)$** **c) $tg\ (900° + \alpha)$**

$$90° < \alpha < 180° \rightarrow \begin{cases} sen\ \alpha > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Además, $\frac{\alpha}{2} \in 1^{\underline{er}}$ cuadrante

- $tg\ \alpha = -\frac{4}{3}$
- $\frac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$
- $sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

a) $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sen\,\frac{\pi}{2}\,cos\,\alpha - cos\,\frac{\pi}{2}\,sen\,\alpha = 1\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) - 0\cdot\frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

b) $cos\left(180° - \frac{\alpha}{2}\right) = cos\,180°\,cos\,\frac{\alpha}{2} + sen\,180°\,sen\,\frac{\alpha}{2} = -cos\,\frac{\alpha}{2} =$

$$= -\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+(-3/5)}{2}} = -\sqrt{\frac{5-3}{10}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{10}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) $tg\,(900° + \alpha) = tg\,(2\cdot 360° + 180° + \alpha) = tg\,(180° + \alpha) =$

$$= \frac{tg\,180° + tg\,\alpha}{1 - tg\,180°\,tg\,\alpha} = \frac{0+(-4/3)}{1-0\cdot(-4/3)} = -\frac{4}{3}$$

Cuestión 16:

Sabemos que $cos\,x = -\frac{3}{4}$ y $sen\,x < 0$. Sin hallar el valor de x, calcula:

a) $sen\,x$ **b) $cos\,(\pi + x)$** **c) $cos\,2x$**

d) $tg\,\frac{x}{2}$ **e) $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$** **f) $cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$**

$$\left.\begin{array}{l} cos\,x = -3/4 \\ sen\,x < 0 \end{array}\right\} \to x \in 3^{er}\text{ cuadrante} \Rightarrow \frac{x}{2} \in 2^{\circ}\text{ cuadrante}$$

a) $sen\,x = -\sqrt{1-cos^2 x} = -\sqrt{1-\frac{9}{16}} = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $cos\,(\pi + x) = cos\,\pi\,cos\,x - sen\,\pi\,sen\,x = -cos\,x = \frac{3}{4}$

c) $cos\,2x = cos^2 x - sen^2 x = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

d) $tg\,\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-cos\,x}{1+cos\,x}} = -\sqrt{\frac{1+3/4}{1-3/4}} = \sqrt{\frac{7}{1}} = \sqrt{7}$

e) $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\,\frac{\pi}{2}\,cos\,x - cos\,\frac{\pi}{2}\,sen\,x = cos\,x = -\frac{3}{4}$

f) $cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = cos\,\pi\,cos\,\frac{x}{2} + sen\,\pi\,sen\,\frac{x}{2} = -cos\,\frac{x}{2} =$

$$= -\left(-\sqrt{\frac{1+cos\,x}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1-3/4}{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8}$$

Cuestión 17:

Si $tg\,(\alpha + \beta) = 4$ y $tg\,\alpha = -2$, halla $tg\,2\beta$.

$tg\,(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\beta} \to 4 = \frac{-2 + tg\,\beta}{1 + 2\,tg\,\beta} \to$

$\to 4 + 8\,tg\,\beta = -2 + tg\,\beta \to 7\,tg\,\beta = -6 \to tg\,\beta = -\frac{6}{7}$

Luego:

$$tg\,2\beta = \frac{2\,tg\,\beta}{1 - tg^2\,\beta} = \frac{2\cdot(-6/7)}{1-36/49} = \frac{-12/7}{13/49} = \frac{-12\cdot 49}{7\cdot 13} = -\frac{84}{13}$$

Cuestión 18:

Sabiendo que tg $\alpha = \frac{1}{2}$ siendo $0 < \alpha < 90$ y cos $\beta = -\frac{3}{5}$ siendo $90 < \beta < 180$ calcular:

a) $\text{sen } 2\alpha$
b) $\text{tg } 2\beta$
c) $\text{sen } (\alpha+\beta)$
d) $\text{tg } (\beta-\alpha)$
e) $\text{tg } \frac{\alpha}{2}$
f) $\text{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right)$

Solución.

Solución.

El primer paso es calcular las rezones trigonométricas de α y β que no conocemos.

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{ siendo } 0 < \alpha < 90 \Rightarrow \alpha \in 1^{\text{o}} \text{ Cuadrante}: \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} + \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Conocido el valor de la tangente se obtienen la secante y, de esta el coseno

$$\text{tag}^2\alpha + 1 = \sec^2 \alpha : \sec \alpha = \pm\sqrt{\text{tag}^2\alpha + 1} = +\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con la secante se obtiene el coseno

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} : \cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Conocidos los valores del coseno y la tangente se calcula el valor del seno.

$$\text{tag } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} : \text{sen } \alpha = \cos \alpha \cdot \text{tag } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{3}{5} \text{ siendo } 90 < \beta < 180 \Rightarrow \alpha \in 2^{\text{o}} \text{ Cuadrante}: \begin{cases} \text{seno} + \\ \text{coseno} - \\ \text{tangente} + \end{cases}$$

Partiendo del coseno se calcula el seno y, con el seno y el coseno la tangente.

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2 \beta = 1 : \text{sen } \beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = +\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$$

Conocidas las razones trigonométricas de α y β, se resuelven los apartados del ejercicio.

a) $\text{Sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6\sqrt{5}}{25}$

b) $\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}$

c) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{4}{5} =$

$$= \frac{-3\sqrt{5}}{25} + \frac{8\sqrt{5}}{25} = \frac{5\sqrt{5}}{25} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

d) $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{6}} = \frac{\frac{11}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{11}{2}$

e) $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{10}}$

f) $\text{sen}\left(\frac{\beta}{2} - 2\alpha\right) = \text{sen} \frac{\beta}{2} \cdot \cos 2\alpha - \cos \frac{\beta}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha =$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} \cdot \left(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha\right) - \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \cdot \left(\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2\right) - \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{2}} \cdot 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{\frac{8}{10}} \cdot \frac{15}{25} - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \frac{3}{5} - \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5\sqrt{5}} - \frac{4}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

<u>Cuestión 19</u>:

Demostrar la fórmula:

$$\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sol:

Usamos la fórmula del seno de la suma

$$sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = senx \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \cdot sen\frac{\pi}{2} = (senx) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \boldsymbol{\cos} x$$

3. EJERCICIOS DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Cuestión 20:

Demuestra que $\dfrac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{2\,sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\cos\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\,(1 - \cos\alpha)}{2\,sen\,\alpha\,(1 + \cos\alpha)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

Cuestión 21:

Demuestra que $2tg\,\alpha \cdot sen^2\dfrac{\alpha}{2} + sen\,\alpha = tg\,\alpha$.

$$2\,tg\,\alpha \cdot sen^2\frac{\alpha}{2} + sen\,\alpha = 2\,tg\,\alpha \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{2} + sen\,\alpha =$$

$$= \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}(1 - \cos\alpha) + sen\,\alpha = sen\,\alpha\left(\frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} + 1\right) =$$

$$= sen\,\alpha\left(\frac{1 - \cos\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right) = sen\,\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

Cuestión 22:

Demuestra que $\dfrac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = tg^2\dfrac{\alpha}{2}$.

$$\frac{2\,sen\,\alpha - sen\,2\alpha}{2\,sen\,\alpha + sen\,2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha - 2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{2\,sen\,\alpha + 2\,sen\,\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\,sen\,\alpha\,(1 - \cos\alpha)}{2\,sen\,\alpha\,(1 + \cos\alpha)} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

Cuestión 23:

Demuestra que $\dfrac{sen\,(\alpha + \beta)}{sen\,(\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$.

☛ ***Aplica las fórmulas de*** $sen\,(\alpha + \beta)$ ***y*** $sen\,(\alpha - \beta)$. ***Divide tanto el numerador como el denominador entre*** $\cos\alpha\cos\beta$ ***y simplifica.***

$$\frac{sen\,(\alpha + \beta)}{sen\,(\alpha - \beta)} = \frac{sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,sen\,\beta}{sen\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,sen\,\beta} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{\dfrac{sen\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\,sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{sen\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\,sen\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$

(*) Dividimos numerador y denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$.

Cuestión 24:

Prueba que $2\,tg\,x\cos^2\dfrac{x}{2} - sen\,x = tg\,x$.

☛ ***Sustituye*** $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$.

Como $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \rightarrow \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$

Y sustituyendo en la expresión:

$$2\,tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - sen\,x = 2\,\frac{sen\,x}{\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{2} - sen\,x =$$

$$= \frac{sen\,x\,(1+\cos x) - sen\,x\cos x}{\cos x} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{sen\,x\,[1+\cos x - \cos x]}{\cos x} = \frac{sen\,x}{\cos x} = tg\,x$$

(*) Sacando factor común.

<u>Cuestión 25</u>:

Demuestra que $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos x$.

☛ ***Desarrolla y sustituye las razones de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$.***

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \left[\cos x\cos\frac{\pi}{3} - sen\,x\,sen\,\frac{\pi}{3}\right] - \left[\cos x\cos\frac{2\pi}{3} - sen\,x\,sen\,\frac{2\pi}{3}\right] =$$

$$= \left[(\cos x)\,\frac{1}{2} - (sen\,x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] - \left[(\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (sen\,x)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,x = \cos x$$

<u>Cuestión 26</u>:

Simplifica: $\frac{2\cos(45°+\alpha)\cos(45°-\alpha)}{\cos 2\alpha}$

☛ ***Al desarrollar el numerador obtendrás una diferencia de cuadrados.***

$$\frac{2\cos(45°+\alpha)\cos(45°-\alpha)}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\,(\cos 45°\cos\alpha - sen\,45°\,sen\,\alpha)(\cos 45°\cos\alpha + sen\,45°\,sen\,\alpha)}{\cos^2\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\,(\cos^2 45°\cos^2\alpha - sen^2\,45°\,sen^2\,\alpha)}{\cos^2\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\cdot\left[\left(\sqrt{2}/2\right)^2\cos^2\alpha - \left(\sqrt{2}/2\right)^2 sen^2\,\alpha\right]}{\cos^2\alpha - sen^2\,\alpha} = \frac{2\cdot 1/2\cos^2\alpha - 2\cdot 1/2\,sen^2\,\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\,\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - sen^2\,\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\,\alpha} = 1$$

<u>Cuestión 27</u>:

Simplifica la expresión $\frac{sen\,2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$ y calcula su valor para $\alpha = 90°$.

$$\frac{sen\,2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{sen^2\,\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{sen\,\alpha}$$

Por tanto, si $\alpha = 90° \Rightarrow \frac{sen\,2\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{2\cdot 0}{1} = 0$

Cuestión 28:

Demuestra que para cualquier ángulo α se verifica:

$$\mathbf{sen}\ \alpha + \mathbf{cos}\ \alpha = \sqrt{2}\ \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

Desarrollamos la segunda parte de la igualdad:

$$\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\alpha\right) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \frac{2}{2}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha$$

Cuestión 29:

Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b)$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b) =$$
$$= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a +$$
$$+ \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a = 0$$

Cuestión 30:

Demuestra que $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$.

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot (\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) =$$
$$= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

4. EJERCICIOS DE TRIÁNGULOS (TEOREMAS DEL SENO Y COSENO)

Cuestión 31:

. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $c = 10$ cm

b) $b = 22$ cm; $a = 7$ cm; $\hat{C} = 40^\circ$

c) $a = 8$ m; $b = 6$ m; $c = 5$ m

d) $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $\hat{A} = 105^\circ$

e) $a = 4$ m; $\hat{B} = 45^\circ$ y $\hat{C} = 60^\circ$

f) $b = 5$ m; $\hat{A} = \hat{C} = 35$

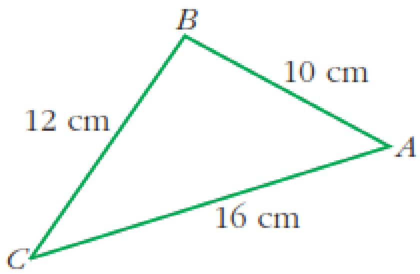
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \widehat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \widehat{A}$

$\cos \widehat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$

$A = 48° \, 30' \, 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \widehat{B}$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$

$B = 92° \, 51' \, 57{,}5''$

• $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180° \rightarrow \widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B}$

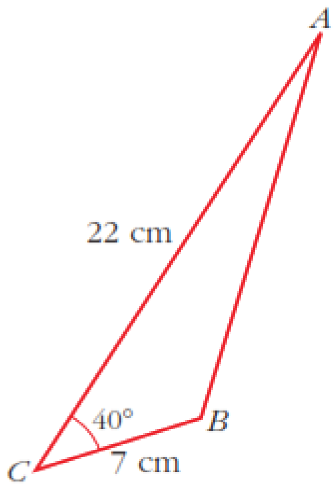
$\widehat{C} = 38° \, 37' \, 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° =$

$= 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm



• $\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \rightarrow \dfrac{7}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{17{,}24}{\text{sen } 40°}$

$\text{sen } \widehat{A} = \dfrac{7 \text{ sen } 40°}{17{,}24} = 0{,}26$

$A = \begin{cases} \widehat{A}_1 = 15° \, 7' \, 44{,}3'' \\ \widehat{A}_2 = 164° \, 52' \, 15{,}7'' \rightarrow \text{No válida} \end{cases}$

(La solución A_2 no es válida, pues $\widehat{A}_2 + \widehat{C} > 180°$).

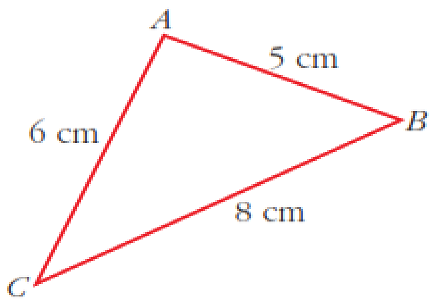
• $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 124° \, 52' \, 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \widehat{A}$

$\cos \widehat{A} = \dfrac{36 + 25 - 64}{60} = -0{,}05$

$\widehat{A} = 92° \, 51' \, 57{,}5''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$

$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \widehat{B}$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{64 + 25 - 36}{80} = 0{,}6625$

$\widehat{B} = 48° \, 30' \, 33''$

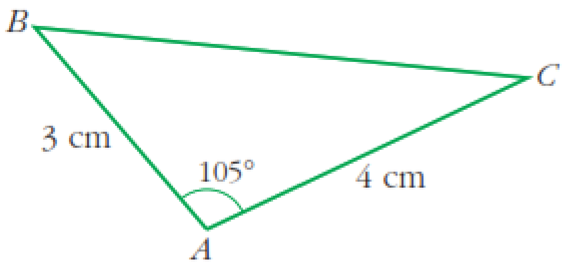
• $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 38° \, 37' \, 29{,}5''$

(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).

d) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$

$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m



• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

$\dfrac{5{,}59}{\operatorname{sen} 105°} = \dfrac{4}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

$\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 105°}{5{,}59} = 0{,}6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43°\ 43'\ 25{,}3'' \\ \hat{B}_2 = 136°\ 16'\ 34{,}7'' \ \rightarrow \ \text{No válida} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31°\ 16'\ 34{,}7''$

e) • $\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

$\dfrac{4}{\operatorname{sen} 75°} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 45°}{\operatorname{sen} 75°} = 2{,}93$ m

• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \ \rightarrow \ \dfrac{4}{\operatorname{sen} 75°} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} 60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 75°} = 3{,}59$ m

f) • $\hat{B} = 180 - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \ \rightarrow \ \dfrac{5}{\operatorname{sen} 110°} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} 35°}$

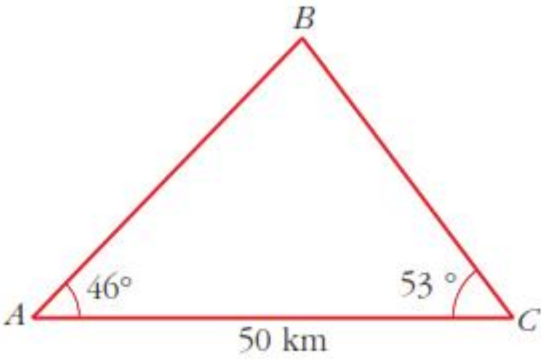
$a = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen} 35°}{\operatorname{sen} 110°} = 3{,}05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \ \rightarrow \ a = c \ \rightarrow \ c = 3{,}05$ m

<u>**Cuestión 32**</u>:

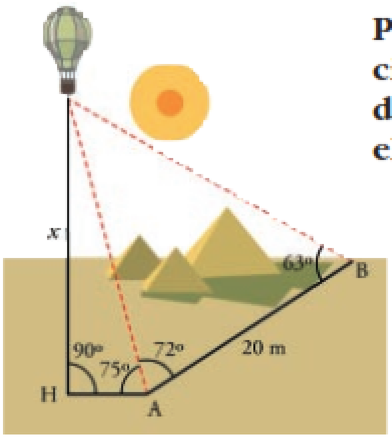
Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $BAC = 46°$ y $BCA = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$

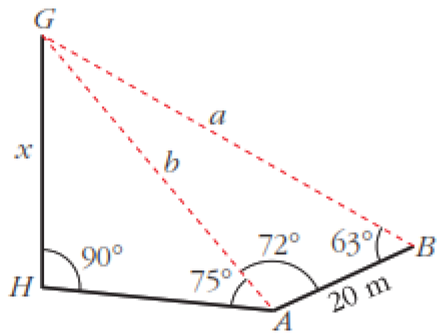


- $\dfrac{a}{sen\,\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\,sen\,\hat{A}}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\,46°}{sen\,81°} = 36{,}4$ km
- $\dfrac{c}{sen\,\hat{C}} = \dfrac{b}{sen\,\hat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\,sen\,\hat{C}}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\,53°}{sen\,81°} = 40{,}4$ km

<u>**Cuestión 33**</u>:



Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto *A*? ¿Cuánto del punto *B*? ¿A qué altura está el globo?

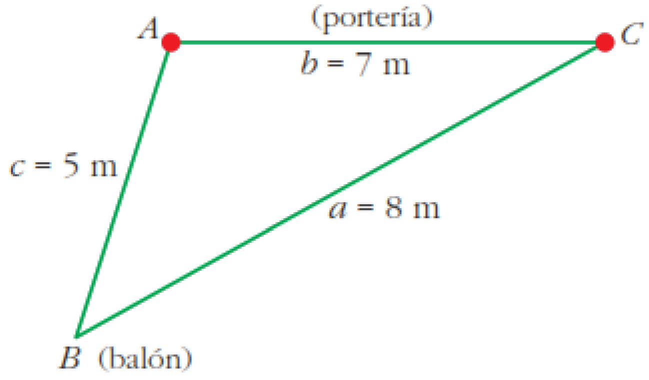


$\widehat{AGB} = 180° - 72° - 63° = 45°$

- $\dfrac{b}{sen\,63°} = \dfrac{20}{sen\,45°} \rightarrow b = \dfrac{20 \cdot sen\,63°}{sen\,45°} = 25{,}2$ m
- $\dfrac{a}{sen\,72°} = \dfrac{20}{sen\,45°} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\,72°}{sen\,45°} = 26{,}9$ m
- $sen\,75° = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \rightarrow x = 25{,}2 \cdot sen\,75° = 24{,}3$ m

Cuestión 34:

En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



Aplicando el teorema del coseno:

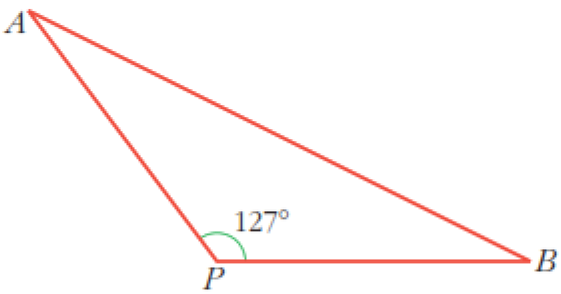
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \cos \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0{,}5 \quad \rightarrow \quad B = 60$

Cuestión 35:

Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127°. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m)



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

Barco A $\rightarrow$ $\overline{PA} = 17 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 5 h $= 157\,250$ m

Barco B $\rightarrow$ $\overline{PB} = 26 \cdot 1850$ m/h $\cdot$ 3,5 h $= 168\,350$ m

Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

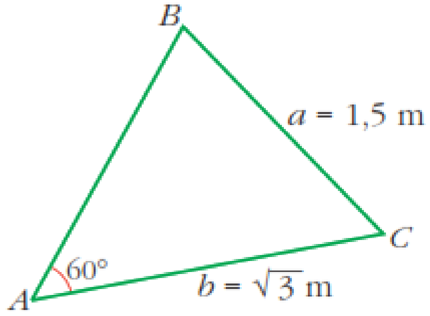
(Nota: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\rightarrow$ $\overline{AB} = 291\,432{,}7$ m).

Cuestión 36:

Prueba que solo existe un triángulo con estos datos: $b = \sqrt{3}$ m, $a = 1,5$ m, $\hat{A} = 60°$

¿Existe algún triángulo con estos datos?

$$\hat{C} = 135°,\ b = 3\sqrt{2}\ \text{cm},\ c = 3\ \text{cm}$$



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

  $1,5^2 = (\sqrt{3})^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c\cos 60°$

  $2,25 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c \cdot \frac{1}{2}$

  $c^2 - \sqrt{3}c + 0,75 = 0$

  $c = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m

  La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

  (NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para B con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría $\hat{A} + \hat{B} > 180°$).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{3}{\text{sen}\ 135°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\ \hat{B} = \frac{3\sqrt{2}\ \text{sen}\ 135°}{3} = \sqrt{2}\ \text{sen}\ 135° = 1 \rightarrow \hat{B} = 90°$$

Pero: $\hat{C} + \hat{B} = 135° + 90° > 180°$ ¡Imposible!

Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

Cuestión 37:

Resolver los siguientes triángulos:

i. $b = 57$ $c = 100$ $\hat{A} = 57°$ Se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre los dos. Aplicando el teorema del coseno se calcula el lado que falta.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}} = \sqrt{57^2 + 100^2 - 2\cdot 57\cdot 100\cos 57} = 83'9$$

Conocidos los tres lados, se calcula uno cualquiera de los ángulos que faltan por el teorema del coseno.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(83'9)^2 + 100^2 - 57^2}{2\cdot 83'9\cdot 100} = 0'82$$

$$\cos\hat{B} = 0'82 \Rightarrow \hat{B} = \arccos 0'82 = 34'7°$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se saca como diferencia hasta 180°.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \qquad \hat{C} = 180 - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - (100° + 34'7°) = 45'3°$$

ii. $b = 57$ $c = 100$ $\hat{B} = 57°$ Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{b}{\text{sen}\ \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\ \hat{C}} \qquad \text{sen}\ \hat{C} = \frac{c}{b}\text{sen}\ \hat{B} = \frac{100}{57}\text{sen}\ 57° = 1'47 > 1 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

iii. $a = 7$ $b = 17$ $\hat{B} = 76^\circ$ Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos. Lo primero es saber si el triángulo tiene solución. Para ello aplicamos el teorema de seno a los datos, y despejamos el seno del ángulo que nos falta.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{b}\text{sen}\,\hat{B} = \frac{7}{17}\text{sen}\,76^\circ = 0'40 < 1 \Rightarrow \text{Tiene solución}$$

Como además $\frac{7}{17} < 1$, la solución es única, y el ángulo $\hat{A}$ es agudo.

$$\text{sen}\,\hat{A} = 0'40 \qquad \hat{A} = \text{arcsen}\,0'40 = 23'5^\circ$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \qquad \hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180^\circ - \left(23'5^\circ + 76^\circ\right) = 80'5$$

El lado que falta se calcula por el teorema del seno.

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = b\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{B}} = 17 \cdot \frac{\text{sen}\,80'5^\circ}{\text{sen}\,76^\circ} = 17'3$$

iv. $a = 12$, $b = 15$, $c = 18$. Conocidos los tres lados, los dos primeros ángulos se calculan por el teorema del coseno, y el tercero por la suma de ángulos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A} \qquad \cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{15^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 18} = -0'45 \qquad \hat{A} = 116'7^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B} \qquad \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{12^2 + 18^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 18} = 0'56 \qquad \hat{B} = 55'8^\circ$$

Conocidos dos ángulos, el tercero se calcula como diferencia hasta 180º

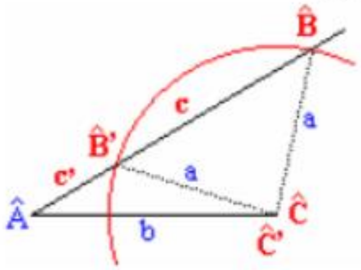
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \qquad \hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180^\circ - \left(116'7^\circ + 55'8^\circ\right) = 7'5^\circ$$

v. $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 15$, $b = 20$. Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos.

Lo primero es comprobar si el triángulo tiene solución, para lo cual se aplica el teorema del seno a los datos que nos dan, despejando el seno del ángulo que se desconoce, en este caso $\text{sen}\,\hat{B}$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad \text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a}\text{sen}\,\hat{A} = \frac{20}{15}\text{sen}\,30^\circ = 0'67 < 1 \text{ El triángulo tiene solución}$$

Teniendo en cuenta que $\left\{\begin{matrix} \frac{b}{a}\text{sen}\,\hat{A} < 1 \\ b > a \end{matrix}\right\}$ la solución es doble, es decir el ángulo $\hat{A}$ puede tomar dos valores, uno agudo $\left(\hat{B}\right)$ y otro obtuso $\left(\hat{B}'\right)$ que son suplementarios.



$$\text{sen}\,\hat{B} = 0'67 \Rightarrow \hat{B} = \text{arcsen}\,0'67 = 41'8^\circ$$

$$\hat{B}' = 180 - \hat{B} = 180 - 41'8 = 138'2^\circ$$

Con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ se calcula $\hat{C}$, con $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ se calcula $\hat{C}'$.

$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (30 + 41'8) = 108'2^\circ$$

$$\hat{C}' = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}'\right) = 180 - (30 + 138'2) = 11'8^\circ$$

Con $\hat{C}$ se calcula c y con $\hat{C}'$ c' mediante el teorema del seno, aplicando entre a y c.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \quad \Rightarrow \quad c = a\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 15\frac{\text{sen}\,108'2^{\circ}}{\text{sen}\,30^{\circ}} = 28'5$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c'}{\text{sen}\,\hat{C}'} \quad \Rightarrow \quad c = a\frac{\text{sen}\,\hat{C}'}{\text{sen}\,\hat{A}} = 15\frac{\text{sen}\,11'8^{\circ}}{\text{sen}\,30^{\circ}} = 6'1$$

Obteniéndose los siguientes triángulos:

vi. $\hat{B} = 95^{\circ}$, b = 12, c = 10. Conocidos dos lados y el ángulo contiguo a uno de ellos.

Como el ángulo conocido es mayor de 90° (obtuso), el triángulo tendrá solución y será única, con la condición de que el lado opuesto al ángulo conocido (b) sea mayor que el lado contiguo (c).

$$b\ (12) > c\ (10)$$

Aplicando el teorema del seno:

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad \text{sen}\,\hat{C} = \frac{c}{b}\text{sen}\,\hat{B} = \frac{10}{12}\text{sen}\,95 = 0'83$$

$$\hat{C} = \text{arcsen}\,0'83 = 56'1^{\circ}$$

Conocido $\hat{C}$ se calcula $\hat{A}$ mediante la suma de ángulos.

$$\hat{A} = 180 - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180 - (95 + 56'1) = 28'9^{\circ}$$

El lado que falta (a) se calcula mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad a = b\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}} = 12\frac{\text{sen}\,28'9^{\circ}}{\text{sen}\,95^{\circ}} = 5'8$$

vii. b = 80, $\hat{A} = 15^{\circ}$, $\hat{B} = 30^{\circ}$. Conocidos dos ángulos y un lado.

Mediante la suma de ángulos se calcula el ángulo que falta $(\hat{C})$.

$$\hat{C} = 180 - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 180 - (15 + 30) = 135^{\circ}$$

Conocidos los tres ángulos y un lado, con el teorema del seno se calculan los lados que faltan.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad a = b\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}} = 80\frac{\text{sen}\,15^{\circ}}{\text{sen}\,30^{\circ}} = 41'4$$

$$\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = b\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{B}} = 80\frac{\text{sen}\,135^{\circ}}{\text{sen}\,30^{\circ}} = 113'1$$

viii. a = 40, $\hat{B} = 45^{\circ}$, $C = 75^{\circ}$. Conocidos dos ángulos y un lado.

El ángulo $\hat{A}$ se calcula como diferencia hasta 180°.

$$\hat{A} = 180 - \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180 - (45 + 75) = 60^{\circ}$$

Conocidos los tres ángulo y un lado (a), los restantes lados se calculan con el teorema del seno, utilizando en ambos casos a y $\hat{A}$.

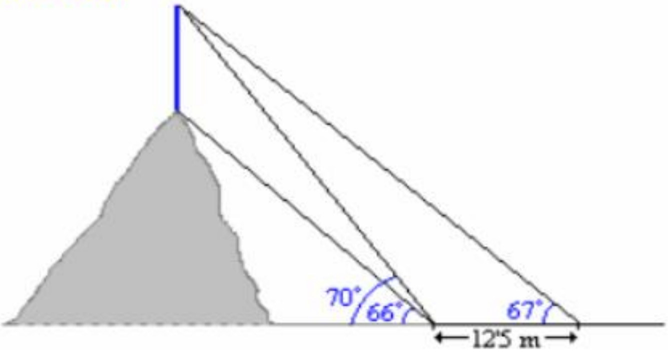
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \qquad b = a\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 40\frac{\text{sen}\,45^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 32'7$$

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad c = a\frac{\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}} = 40\frac{\text{sen}\,75^\circ}{\text{sen}\,60^\circ} = 44'6$$

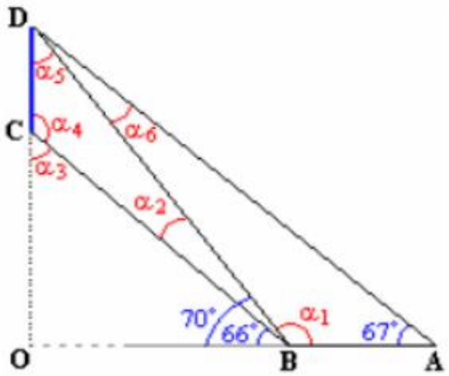
Cuestión 38:

Calcular la altura de un repetidor de TV ubicado en la cima de una montaña sabiendo que desde un punto alejado del pie de la montaña la base y el vértice del repetidor se ven bajo unos ángulos de 66º y 70º respectivamente. Si nos alejamos de esa posición en línea recta 12,5 m el vértice ahora lo vemos bajo un ángulo de 67º.

Solución.



Con la información del enunciado se pueden obtener una serie de triángulos, rectángulos y oblicuángulos, en los que calcular todos los ángulos únicamente con la condición de que la suma de ángulos es igual a 180º.



- α_1. Es suplementario al ángulo de 70º.

$$\alpha_1 = 180 - 70 = 110^\circ$$

- α_2. Como diferencia de ángulos

$$\alpha_2 = 70 - 66 = 4^\circ$$

- α_3: Complementario al ángulo de 66º.

$$\alpha_3 = 90 - 66 = 24^\circ$$

- α_4. Suplementario a α_3.

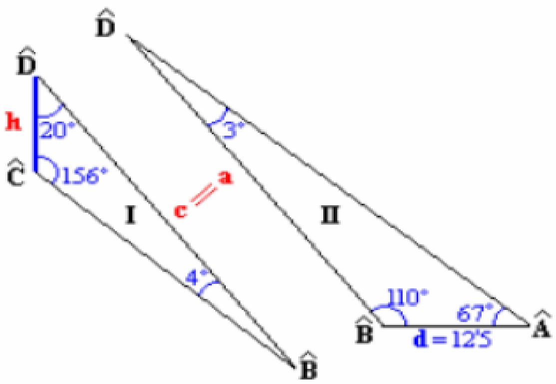
$$\alpha_4 = 180 - 24 = 156^\circ$$

- α_5. En el triángulo BCD: $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^\circ$

$$\alpha_5 = 180 - (4 + 156) = 20^\circ$$

- α_6. En el triángulo ABD: $67 + \alpha_1 + \alpha_6 = 180^\circ$

$$\alpha_6 = 180 - (67 + 110) = 3^\circ$$



Una vez conocidos todos los ángulos, el problema se resuelve mediante dos triángulos oblicuángulos que comparten un lado como muestra la figura.

En el triángulo I se calcula a mediante el teorema del seno.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{d}{\text{sen}\,\hat{D}} \qquad a = d\cdot\frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{D}}$$

$$a = 12'5\cdot\frac{\text{sen}\,67^\circ}{\text{sen}\,3^\circ} \approx 220$$

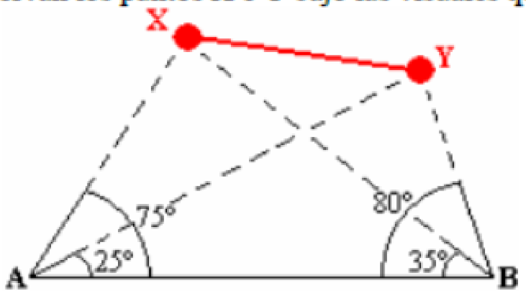
Teniendo en cuenta que a = c, en el triángulo II se calcula h con el teorema des seno.

$$\frac{h}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} \qquad h = c\cdot\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

$$h = 220\cdot\frac{\text{sen}\,4^\circ}{\text{sen}\,156^\circ} \approx 37'7\ \text{m}$$

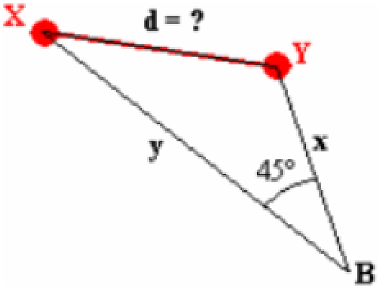
Cuestión 39:

Calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles (X e Y) si desde dos puntos, A y B que distan 210 m, se observan los puntos X e Y bajo las visuales que muestra la figura.



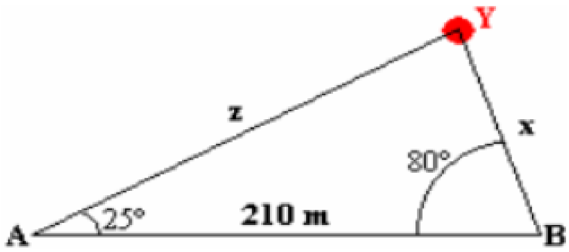
Solución.

Lo primero es seleccionar un triángulo donde este la longitud pedida, uno de ellos puede ser el BXY.



Para calcular **d**, necesitamos conocer **x** e **y**, que localizamos en otros triángulos donde tengamos más datos.

- **x** se pude calcular en el triángulo ABY aplicando el teorema del seno.

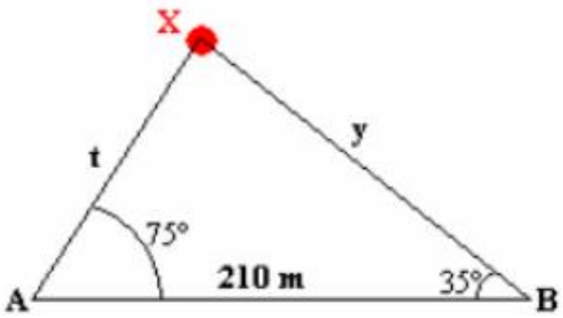


$$25°+80°+\hat{Y}=180° \qquad \hat{Y}=75°$$

$$\frac{x}{\text{sen } 25°}=\frac{210}{\text{sen } 75°} \qquad x=210\frac{\text{sen } 25°}{\text{sen } 75°}$$

$$x \approx 92 \text{ m}$$

- **y** se puede calcular en el triángulo ABX

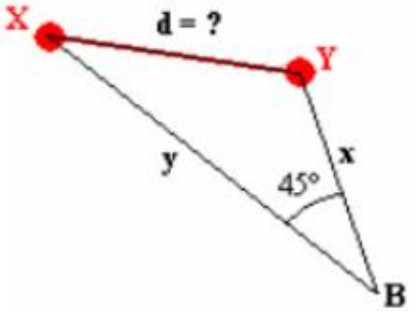


$$75°+35°+\hat{X}=180° \qquad \hat{X}=70°$$

$$\frac{y}{\text{sen } 75°}=\frac{210}{\text{sen } 70°} \qquad x=210\frac{\text{sen } 75°}{\text{sen } 70°}$$

$$x \approx 216 \text{ m}$$

Conocidos $\hat{B}$, **x** e **y** se calcula el valor de **d** mediante el teorema del coseno.



$$d^2=x^2+y^2-2x\cdot y\cdot\cos\hat{B}$$

$$d=\sqrt{92^2+216^2-2\cdot 92\cdot 216\cdot\cos 45°}\approx 164 \text{ m}$$

5. EJERCICIOS DE ECUACIONES Y SISTEMAS TRIGONOMÉTRICOS

Cuestión 40:

Resolver las ecuaciones trigonométricas:

$$sen\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sol:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow\begin{cases} sen\,60^{o} \\ sen\,120^{o}\end{cases}$$

$x+45^{o}=60^{o}$ $\qquad x_1=15^{o}+360^{o}k$

$x+45^{o}=120^{o}$ $\qquad x_2=75^{o}+360^{o}k$

Cuestión 41:

$$3sen^2x-5sen\,x+2=0$$

Sol:

$$sen\,x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}=\frac{5\pm1}{6}$$

$sen\ x=1$ $\qquad x=90^{o}+360^{o}k$

$sen\ x=\frac{2}{3}$ $\qquad x=\begin{cases}41^{o}48'37''+360^{o}k\\138^{o}11'23''+360^{o}k\end{cases}$

Cuestión 42:

$$\cos 2x=1+4sen\,x$$

Sol:

$$\cos^2x-sen^2x=1+4sen\,x$$

$$1-sen^2x-sen^2x=1+4sen\,x$$

$$2sen^2x+4sen\,x=0$$

$$2sen\,x\,(sen\,x+2)=0\Rightarrow\begin{cases}sen\,x=0\\ sen\,x+2=0\end{cases}$$

$x=\arcsin 0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0^{o}+360^{o}k\\ x_2=180^{o}+360^{o}k\end{cases}$ $\qquad x=0^{o}+180^{o}k$

$x=\arcsin(-2)$ $\qquad$ Sin solución

Cuestión 43:

$$tg\ 2x = -tg\ x$$

Sol:

$$\frac{2tg\ x}{1-tg^2\ x} = -tg\ x$$

$$tg\ x\left(tg^2\ x - 3\right) = 0$$

$tg\ x = 0$ $\quad\quad$ $x = 0° + 180°k$

$tg\ x = \pm\sqrt{3}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x = 60° + 180°k \\ x = 120° + 180°k \end{cases}$

Cuestión 44:

$$\begin{cases} sen\ x + sen\ y = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ sen\ x - sen\ y = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

Sol:

Por reducción:

$e_1 + e_2$ $\quad\quad$ $2sen\ x = \sqrt{3}$ $\quad\quad$ $sen\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} x = 60° + 360°k \\ x = 120° + 360°k \end{cases}$

Cuestión 45:

$$\begin{cases} sen\ x \cdot \cos y + \cos x \cdot sen\ y = 1 \\ sen\ x \cdot \cos y - \cos x \cdot sen\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Sol:

$$\begin{cases} sen\left(x+y\right) = 1 \\ sen\left(x-y\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 30° \end{cases}$ $\quad\quad$ $2x = 120° + 360°k$

$x = 60° + 180°k$

$y = 30° + 180°k$

$\begin{cases} x + y = 90° \\ x - y = 150° \end{cases}$ $\quad\quad$ $2x = 240° + 360°k$

$x = 120° + 180°k$

$y = -30° + 180°k$

Cuestión 46:

$$2tg\ x - 3cotg\ \ x - 1 = 0$$

Sol:

$2tg\ x - \dfrac{3}{tg\ x} - 1 = 0$ $\quad\quad$ $2tg^2\ x - tg\ x - 3 = 0$

$$tg\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$tg\ x = \dfrac{3}{2}$ $\quad\quad$ $x = 56°18'35'' + 180°k$

$tg\ x = -1$ $\quad\quad$ $x = 135° + 180°k$

Cuestión 47:

$$\cos^2 x - 3sen^2 x = 0$$

Sol:

$$1 - sen^2 x - 3sen^2 x = 0 \qquad 1 - 4sen^2 x = 0$$

$$sen^2 x = \frac{1}{4} \qquad sen\, x = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \arcsen \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° k \\ x_2 = 150° + 360° k \end{cases}$$

$$x = \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 210° + 360° k \\ x_4 = 330° + 360° k \end{cases}$$

Cuestión 48:

$$sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Sol:

$$sen^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} \qquad \cos^2 x - sen^2 x = -\frac{1}{2} \qquad \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$2x = \begin{cases} 120° + 360° k \\ 240° + 360° k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 60° + 180° k \\ 120° + 180° k \end{cases}$$

Cuestión 49:

$$sen\, 2x = \cos 60°$$

Sol:

$$sen\, 2x = \cos 60° \qquad sen\, 2x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2x = 30° + 360° k \\ 2x = 150° + 360° k \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 15° + 180° k \\ x = 75° + 180° k \end{matrix}$$

Cuestión 50:

$$2\cos x = 3tg\, x$$

Sol:

$$2\cos x = \frac{3sen\, x}{\cos x} \qquad 2\cos^2 x = 3sen\, x$$

$$2\left(1 - sen^2 x\right) = 3sen\, x \qquad 2 - 2sen^2 x = 3sen\, x$$

$$2sen^2 x + 3sen\, x - 2 = 0$$

$$sen\, x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$sen\, x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° k \\ x_2 = 150° + 360° k \end{cases}$$

$sen\, x = -2$ Sin solución porque $-1 \le sen\, x \le 1$

Cuestión 51:

Resuelve estas ecuaciones:

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ **b)** $2sen^2 x - 1 = 0$

c) $tg^2 x - tg\, x = 0$ **d)** $2sen^2 x + 3\cos x = 3$

a) $\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 60°,\ x_2 = 300° \\ -1 \rightarrow x_3 = 180° \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b) $2\,sen^2 x - 1 = 0 \rightarrow sen^2 x = \dfrac{1}{2} \rightarrow sen\, x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sen\, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$
- Si $sen\, x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = -45° = 315°,\ x_4 = 225°$

Todas las soluciones son válidas.

c) $tg^2 x - tg\, x = 0 \rightarrow tg\, x\,(tg\, x - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} tg\, x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ tg\, x = 1 \rightarrow x_3 = 45°,\ x_4 = 225° \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d) $2\,sen^2 x + 3\cos x = 3 \xrightarrow{(*)} 2\,(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 3$

(*) Como $sen^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow sen^2 x = 1 - \cos^2 x$

$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 3 \rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \dfrac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:
- Si $\cos x = 1 \rightarrow x_1 = 0°$
- Si $\cos x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x_2 = 60°,\ x_3 = -60° = 300°$

Las tres soluciones son válidas.

Cuestión 52:

. **Resuelve:**

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1$ **b)** $tg\, 2x + 2\cos x = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(x/2) - \cos x = 1$ **d)** $2sen\, x\cos^2 x - 6sen^3 x = 0$

a) $4\cos 2x + 3\cos x = 1 \rightarrow 4\,(\cos^2 x - sen^2 x) + 3\cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4\,(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) + 3\cos x = 1 \rightarrow 4\,(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 8\cos^2 x - 4 + 3\cos x = 1 \Rightarrow 8\cos^2 x + 3\cos x - 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \dfrac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$

- Si $\cos x = 0{,}625 \to x_1 = 51° \ 19' \ 4{,}13''$, $x_2 = -51° \ 19' \ 4{,}13''$
- Si $\cos x = -1 \to x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b) $tg\ 2x + 2\cos x = 0 \to \dfrac{2\ tg\ x}{1 - tg^2 x} + 2\cos x = 0 \to$

$$\to \frac{tg\ x}{1 - tg^2 x} + \cos x = 0 \to \frac{sen\ x/\cos x}{1 - (sen^2 x/\cos^2 x)} + \cos x = 0 \to$$

$$\to \frac{sen\ x \cos x}{\cos^2 x - sen^2 x} + \cos x = 0 \to sen\ x \cos x + \cos x\,(\cos^2 x - sen^2 x) = 0 \to$$

$$\to \cos x\,(sen\ x + \cos^2 x - sen^2 x) = 0 \to \cos x\,(sen\ x + 1 - sen^2 x - sen^2 x) \to$$

$$\to \cos x\,(1 + sen\ x - 2\,sen^2 x) = 0 \to$$

$$\to \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 + sen\ x - 2\,sen^2 x = 0 \to sen\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Si $\cos x = 0 \to x_1 = 90°$, $x_2 = 270°$
- Si $sen\ x = -\dfrac{1}{2} \to x_3 = 210°$, $x_4 = 330° = -30°$
- Si $sen\ x = 1 \to x_5 = 90° = x_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2} - \cos x = 1 \to \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} - \cos x = 1 \to$

$$\to \sqrt{1+\cos x} - \cos x = 1 \to \sqrt{1 - \cos x} = 1 + \cos x \to$$

$$\to 1 + \cos x = 1 + \cos^2 x + 2\cos x \to \cos^2 x + \cos x = 0 \to \cos x\,(\cos x + 1) = 0$$

- Si $\cos x = 0 \to x_1 = 90°$, $x_2 = 270°$
- Si $\cos x = -1 \to x_3 = 180°$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:

$$x_1 = 90° \ \text{ y } \ x_3 = 180°$$

d) $2\,sen\ x \cos^2 x - 6\,sen^3 x = 0 \to 2\,sen\ x\,(\cos^2 x - 3\,sen^2 x) = 0 \to$

$$\to 2\,sen\ x\,(\cos^2 x + sen^2 x - 4\,sen^2 x) = 0 \to 2\,sen\ x\,(1 - 4\,sen^2 x) = 0$$

- Si $sen\ x = 0 \to x_1 = 0°$, $x_2 = 180°$
- Si $sen^2 x = \dfrac{1}{4} \to sen\ x = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 30°$, $x_4 = 150°$, $x_5 = 210°$, $x_6 = 330°$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

Cuestión 53:

Escribe, en radianes, la expresión general de todos los ángulos que verifican:

a) $tg\ x = -\sqrt{3}$ **b)** $sen\ x = \cos x$

c) $sen^2 x = 1$ **d)** $sen\ x = tg\ x$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bien $x = 300° + k \cdot 360°$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\,\pi \text{ rad} = x \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \text{ rad} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$

c)
$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } sen\, x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sen\, x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ rad} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{O bien } sen\, x = 0 \rightarrow x = k\,\pi \text{ rad} \\ \text{O bien } cos\, x = 1 \rightarrow x = 2k\,\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = k\,\pi \text{ rad} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cuestión 54:

Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + sen^2\, y = 2 \\ x + cos^2\, y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} sen\, x \cdot cos\, y = \frac{3}{4} \\ cos\, x \cdot sen\, y = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} cos\, x + cos\, y = 1 \\ cos\,(x + y) = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y = \frac{\pi}{2} \\ sen\, x + sen\, y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\}$

Las soluciones de los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{l} x + sen^2\, y = 2 \\ x + cos^2\, y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones: $\Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$sen^2\, y = 1 \Rightarrow sen\, y = \pm 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{y = \frac{3\pi}{2}}$

b) $\left.\begin{array}{l} sen\, x \cdot cos\, y = \frac{3}{4} \\ cos\, x \cdot sen\, y = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $\Rightarrow sen\,(x + y) = 1 \Rightarrow x + y = 90° \Rightarrow x = 90° - y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $sen\,(90° - y) \cdot cos\, y = \frac{3}{4} \Rightarrow cos^2\, y = \frac{3}{4} \Rightarrow cos\, y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \boxed{y = 30°;\ x = 60°} \quad \boxed{y = 150°;\ x = 300°} \quad \boxed{y = 210°;\ x = 240°} \quad \boxed{y = 330°;\ x = 120°}$

c) $\left.\begin{array}{l} cos\, x + cos\, y = 1 \\ cos\,(x + y) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ De la 2ª ecuación obtenemos: $\Rightarrow x + y = 0° \Rightarrow x = -y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $cos\,(-y) + cos\, y = 1 \Rightarrow 2\, cos\, y = 1$

$\Rightarrow cos\, y = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y = 60° \\ x = 300° \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} y = 300° \\ x = 60° \end{array}}$

d) $\left.\begin{array}{l} x+y=90^{\circ} \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} y=90^{\circ}-x \\ \text{Sustituyendo en la 2ª ecuación} \end{array}$

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(90^{\circ}-x)=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \operatorname{sen} 45^{\circ} \cdot \cos(90^{\circ}-x)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(45^{\circ}-x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x-45^{\circ}=30^{\circ} \text{ ó } x-45^{\circ}=330^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} y=75^{\circ} \\ x=15^{\circ} \end{array}} \text{ ó } \boxed{\begin{array}{l} y=15^{\circ} \\ x=75^{\circ} \end{array}}$$