HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 7: **MATRICES**

Ejercicio 1: Efectúa el producto $\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

1 Realiza $\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 7\end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix}7 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = 0+7=7$

Ejercicio 2:

a) ¿Son guales las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$?

b) Halla, si es posible, las matrices $A\cdot B, B\cdot A, A+B, A^t-B$

Sol:

a) Obviamente no, pues la matriz A tiene dimensión 2x1 y la matriz B tiene dimensión 1x2.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\end{pmatrix}$;

$A+B=$"no se puede realizar pues no tiene la misma dimensión"

$A^t-B=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}=\theta$

Ejercicio 3: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A+B)^t=A^t+B^t$

b) $(3A)^t=3\cdot A^t$

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) $(A+B)^t = A^t+B^t$

$(A+B)^t = \begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^t+B^t = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $(3\cdot A)^t = \begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ 9 & 0 & 3\end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix}3 & 9\\ -6 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

$3\cdot A^t = 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 9\\ -6 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

$\boxed{B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}}$

$B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-A$

$B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Ejercicio 4: Sean A y B dos matrices que verifican $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Halla las matrices $(A+B)\cdot(A-B)$ y A^2-B^2

4)

$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$2A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$

Ejercicio 5: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Sol:

$$A^2+2A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$$

<u>1ª forma</u>: Como $A^2+2A=I \Rightarrow A\cdot(A+2\cdot I)=I \Rightarrow$ La matriz $A+2I$ si la multiplicamos por A da como resultado la identidad I_2, luego necesariamente $A^{-1}=A+2I$.

<u>2ª forma</u>: Haciendo las operaciones, tenemos que ver que $A^{-1}=A+2I=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es la inversa de A. Pues las multiplicamos: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y vemos que es cierto.

Ejercicio 6: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3=-I$.
b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) Calcula razonadamente A^{100}.

a) $A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=A^2$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-I$

b) Si $A^3 = -I$

$-A^3 = I$; $-A^2 \cdot A = I$; $-A^2$ es A^{-1} porque $A^{-1} \cdot A = I$

$$A^{-1} = -A^2$$

c) $A^{100} = \left(A^3\right)^{33} \cdot A = (-I)^{33} A = (-1)^{33} \cdot I^{33} A = -A$

$$\boxed{A^{100} = -A}$$

Ejercicio 7: Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $\left(A \cdot B\right)^t = B^t \cdot A^t$

⑦ Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(AB)^t = B^t A^t$

$$(A \cdot B)^t = \left[\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^t = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8: Halla las matrices X e Y que verifican el sistema $2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

⑧ Halla las matrices X, Y que verifican:

$$\left.\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Y$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Y$$

$$\boxed{Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 9: Determina los valores de m para los cuales $X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica $X^2-\frac{5}{2}X+I=\theta$

9) Determina los valores de m para los cuales $X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica $X^2-\frac{5}{2}X+I=0$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{5}{2}m & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{5}{2}m & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2-\frac{5}{2}m+1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m^2-\frac{5}{2}m+1=0$$

$$2m^2-5m+2=0\ ;\quad m=\frac{+5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$$

$$m=\frac{5+3}{4}=2$$

$$m=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{m=2,\ m=\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 10: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

Sol: Calculamos:

$$A^2=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

$A^4=A^3\cdot A=I_3\cdot A=A$; $A^5=A^4\cdot A=A\cdot A=A^2$ que ya la hemos calculado. Como vemos se repiten de tres en tres. Luego basta dividir la potencia entre 3 y quedarnos con el resto. Como 128 = 3·42 + 2

$$A^{128}=A^{3\cdot 42+2}=A^{3\cdot 42}\cdot A^2=\left(A^3\right)^{42}\cdot A^2=I_3\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De forma general, podemos concluir que $A^n=\begin{cases} I_3 & si \quad n=3\cdot k \\ A & si \quad n=3\cdot k+1 \\ A^2 & si \quad n=3\cdot k+2 \end{cases}$ con $k\in\mathbb{N}$

Ejercicio 11: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A+I)^2=\theta$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.

11 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ Compruebe $(A+I)^2=\theta$ y exprese A^2 como combinación lineal de A e I.

$$A+I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 0 & -16 \\ -6 & 1 & -12 \\ +4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -16 \\ -6 & 1 & -12 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}=-2A-I=-2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2=-2A-I}$$

Ejercicio 12:

a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}, siendo $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que verifica $X\cdot A=B$ siendo A la matriz anterior y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol:

a) Calculamos $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, haciendo correctamente los cálculos.

b) $X\cdot A=B\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X\cdot I_3=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 0\\ \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$X=\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -2\end{pmatrix}$

Ejercicio 13: En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y bisagras de cada tipo de vivienda.

13

a) $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}P & G\end{array}\\ \begin{array}{c}L_3\\ L_4\\ L_5\end{array} & \begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}C & B\end{array}\\ \begin{array}{c}P\\ G\end{array} & \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}\end{array}$

b) Realizamos el producto de ambas para obtener la matriz que exprese el nº de cristales y bisagras de cada vivienda.

$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}P & G\end{array}\\ \begin{array}{c}L_3\\ L_4\\ L_5\end{array} & \begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\\ 6 & 5\end{pmatrix}\end{array}\cdot\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}C & B\end{array}\\ \begin{array}{c}P\\ G\end{array} & \begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc}C & B\end{array}\\ \begin{array}{c}L_3\\ L_4\\ L_5\end{array} & \begin{pmatrix}20 & 34\\ 26 & 44\\ 32 & 54\end{pmatrix}\end{array}$

Ejercicio 14: Justifica por qué no es cierta la igualdad $(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

14

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

En general $A\cdot B\neq B\cdot A$ para cualesquiera matrices A y B

El producto no es conmutativo.

Ejercicio 15: Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo $a\in\mathbb{R}$.

Calcula el valor de a para que $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

15

$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ $a\in\mathbb{R}$

Calcule a para que $A^2-A=\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

$A^2-A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}$ como debe ser igual a $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} a^2-a=12 \\ a^2+a=20 \end{matrix}\right\}$ $2a^2=32$; $a^2=16$; $a=\pm 4$

Ejercicio 16: Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$, determina b para que $A^2-2A+I=\theta$

Sol:

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & -1+b^2 \end{pmatrix}; \qquad 2\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

Luego, $A^2-2A+I=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -b \\ -2 & 1 & -b \\ b & 0 & -1+b^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b+2 \\ 0 & 0 & -b+2 \\ b-2 & 0 & b^2-2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases} -b+2=0\Rightarrow b=2 \\ b-2=0\Rightarrow b=2 \\ b^2-2b=0\Rightarrow\begin{cases} b=0 \\ b=2 \end{cases} \end{cases}$ La única que verifica las tres ecuaciones es $\boxed{b=2}$

Ejercicio 17: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $2A-A^2=I$.

b) Calcula A^{-1}. (Puedes usar la igualdad del apartado anterior)

a) $2\cdot A-A^2=2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$

b) Si $2A - A^2 = I$

$(2I - A)\cdot A = I$ entonces $A^{-1} = 2I - A$

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que su producto es I.

$$\underbrace{(2I - A)}_{A^{-1}} \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejercicio 18: Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, calcula $B = A^2 - 2A$

Sol: $B = A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ -1+\lambda & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 19: Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A \cdot B)^t$ y $(B \cdot A)^t$

19 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

$$(B \cdot A)^t = \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^t = (1 + 8 - 3)^t = 6$$

Ejercicio 20: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Prueba que $A^3 + I = \theta$.
b) Calcula la inversa de A.
c) Calcula A^{257}.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así que $A^3 + I = \theta$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando que $A^3 + I = O$

$A^3 = O - I$; $A^3 = -I$; $A \cdot A^2 = -I$;

$A \cdot (-A^2) = I$

luego $A^{-1} = -A^2$

Así que $A^{-1} = -A^2$ la opuesta de A^2

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

c) A^{257}

Como $A^3 = -I$

$$\begin{array}{r|l} 257 & 3 \\ \hline 17 & 85 \\ 2 & \end{array}$$

$257 = 85 \cdot 3 + 2$

$A^{257} = A^{85 \cdot 3 + 2} =$

$= (A^3)^{85} \cdot A^2 =$

$= (-I)^{85} \cdot A^2 = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{257} = -A^2$