HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 6: **INTEGRALES DEFINIDAS**

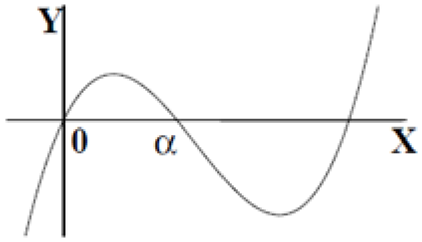
Ejercicio 1: Consideremos $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

a) Si f fuese la función cuya gráfica aparece en el dibujo, indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, razonando la respuesta:

i) $F(\alpha)=0$

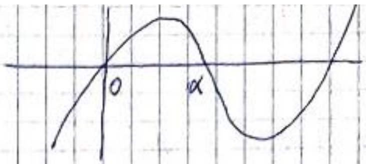
ii) $F'(\alpha)=0$

iii) F es creciente en $(0,\alpha)$



b) Calcula $F(1)$ siendo $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$

1 Si $F(x)=\int_0^x f(t)dt$



a) i) $F(\alpha)=0$ FALSO

ii) $F'(\alpha)=0$ $F'(x)=f(x)$, $F'(\alpha)=f(\alpha)=0$ VERDADERO

iii) F es creciente en $(0,\alpha)$ VERDADERO (aumenta el área)

b) $F(1)=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt$

$\int \frac{1}{\sqrt{t+1}}dt = 2\cdot\sqrt{t+1}+C$ $\left(\boxed{x=\sqrt{t+1}} ;\ x^2-1=t ;\ t=x^2-1 ;\ dt=2x\,dx ;\ \text{no}. \right)$

$F(1)=\int_0^1 \frac{1}{t+1}dt = \left[2\sqrt{t+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}-2\sqrt{1} = 2\sqrt{2}-2 = 2(\sqrt{2}-1)$

Ejercicio 2: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\cdot|x-4|$.

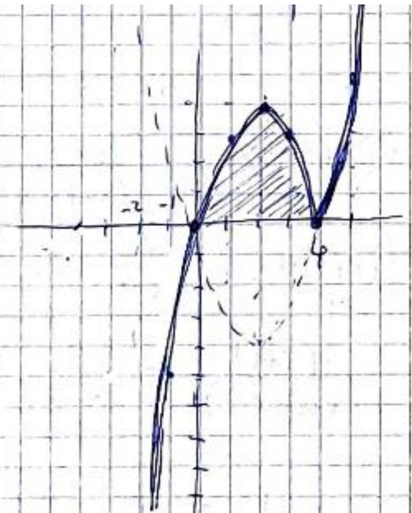
a) Esboza la gráfica de f.

b) Estudia la derivabilidad en $x=4$.

c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

$f(x)=x|x-4| = \begin{cases} x(-x+4) & \text{si } x<4 \\ x\cdot(x-4) & \text{si } x\geq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x^2+4x & x<4 \\ x^2-4x & x\geq 4 \end{cases}$

a)



1)

x	0	1	2	3	4
y	0	3	4	3	0

$x_v = \frac{4}{2a} = 2$

$y_v = -4+8 = 4$

$V(2,4)$

2)

x	4	5
y	0	5

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{+4}{2} = 2$

$y_v = 2^2 - 4\cdot 2 = -4$

$V(2,-4)$

b) $f'_-(4) = \lim_{x\to 4^-} -2x+4 = -4$

$f'_+(4) = \lim_{x\to 4^+} 2x-4 = 4$

$f'_-(4) \neq f'_+(4)$

$f'(x) = \begin{cases} -2x+4 & x<4 \\ 2x-4 & x>4 \end{cases}$

f no es derivable en $x=4$

c) $\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 (-x^2+4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^4 =$

$= \left(-\frac{64}{3} + \frac{64}{2}\right) - 0 = \frac{-128+192}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}\,u^2$

Ejercicio 3: Determina un polinomio $P(x)$ de segundo grado sabiendo que:

$P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x) = \frac{1}{3}$

(3) Si $P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x) = \frac{1}{3}$ $\quad P(x) = ax^2+bx+c$

$\int_0^2 (ax^2+bx+c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^2 = \frac{8a}{3} + \frac{4b}{2} + 2c$

- $\frac{8a}{3} + \frac{4b}{2} + 2c = \frac{1}{3}$
- $P(0) = 1 \Rightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$
- $P(2) = 1 \Rightarrow 4a+2b = 0$ $\quad 4a+2b+1 = 1$

$\frac{8a}{3}+2b=\frac{1}{3}-2$; $\left.\begin{array}{l}\boxed{\frac{8a}{3}+2b=-\frac{5}{3}}\\ 4a+2b=0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\frac{8a}{3}+2b=-\frac{5}{3}\\ -4a-2b=0\\ \hline -\frac{4}{3}a \quad = -\frac{5}{3}\\ -4a=-5\\ a=\frac{5}{4}\end{array}$

$4\cdot\frac{5}{4}+2b=0$

$5+2b=0$

$b=-\frac{5}{2}$

$$\boxed{\text{Es: } P(x)=\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{2}x+1}$$

Ejercicio 4: Calcula $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx$

(4) $\int_0^1 \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx = \otimes$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+1 & x^2-x-2 \\ \hline -3x^3+3x^2+6x & 3x+3 \\ \quad 3x^2+6x+1 & \\ \quad -3x^2+3x+6 & \\ \quad\quad 9x+7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & +2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$\int \frac{3x^3+1}{x^2-x-2}\,dx =$

$= \int 3(x+1)\,dx + \int \frac{9x+7}{x^2-x-2}\,dx = \int (3x+3)\,dx + \int \frac{9x+7}{(x+1)(x-2)}\,dx =$

$= \int (3x+3)\,dx + \int \frac{2/3}{x+1}\,dx + \int \frac{25/3}{x-2}\,dx = \frac{3x^2}{2}+3x+\frac{25}{3}\ln|x-2| + \frac{2}{3}\ln|x+1| + C = G(x)$

$\frac{9x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$

$9x+7 = A(x-2)+B(x+1)$

$x=2$: $25=3B$; $B=25/3$

$x=-1$: $-2=-3A$; $A=2/3$

$G(1)=\frac{3}{2}+3+\frac{2}{3}\ln 2$

$G(0)=\frac{25}{3}\ln 2$

$\otimes = \left[\frac{3x^2}{2}+3x+\frac{25}{3}\ln|x-2|+\frac{2}{3}\ln|x+1|\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2}+3+\frac{25}{3}\ln 1+\frac{2}{3}\ln 2\right)-\left(0+0+\frac{25}{3}\ln 2+\frac{2}{3}\ln 1\right)$

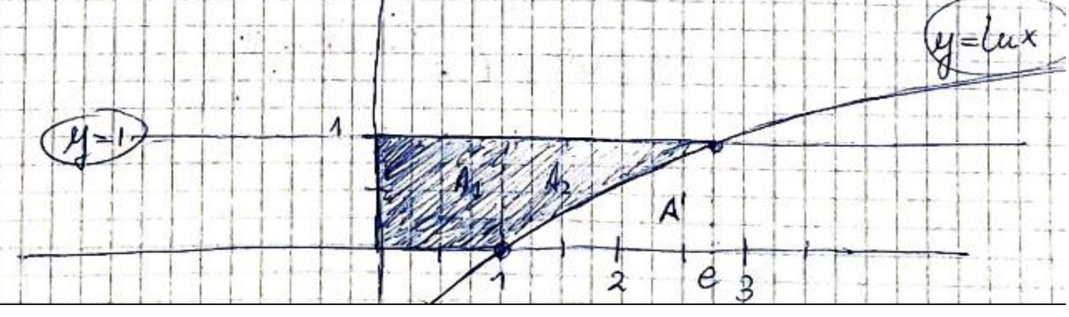
$= \frac{9}{2}-\frac{23}{3}\ln 2 = \frac{9}{2}-\frac{23}{3}\ln 2$

Ejercicio 5: Esboza el recinto limitado por los ejes coordenados y las gráficas delas funciones $y=1$ e $y=Ln(x)$. Calcula su área.

(5) $y=1$

$y=\ln x$

$A=A_1+A_2$



$$A = \int_0^1 1\cdot dx + \int_1^e (1-\ln x)\,dx \qquad A = A_1 + A_2$$

$$\int (1-\ln x)\,dx = \int dx - \underbrace{\int \ln x\,dx}_{①} =$$

$$= x - (x\cdot\ln x - x) =$$

$$= x - x\ln x + x + C$$

① $\int \ln x\,dx =$
$= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$
$= x\cdot\ln x - x$

$$\begin{pmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \\ v = x \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \left[x - x\ln x + x\right]_1^e = -(1 - 1\cdot\ln 1 + 1) + (e - e\ln e + e) = e - 2\ u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 1 + e - 2 = e - 1\ u^2 \qquad \boxed{A = e-1\ u^2}$$

Otra forma: $A = A_R - A' = e\cdot 1 - \int_1^e \ln x\,dx = e - \left[x\ln x - x\right]_1^e = e - 1\ u^2$

Ejercicio 6: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x\cdot e^{-x}$. Esboza el recinto limitado por la curva $y = f(x)$, los ejes coordenados y la recta $x=-1$. Calcula su área.

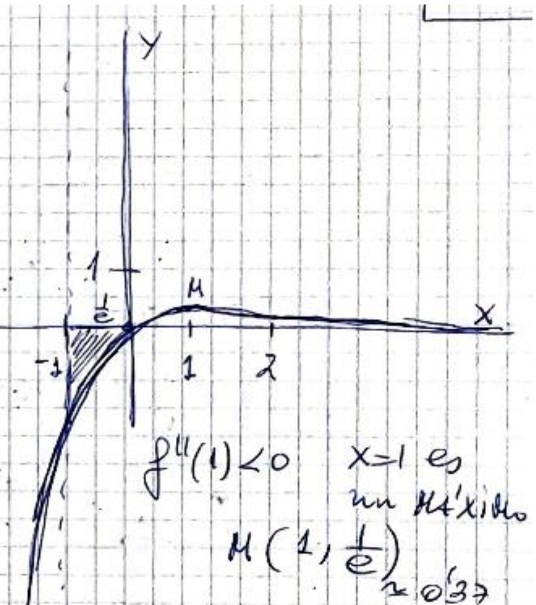
(6) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, los ejes y $x=-1$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- $y = 0$ A.H.
- Ptos corte: $(0,0)$
- $f'(x) = \frac{e^x - x\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$ $\quad y=0$

$f'(x) = 0 \quad 1-x = 0, \ x = 1$

$f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \frac{x-2}{e^x}$

$x=2$ es P.I. $\quad I\left(2, \frac{2}{e^2}\right) \simeq 0'27$



$f''(1) < 0$ $\quad x=1$ es un máximo $\quad M\left(1, \frac{1}{e}\right) \simeq 0'37$

$$A = -\int_{-1}^0 \frac{x}{e^x}\,dx = \left[e^{-x}(x+1)\right]_{-1}^0 = e^0\cdot 1 - e^1\cdot 0 = 1\ u^2$$

$$\int \frac{x}{e^x}\,dx = \int x\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C = e^{-x}(-x-1) + C$$

$$\begin{pmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7: Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y=-(x-2)^2-2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x=3$, el semieje positivo de abscisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área.

7

$y=-(x-2)^2-2$

$y=-(x^2-4x+4)-2 = -x^2+4x-4-2$

$\boxed{y=-x^2+4x-6}$ $\quad y'=-2x+4 \quad m=f'(3)=-6+4=-2$

$P(3,f(3))=(3,-3)$

Recta tg a $y=f(x)$ en $x=3$ $\quad y=-x^2+4x-6$

$m=-2$

$P(3,-3)$ $\quad y+3=-2(x-3)$; $\quad y=-2x+6-3$

$y=-2x+3$ $\quad r_t$ en $x=3$

Ptos corte:

$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+4x \\ y=-2x+3 \end{array}\right\}$ $x=3$ (por ser la recta tg)

x	y
0	3
1	+1
2	-1
3	-3

Vértice:

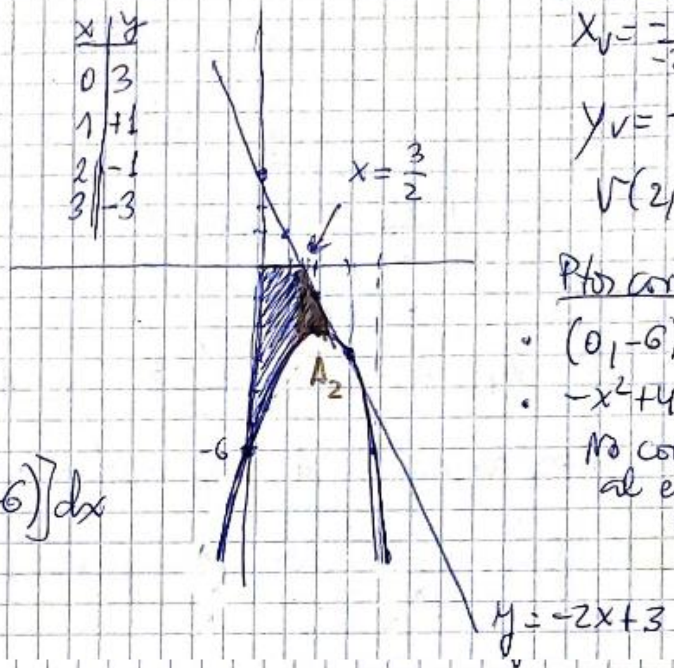
$x_V=\frac{-4}{-2}=2$

$y_V=-2$

$V(2,-2)$

Ptos corte:

- $(0,-6)$
- $-x^2+4x-6=0$ No corta al eje OX



$$A_1=-\int_0^{3/2}(-x^2+4x-6)\,dx$$

$$A_2=\int_{3/2}^{3}\left[(-2x+3)-(-x^2+4x-6)\right]dx$$

$$A_1=-\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}-6x\right]_0^{3/2}=-\left(\frac{-27/8}{3}+2\cdot\frac{9}{4}-\frac{18}{2}\right)=$$

$$=+\frac{27}{24}-\frac{9}{2}+9=\frac{9}{8}-\frac{9}{2}+9=\frac{9-36+72}{8}$$

$$=\frac{45}{8}\,u^2$$

$$A_2=\int_{3/2}^{3}(x^2-6x+9)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_{3/2}^{3}=$$

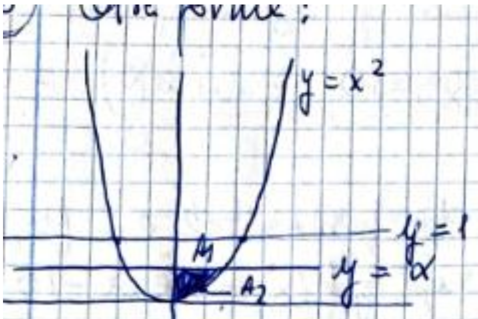
$$= \left(\frac{27}{3} - 3\cdot 9 + 9\cdot 3\right) - \left(\frac{27/8}{3} - 3\cdot\frac{9}{4} + 9\cdot\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{27}{3} - \left(\frac{9}{8} - \frac{27}{4} + \frac{27}{2}\right) = \frac{27}{3} - \frac{63}{8} = \frac{216-189}{24} = \frac{27}{24}\,u^2 = \frac{9}{8}\,u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{45}{8} + \frac{27}{24} = \frac{135+27}{24} = \frac{162}{24} = \frac{81}{12}\,u^2 = \frac{27}{4}\,u^2$$

Ejercicio 8: Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Halla el valor de a.

Otra forma:



Área A_1 = Área A_2 $\qquad A = A_1 + A_2$

$$A = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,u^2$$

$$A_2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}\,u^2$$

Pto corte

$$\left.\begin{array}{l} y = \alpha \\ y = x^2 \end{array}\right\}$$

$\alpha = x^2$

$x = \sqrt{\alpha}$

$$A_2 = \int_0^{\sqrt{\alpha}} (\alpha - x^2)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\left[\alpha x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha\sqrt{\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha}^3}{3} = \frac{1}{3}\,; \quad \sqrt{\alpha}^3 - \frac{\sqrt{\alpha}^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{\alpha^3}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2\sqrt{\alpha^3} = 1$$

$$\alpha^3 = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Ejercicio 9: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 10 & si \quad x \le -1 \\ x^2 - 2x + 2 & si \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Esboza la gráfica de f.

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

9

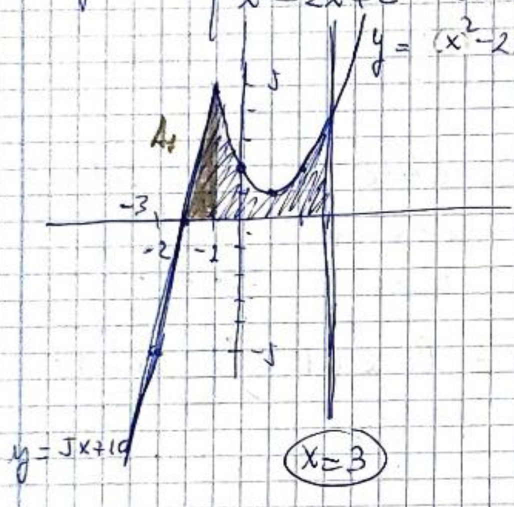
$$f(x) = \begin{cases} 5x+10 & \text{si } x \le -1 \\ x^2-2x+2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

x	-3	-2	-1
y	-5	0	5

x	-1	0	1	2
y	5	2	1	2

$x_v = \frac{2}{2} = 1$

$y_v = 1$



$A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (5x+10)\,dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 10x\right]_{-2}^{-1}$$

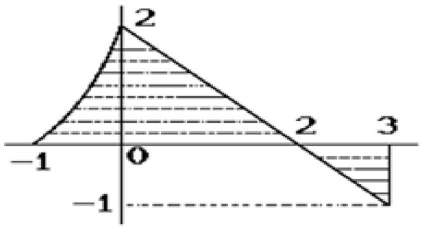
$$A_2 = \int_{-1}^{3} (x^2-2x+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{3}$$

$$A_1 = \left(\frac{5}{2} - 10\right) - \left(\frac{20}{2} - 20\right) = \frac{5}{2} - 10 - 10 + 20 = \frac{5}{2}\,u^2$$

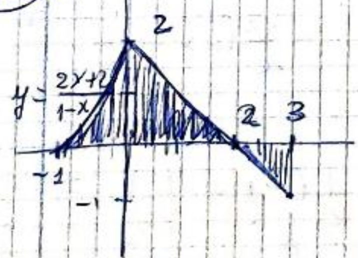
$$A_2 = \left(\frac{27}{3} - 9 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 2\right) = \frac{27}{3} - 3 + \frac{1}{3} + 3 = \frac{28}{3}\,u^2 = \frac{28}{3}\,u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5}{2} + \frac{28}{3} = \frac{15+56}{6} = \frac{71}{6}\,u^2$$

<u>Ejercicio 10</u>: Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y = \dfrac{2x+2}{1-x}$



10



$y = mx + n$

$P(2,0)$

$P'(0,2)$

$n = 2$

$0 = 2m + 2$

$2m = -2$

$m = -1$

$y = -x + 2$

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$$A_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{1-x}\,dx = \int_{-1}^{0} -2\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{4}{1-x}\,dx$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (-x+2)\,dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = -2 + 4 = 2\,u^2$$

$$A_3 = -\int_{2}^{3} (-x+2)\,dx = -\left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = -\left(-\frac{9}{2} + 6 - 2\right) = -\left(-\frac{9}{2} + 4\right) = \frac{1}{2}\,u$$

$$A_1 = \left[-2x - 4\ln|1-x|\right]_{-1}^{0} = 2 - 4\ln 2\ u$$

Ejercicio 11: Considera la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1) & si \quad -1<x\le 1 \\ x\cdot Ln(x) & si \quad x>1 \end{cases}$$

a) Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_0^2 f(x)dx$

11

$$f(x)=\begin{cases} \alpha(x-1) & si \quad -1<x\le 1 \\ x\cdot Ln x & \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcular α si f es derivable (Es continua en $x=1$ $f(1)=0=\lim_{x\to 1} f(x)$,

$$f'(x)=\begin{cases} \alpha & -1<x<1 \\ \ln x+1 & x>1 \end{cases}$$

$f'_-(1)=f'_+(1) \qquad \alpha=\ln 1+1 \quad ; \quad \alpha=1$

$\lim_{x\to 1}\alpha=\lim_{x\to 1}\ln x+1$

b) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 (x-1)dx+\int_1^2 x\cdot\ln x\,dx=$

$=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=$ (*)

$\int x\cdot\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=$

$\left(\begin{array}{ll} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\cdot dx & v=\int x=\frac{x^2}{2}\end{array}\right)$

$=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C$

(*) $=\left(\frac{1}{2}-1\right)+\left(\frac{4}{2}\ln 2-\frac{4}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\cancel{\ln 1}-\frac{1}{4}\right)=$

$=-\frac{1}{2}+2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{5}{4}$

Ejercicio 12: Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

12) Área encerrada entre $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

$f(x) = x^3 - 4x$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$
- $\nexists$ Asíntotas

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- Ptos corte: $(0,0)$

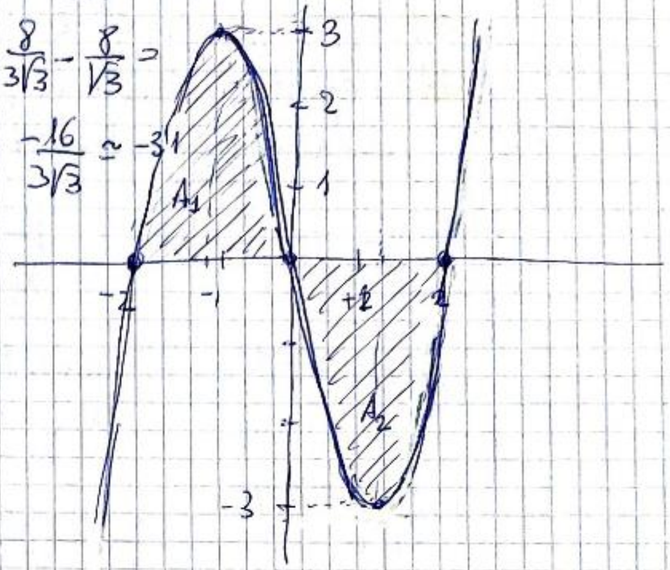
y $x^3 - 4x = 0$; $x = +2$ $(2,0)$; $x = -2$ $(-2,0)$

- $y' = 3x^2 - 4$ $\quad f'(x) = 0$

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \simeq \pm 1'15$

$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{-8+24}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \simeq 3'1$

$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = -\frac{16}{3\sqrt{3}} \simeq -3'1$



	$-\infty$	$-2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$+\infty$
f'	+	−	+	
f	↗	↘	↗	
		MAX.	MIN.	

Es impar.

$A = 2A_1 = 2 \cdot \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx$

$A = -2A_2 = -2 \cdot \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx$

$$A = -2\int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx = -2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = -2\left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{16}{4} - 2 \cdot 4 - 0\right] = -2 \cdot \left(\frac{16}{4} - 8\right) = -2 \cdot (-4) = \boxed{8\,u^2}$$

Ejercicio 13: Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

13) Calcular $b > 0$ si sabemos que el área comprendida entre $y = \sqrt{x}$ y $y = bx$ es $\frac{4}{3}u^2$.

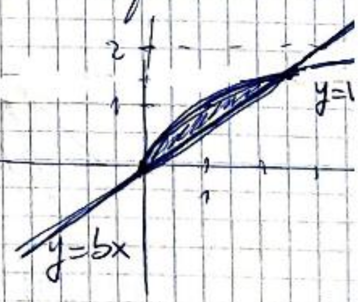
Ptos corte $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = bx \end{cases}$

$\sqrt{x} = bx$

$x = b^2x^2$

$0 = b^2x^2 - x$

$0 = x(xb^2 - 1)$ → $x = 0$; $xb^2 - 1 = 0$



$$\frac{4}{3}=\int_0^{\frac{1}{b^2}}(\sqrt{x}-bx)\,dx$$

$x=\frac{1}{b^2}$

$G(x)=\int(\sqrt{x}-bx)\,dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}-b\frac{x^2}{2}$

$G(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{b}{2}x^2$

$G\left(\frac{1}{b^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{b^2}}\right)^3-\frac{b}{2}\left(\frac{1}{b^2}\right)^2$

$\frac{4}{3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{b^3}$

$6\cdot4b^3=3;\quad b=\sqrt[3]{\frac{3}{24}}\quad b=\frac{1}{2}$

Ejercicio 14: Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+4$ y $g(x)=x^2-1$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-2$

b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y=x+5$. Calcula el área de este recinto.

14

$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+4$

$g(x)=x^2-1$

a) r_t a f en $x=-2$

b) recinto limitado por f, g y la recta $y=x+5$, dibujar y calcular el área

a) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+4$

r_t a f en $x=-2$ $\quad P(-2, f(-2))=(-2,3)$

$f(-2)=-\frac{4}{4}+4=-1+4=3$

$f'(x)=-\frac{2}{4}x=-\frac{1}{2}x$

$f'(-2)=-\frac{1}{2}\cdot(-2)=1=m$

$r_t:\quad y-3=1\cdot(x+2);\quad y=x+2+3;\quad y=x+5$

r_t a f en $x=-2$ (se ve en el dibujo)

b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ parábola orient $-$

$X_v = -\frac{b}{2a} = 0$, $Y_v = 4$ $V(0,4)$

(OX) Ptos corte $(-4,0)$ y $(4,0)$

$g(x) = x^2 - 1$ parábola orient. $+$

$X_v = -\frac{b}{2a} = 0$, $Y_v = -1$ $V(0,-1)$

(OX) Ptos corte: $(-1,0)$ y $(1,$

	x	$y = f(x)$
	-4	0
	-2	3
V	0	4
	2	3
	4	0

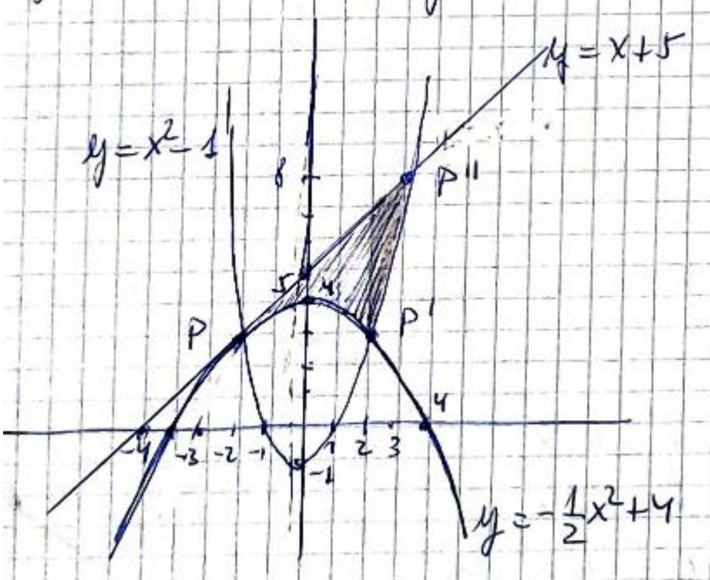
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

	x	$y = g(x)$
	-1	0
	-2	3
V	0	-1
	1	0
	2	3

$y = x^2 - 1$

x	-5	-2	0	2	3
y_2	0	3	5	7	8

$y = x + 5$



$A = A_1 + A_2$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} \left((x+5) - \left(\frac{-x^2}{4} + 4 \right) \right) dx$$

$$A_2 = \int_{2}^{3} \left((x+5) - (x^2-1) \right) dx$$

$P(-2,3)$ y $P'(2,3)$ Ptos corte parábolas

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

$x^2 - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4$

$4x^2 - 4 = -x^2 + 16$

$5x^2 = 20$

$x^2 = 4 \rightarrow x = +2$ $P(2,3)$

$ \rightarrow x = -2$ $P(-2,3)$

$P''(3,8)$ pto de corte de $g(x) = x^2 - 1$ e $y = x + 5$

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 5 \end{cases}$$

$x^2 - 1 = x + 5$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} x = -2 & P(-2,3) \\ x = 3 & P''(3,8) \end{cases}$

$$A_1 = \int_{-2}^{2}\left((x+5)-\left(-\frac{x^2}{4}+4\right)\right)dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{x^2}{4}+x+1\right)dx = \left[\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{8}{12}+\frac{4}{2}+2\right) - \left(-\frac{8}{12}+\frac{4}{2}-2\right) = \frac{16}{12}+4 = \frac{4}{3}+4 = \frac{16}{3}\,u^2$$

$$A_2 = \int_{2}^{3}\left((x+5)-(x^2-1)\right)dx = \int_{2}^{3}(-x^2+x+6)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{2}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+18\right) - \left(-\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+12\right) = -\frac{19}{3}+\frac{5}{2}+6 =$$

$$= \frac{-38+15+36}{6} = \frac{-2+15}{6} = \frac{13}{6}\,u^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3}+\frac{13}{6} = \frac{32+13}{6} = \frac{45}{6}\,u^2$$

Ejercicio 15: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$

a) Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

15 $f(x) = 4-3|x|$, $g(x) = x^2$

a) Esboza las gráficas de f y g. Determine los ptos de corte.

b) Calcule el área del recinto limitado por f y g

a) $f(x) = \begin{cases} 4-3\cdot(-x) & x<0 \\ 4-3\cdot x & x\geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 4+3x & x<0 \\ 4-3x & x<0 \end{cases}$

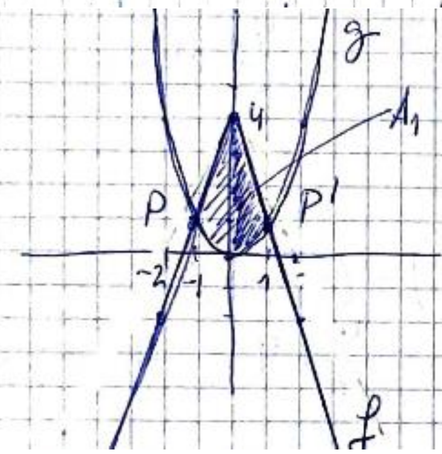
x	-2	-1	0
y	-2	1	4

x	0	1	2
y	4	1	-2

$g(x) = x^2$ $V(0,0)$ orient +

x	-1	0	1	2
y	1	0	1	4

V



Ptos de corte entre f y g son $P(-1,1)$ y $P'(1,1)$

Si $x<0$

$\begin{cases} y = 4+3x \\ y = x^2 \end{cases}$

Si $x>0$

$\begin{cases} y = 4-3x \\ y = x^2 \end{cases}$

$$x^2 = 4+3x \qquad\qquad x^2 = 4-3x$$
$$x^2-3x-4=0 \qquad\qquad x^2+3x-4=0$$
$$x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \qquad\qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}$$
$$x=4 \notin Dom f \qquad\qquad x=-4 \notin Dom f$$
$$x=-1 \quad P'(-1,1) \qquad\qquad x=1 \quad P(1,1)$$

b) $$A = 2A_1 = 2\int_0^1 \left((4-3x)-(x^2)\right)dx =$$
$$= 2\int_0^1 (-x^2-3x+4)\,dx = 2\cdot\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right]_0^1 =$$
$$= 2\left[\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4\right)-0\right] = 2\cdot\left(\frac{-2-9+24}{6}\right) = 2\cdot\frac{13}{6} =$$
$$= \frac{13}{3}\,u^2$$
$$\boxed{A=\frac{13}{3}\,u^2}$$

Ejercicio 16: Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(x)dx$

(16) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx$$

$$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\cdot sen\,x + \cos x + C$$
$$\left(\begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\cos x\,dx\ ; & v=\int \cos x\,dx = sen\,x \end{array}\right)$$

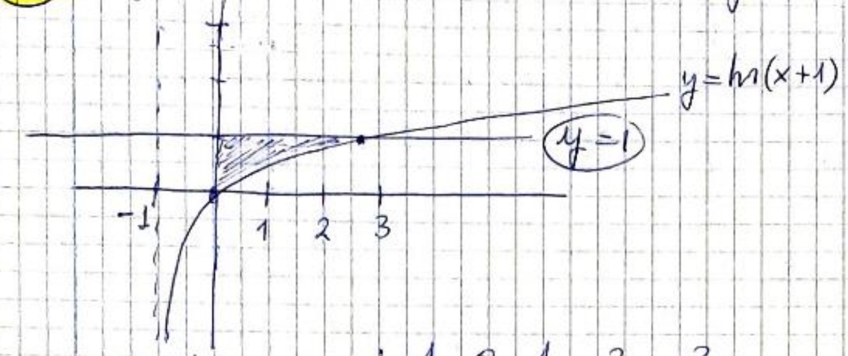
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx = \left[x\cdot sen\,x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(0\cdot sen\,0+\cos 0\right) =$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0\right)-\left(0+1\right) = \frac{\pi}{2}-1 = \frac{\pi-2}{2}$$

Ejercicio 17: Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(x+1)$.

a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje OY y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.

b) Halla el área del recinto anterior.

17 $y=\ln(x+1)$ (traslación de $y=\ln x$ de 1u a la izqda)



$x=-1$
A.V.

x	-1	0	1	2	3
y	$\nexists$	0	$\ln 2$	$\ln 3$	$\ln 4$

Pto corte P:

$$\left.\begin{array}{l} y=\ln(x+1) \\ y=1 \end{array}\right\}$$

$1=\ln(x+1)$

$e=x+1$; $x=e-1$

$P(e-1,1)$

$$\text{Área}=\int_0^{e-1}\left(1-\ln(x+1)\right)dx=\int_0^{e-1}1\,dx-\int_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx$$

$$\int \ln(x+1)\,dx=x\cdot\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\ln(x+1)-\left(\int 1\,dx+\int\frac{-1}{x+1}dx\right)=$$

$$=x\cdot\ln(x+1)-x+\ln|x+1|+C$$

$$\begin{array}{r|l} x & x+1 \\ -x-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\text{Área}=\left[x\right]_0^{e-1}-\left[x\cdot\ln|x+1|-x+\ln|x+1|\right]_0^{e-1}=$$

$$=(e-1-0)-\left[(e-1)\ln(e)-(e-1)+\ln(e)\right)-$$

$$-\left(0\cdot\cancel{\ln 1}-0+\cancel{\ln 1}\right)=$$

$$=(e-1)-(e-1)\ln(e)-\ln(e)=e-1-1=e-2\,u^2$$

$$=2(e-1)-(e-1)\ln(e)-1=e-1-1=\boxed{e-2\,u^2}$$

Ejercicio 18: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-4x$

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.

c) Calcula el área del recinto anterior.

(18) $f(x)=x^3-4x$

a) Ecuación r_t a gráfica de f en $x=1$

b) Esboza recinto limitado por f y la recta $y=-x-2$ determinando los puntos de corte de ambas.

c) Calcula el área del recinto anterior

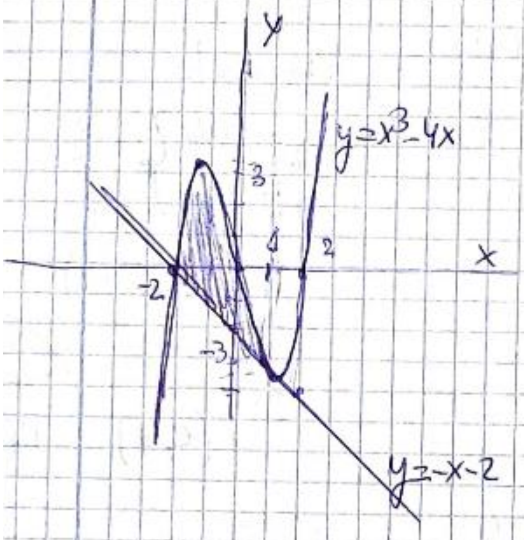
a) $P(1,f(1))=(1,-3)$

$f'(x)=3x^2-4$; $f'(1)=3-4=-1=m$

$y+3=-1\cdot(x-1)$; $y=-x+1-3$

$y=-x-2$ r_t a f en $x=1$

b) $f(x)=x^3-4x$ gráfica ya estudiada en (12) (impar, $P(0,0)$ P.I., máximo en $x=\frac{-2}{\sqrt{3}}$, mínimo en $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$, ptos de corte $(2,0)$ y $(-2,0)$)



$y=-x-2$ (r_t a f en $x=1$)

x	-2	0	1	2
y	0	-2	-3	-4

Ptos de corte son $P(-2,0)$ y $P'(1,-3)$

c) Area $= \int_{-2}^{1}\left((x^3-4x)-(-x-2)\right)dx = \int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{16}{4}-\frac{12}{2}-4\right)$

$= \frac{1}{4}-\frac{3}{2}+8 = \frac{1-6+32}{4} = \frac{27}{4}u^2$ $\quad \left(\frac{15}{4}+\frac{9}{2}+6=\frac{27}{4}\right.$ $-15+18+24$ $\left.\right)$

Ejercicio 19: Sea $I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx$

a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$.
b) Calcula el valor de I.

(19) $I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx$ $\quad \boxed{t=\sqrt{1-x}}$ $\quad I'=\int \frac{1-t^2}{1+t}\cdot -2t\,dt$

$t^2=1-x$

$x=1-t^2$

$dx=-2t\,dt$ $\quad I'=\int\frac{2t^3-2t}{t+1}dt$

$I'=\int\frac{(1-t)\cancel{(1+t)}(-2t)}{\cancel{(1+t)}}dt =$

$=\int(2t^2-2t)\,dt = \frac{2t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}+C =$ $\quad$ $2t^3-2t \;|\; t+1$ $\quad 2t^2-2t$

$-2t^3-2t^2$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3-(1-x)+C =$ $\quad$ $/\; -2t^2-2t$

$+2t^2+2t$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3+x-1+C$ $\quad$ $/\;\;/$

$I=\int_0^1\frac{x}{1+\sqrt{1-x}}dx = \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3+x-1\right]_0^1 = \left(\frac{2}{3}\cdot 0+1-1\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1+0-1\right)$

$=-\left(\frac{2}{3}-1\right)=\frac{1}{3}$

Ejercicio 20: Sea f una función continua en el intervalo $[2,3]$ y F una función primitiva de f tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula;

a) $\int_2^3 f(x)dx$ $\qquad$ b) $\int_2^3\left(5f(x)-7\right)dx$ $\qquad$ c) $\int_2^3\left(F(x)\right)^2 f(x)dx$

(20) f continua en $[a,b]$

F una primitiva de f con $F(2)=1$ y $F(3)=2$ $\quad F'(x)=f(x)$

a) $\int_2^3 f(x)dx = F(3)-F(2)=2-1=1$

b) $\int_2^3 (5f(x) - 7)\,dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx = 5\cdot\left(F(3) - F(2)\right) - 7\cdot[x]_2^3 =$
$= 5\cdot 1 - 7\cdot 1 = -2$

c) $\int_2^3 (F(x))^2 \cdot f(x)\,dx = \int_2^3 (F(x))^2 \cdot F'(x)\,dx = \left[\frac{(F(x))^3}{3}\right]_2^3$
$= \frac{(F(3))^3}{3} - \frac{(F(2))^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Ejercicio 21: Sea la función f definida por $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$

a) Halla una primitiva de f.
b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo $[2, k]$ sea $\ln(2)$.

21 $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ $\quad x \neq \pm 1$

a) Primitiva de f: $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx =$

$\left(2 = A(x-1) + B(x+1) \;;\; \begin{matrix} 2 = 2B \;;\; B = 1 \\ 2 = -2A \;;\; A = -1 \end{matrix}\right)$ $= \boxed{-\ln|x+1| + \ln|x-1| + C}$

b) Calcula k para que el área del recinto limitado por OX y la gráfica de f en $[2, k]$ sea $\ln 2$.

$\int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln 2$

$\left[-\ln|x+1| + \ln|x-1|\right]_2^k = \ln 2$

$\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_2^k = \ln 2 \;;\quad \ln\left(\frac{k-1}{k+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 2$

$\ln\left(\frac{k-1}{k+1} : \frac{1}{3}\right) = \ln 2$

$\frac{3(k-1)}{k+1} = 2 \;;\quad 3k - 3 = 2k + 2$

$k = 5$

Ejercicio 22: Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+b\ln(x)$ tiene un extremo relativo en $x=1$ y que $\int_1^4 f(x)dx = 27-8\ln(4)$

22 $f(x) = ax^2 + b\cdot \ln x$ tiene un extremo en $x=1$

y $\int_1^4 f(x)dx = 27 - 8\ln 4$

$f'(x) = 2ax + \frac{b}{x}$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \rightarrow b = -2a$

$$\int_1^4 (ax^2 + b\ln x)dx = \left[\frac{ax^3}{3}\right]_1^4 + b\cdot\left[x\cdot\ln x - x\right]_1^4 = 27 - 8\ln 4$$

$$\left(\int \ln x\, dx = x\cdot \ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C\right)$$

$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}$

$dv = dx \quad v = x$

$$\frac{64a}{3} - \frac{a}{3} + b\left((4\cdot\ln 4 - 4) - (1\cdot \ln 1 - 1)\right) = 27 - 8\ln 4$$

$$\frac{63a}{3} + b(4\ln 4 - 4 + 1) = 27 - 8\ln 4$$

$$21\cdot a + 4b\ln 4 - 3b = 27 - 8\ln 4$$

$$21a + (-8a)\ln 4 + 6a = 27 - 8\ln 4$$

$$27a - 8a\ln 4 = 27 - 8\ln 4$$

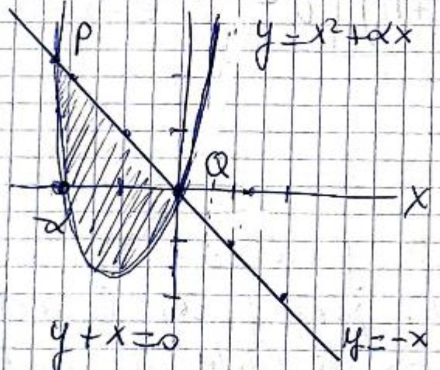
$$a(27 - 8\ln 4) = 27 - 8\ln 4 \Rightarrow a = 1$$

$b = -2a$, $b = -2$

Así que: $\boxed{f(x) = x^2 - 2\ln x}$

Ejercicio 23: Calcula el valor de $a > 0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ vale 36 unidades cuadradas.

23 $\alpha > 0$, si el área del recinto comprendido entre las parábolas $y = x^2 + \alpha x$ y la recta $y + x = 0$ vale $36\ u^2$.



parábola $\boxed{y = x^2 + \alpha x}$ $\alpha > 0$ orient +

$x_V = -\frac{\alpha}{2}$ $y_V = \frac{-\alpha^2}{4}$

Pto corte: $(0,0)$

$0 = x^2 + \alpha x$; $0 = x(x+\alpha)$ $\begin{cases} x = -\alpha \\ x = 0 \end{cases}$ con OX

$y + x = 0$

$\boxed{y = -x}$ recta

$$A = \int_{-1-\alpha}^{0} \left(-x - (x^2 + \alpha x)\right) dx = 36$$

Pto corte

$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 + \alpha x \end{array}\right\}$

$x^2 + (\alpha + 1)x = 0$

$x(x + \alpha + 1) = 0 \rightarrow x = 0$; $x = -1-\alpha$

$P \rightarrow x = -1-\alpha$; $Q \rightarrow x = 0$

$$\int_{-1-\alpha}^{0} \left(-x^2 - (\alpha+1)x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{(\alpha+1)x^2}{2}\right]_{-\alpha-1}^{0}$$

$$+\frac{(-\alpha-1)^3}{3} + \frac{(\alpha+1)(-\alpha-1)^2}{2} = 36$$

$$-\frac{(1+\alpha)^3}{3} + \frac{(\alpha+1)(\alpha+1)^2}{2} = 36$$

$$-2(1+\alpha)^3 + 3(\alpha+1)^3 = 216$$

$(1+\alpha)^3 = 216$; $1+\alpha = \sqrt[3]{216}$; $1+\alpha = 6$

$\alpha = 5$

Ejercicio 24: Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})dx$

24 $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})dx$ $\quad t = \sqrt{x}$ $\quad \left\{\begin{array}{l} t^2 = x \\ 2t\,dt = dx \end{array}\right\}$ $\quad \left(\begin{array}{ll} u = t & du = dt \\ dv = sen\,t & v = -\cos t \end{array}\right)$

$I = \int sen\sqrt{x}\,dx = \int sen\,t \cdot 2t\,dt = 2\int t \cdot sen\,t\,dt =$

$= 2\left(-t \cdot \cos t - \int -\cos t\,dt\right) = -2t\cos t + 2 sen\,t + C =$

$$\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})dx = \left[-2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x} + 2sen\sqrt{x}\right]_0^{\pi^2} =$$

$$= \left(-2\pi\cdot\cos\pi + 2sen\pi\right) - \left(-2\cdot\cancel{0}\cdot\cos 0 + 2\cdot \cancel{sen 0}\right) = 2\pi$$

Ejercicio 25: Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = a\cdot sen(x) + bx^2 + cx + d$, determina los valores de las constantes a, b, c y d sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $(0,4)$ y que la segunda derivada de f es $f''(x) = 3sen(x) - 10$

25

$f(x) = a\cdot sen x + bx^2 + cx + d$

tg horizontal en $(0,4)$
y $f''(x) = 3 sen x - 10$

$f'(x) = a\cdot\cos x + 2bx + c$
$f'(0) = 0 \Rightarrow a + c = 0$
$a = -c$

$f(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

$f'(x) = \int(3 sen x - 10)dx = -3\cdot\cos x - 10x + K$
$f(x) = \int(-3\cos x - 10x + K)dx = -3 sen x - \frac{10x^2}{2} + Kx + K$

Igualando: $f(x) = a\cdot sen x + bx^2 + \cancel{a}x + 4$ y
$f(x) = -3 sen x - 5x^2 + Kx + K'$

Deben ser $a = -3$, $b = -5$
$c = 3$

Así que:

$$\boxed{f(x) = -3\cdot\cos x - 5x^2 + 3x + 4}$$

Ejercicio 26: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 + |x|$, $g(x) = 2$.

a) Determina los puntos de corte de f y g. Esboza dichas gráficas

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

26

$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ x^2 + x & x \geq 0 \end{cases}$

$g(x) = 2$

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ $P(0,0)$ $P'(1,0)$

$V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ $P(0,0)$ $P'(-1,0)$

a) Ptos de corte de f y g. Esboza dichas gráficas

- $x^2 - x = 2 \quad (x<0)$

$x^2 - x - 2 = 0$

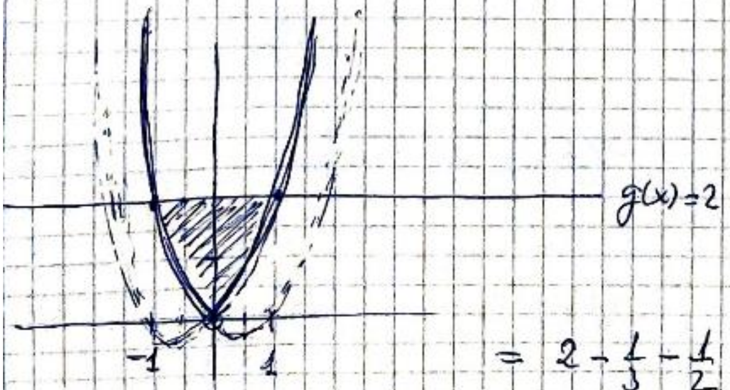
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \cancel{2} \end{array} \right.$

- $x^2 + x = 2 \quad (x \geq 0)$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ \cancel{-2} \end{array} \right.$

Se cortan en $P(-1,2)$ y $P'(1,2)$



$A = 2A_1 = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3} u^2$

$A_1 = \int_0^1 \left(2 - (x^2 + x)\right) dx =$

$= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$

$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{12-2-3}{6} = \frac{7}{6} u^2$