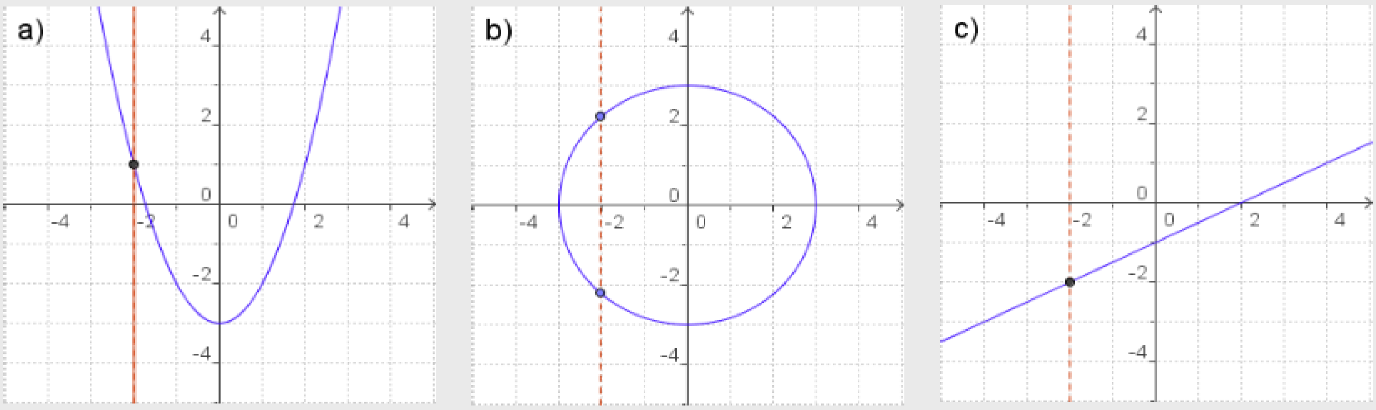
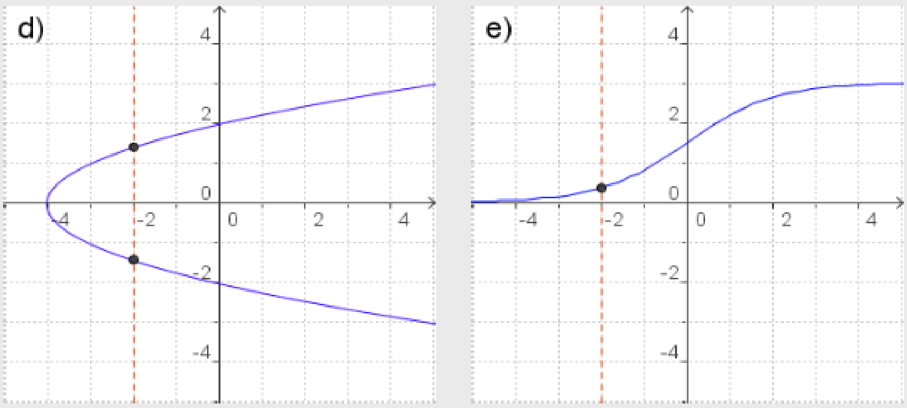
EJERCICIOS RESUELTOS PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES HOJA I

Cuestión 1:

De las siguientes gráficas indica las que corresponden a una función y las que no.

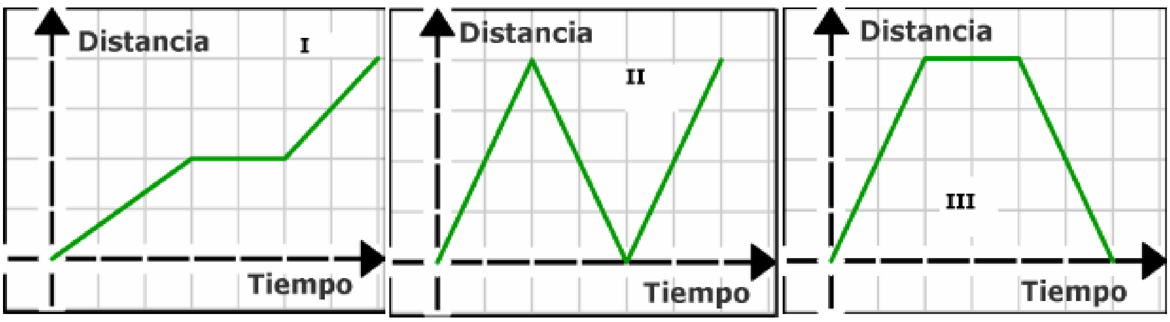




- Son gráficas de una función a), c) y e), ya que a cada x del dominio le corresponde un único valor de y.
- No son gráficas de una función b) y d)

Cuestión 2:

Asocia cada enunciado con su gráfica correspondiente:



(A) Pedro sale de su casa al instituto. Por el camino, se da cuenta que ha olvidado el libro de matemáticas. Vuelve a por el libro y luego se va al instituto sin pararse.

A esta situación le corresponde la gráfica: **I I**

(B) Un teleférico sube hasta una pista. Allí para 10 minutos y baja de nuevo hasta la base.

A esta situación le corresponde la gráfica: **I I I**

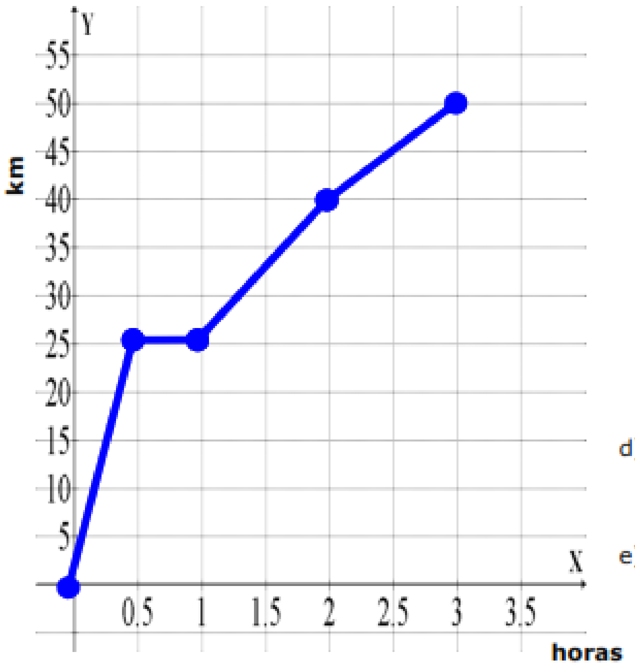
(C) María sale de su casa hacía el gimnasio. Por el camino se encuentra a Luis y se para a hablar con él. Después sigue andando hasta el gimnasio

A esta situación le corresponde la gráfica: **I**

Cuestión 3:

Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado.
Esta mañana, Pablo salió a hacer una ruta en bicicleta.

- Tardó media hora en llegar al primer punto de descanso, que estaba a 25 km de su casa.
- Estuvo parado durante 30 minutos.
- Tardó 1 hora en recorrer los siguientes 15 km
- Tardó otra hora en recorrer los 10 km que faltaban para llegar a su destino.



a) ¿Qué escala estamos usando en cada eje?

Eje X: **1 cuadrito = 0,5 h**

Eje Y: **1 cuadrito = 5 km**

b) ¿Cuánto tiempo tardó en hacer la ruta?

3 h

c) ¿Cuántos kilómetros recorrió?

50 km

d) ¿Qué distancia recorrió las dos últimas horas?

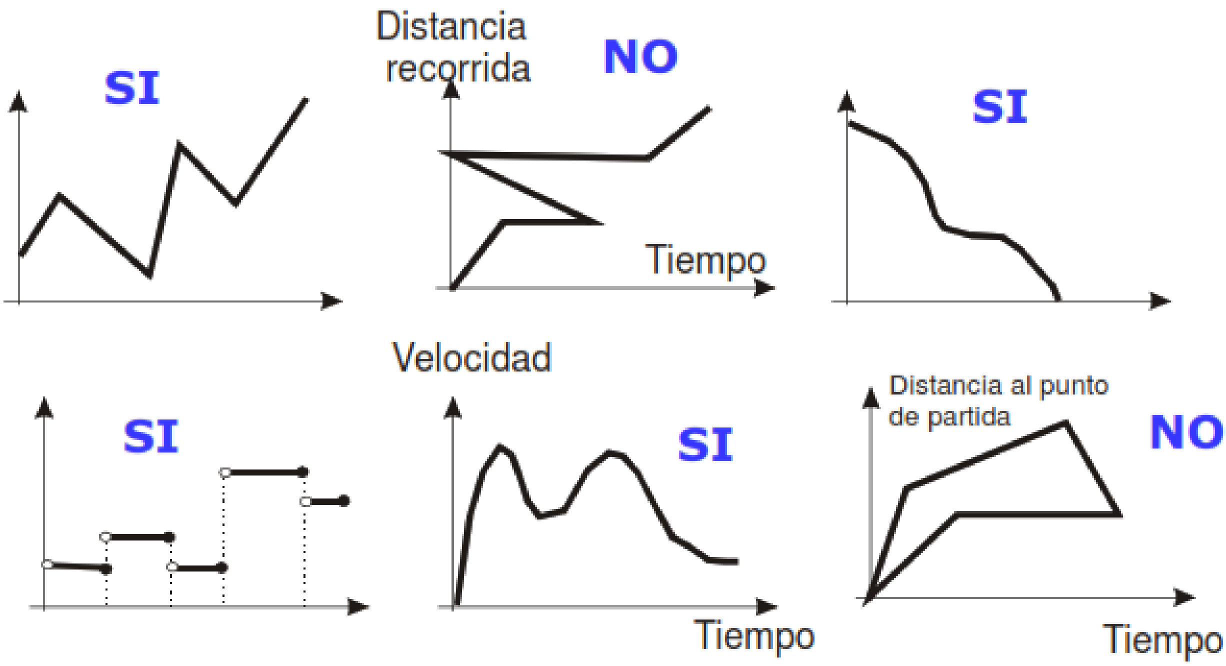
25 km

e) ¿Qué velocidad media llevó las dos últimas horas?

v = 25 km : 2 h = 12,5 km/h

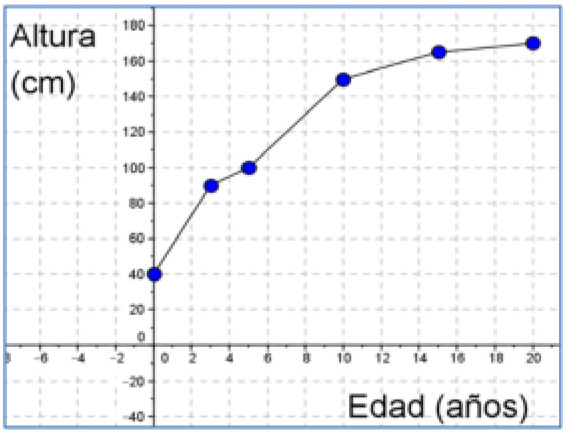
Cuestión 4:

De las siguientes gráficas, ¿cuáles corresponden a funciones y cuáles no?



Cuestión 5:

- La gráfica siguiente nos muestra la variación de la estatura de Laura con relación a su edad.



Observando la gráfica contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿A qué edad medía 1 metro?

b) ¿Cuánto medía al nacer?

c) ¿Cuánto medía a los 10 años? ¿Y a los 20?

d) ¿En qué periodo creció menos?

olución:

a) Mirando a la gráfica observamos que el punto (5, 100) es el que nos piden pues la ordenada es 100 (1 metro), luego Laura tenía 5 años.

b) El punto que representa el nacimiento es el (0, 40), luego midió 40 centímetros

c) Del mismo modo observamos que a los 10 años medía 155 centímetros y a los 20 años 170.

d) En la gráfica observamos que el tramo menos inclinado es el que va de los 15 a los 20 años, eso quiere decir que en ese tramo Laura creció menos.

Cuestión 6:

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^2 + x - 8$

Sol.:

Dado que se trata de una función polinómica, su dominio son todos los números reales: $Dom(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 4$

Sol.:

Como se trata de una función polinómica, en este caso una función constante, su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

c) $y = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{3}$

Sol.:

Se trata de una función polinómica pues es la función $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{2}{3}x - 1$ que resulta del expandir la fracción.

Su dominio es: $Dom(f) = \mathbb{R}$

d) $y = \dfrac{-1}{x-8}$

Sol.:

Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el 8: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{8\}$

e) $f(x) = \dfrac{x-4}{5x+10}$

Sol.:

Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.

$5x + 10 = 0 \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2:

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

f) $f(x)=6+\dfrac{x^2}{3x-2}$

Sol.:
Se trata de averiguar que números reales anulan el denominador pues para esos números no podríamos dividir por 0.
$3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

g) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$

Sol.:
Veamos dónde se anula el denominador:
$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

h) $y=-3+x+\dfrac{6}{x^2+6x}$

Sol.:
Veamos dónde se anula el denominador:
$x^2+6x=0 \Rightarrow x\cdot(x+6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+6=0 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-6,0\}$

i) $y=\dfrac{-5x+1}{x^2+x-6}$

Sol.:
Veamos dónde se anula el denominador:
$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{2}=2 \\ x=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{cases}$. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-3,2\}$

j) $y=\dfrac{x+9}{x^2+x+12}$

Sol.:
Veamos dónde se anula el denominador:
$x^2+x+12=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-48}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-47}}{2}$, que no tiene soluciones, es decir, no se anula nunca el denominador, y así su dominio son todos los números reales. Por tanto, su dominio es: $Dom(f)=\mathbb{R}$

k) $y=\dfrac{2x+3}{x\cdot(x+2)\cdot(x+1)}$

Sol.:
Veamos dónde se anula el denominador:
$x\cdot(x+2)\cdot(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$, por lo que: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,-2,-1\}$

<u>Cuestión 7</u>:
Calcula el dominio de las siguientes funciones irracionales:

a) $y=\sqrt[3]{x+2}$

Sol.:
Primero nos fijamos en el índice de radicando que es 3, impar, luego la raíz se puede calcular siempre que el radicando tenga sentido. En este caso, como el radicando es $x+2$ que es un polinomio y siempre tiene sentido, se tiene que: $Dom(f)=\mathbb{R}$

b) $f(x)=\sqrt[7]{\dfrac{x}{5x+10}}$

Sol.:

El índice es impar, 7, y entonces nos fijamos en el radicando $\dfrac{x}{5x+10}$ en el cual hemos de descartar los números reales que anulen el denominador.
$5x+10=0 \Rightarrow 5x=-10 \Rightarrow x=-2$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$

Sol.:

El índice es impar, 3, y entonces nos fijamos en el radicando $\dfrac{2}{x}$ en el cual hemos de descartar los números reales que anulen el denominador.
$x=0$. Por tanto, su dominio son todos los números reales salvo el -2: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

d) $f(x)=\sqrt{-2x+5}$

Sol.:
El índice es par, luego la raíz tiene sentido cuando el radicando sea positivo o 0. Para hacerlo vemos primero dónde se anula el radicando: $-2x+5=0 \Rightarrow -2x=-5 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Ahora construimos una tabla de signos para saber dónde es positivo: con los dos intervalos que nos salen al usar $\dfrac{5}{2}$ para dividir la recta real.
En cada uno de esos intervalos cogemos un número y sustituimos en el radicando y consideramos el signo del número resultante.

	$(-\infty,\frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2},+\infty)$
$-2x+5$	Probando con $x=0$ nos resulta $-2\cdot 0+5=5$ que es positivo +	Probando con $x=7$ nos resulta $-2\cdot 7+5=-14+5=-9$ que es negativo -

El dominio es ese intervalo donde ha salido positivo, incluyendo el extremo $x=\dfrac{5}{2}$, pues la raíz cuadrada de 0 tiene sentido. Por tanto, $Dom(f)=(-\infty,\frac{5}{2}]$

e) $y=\sqrt[8]{3x-6}$

Sol.:
El índice es par, luego la raíz tiene sentido cuando el radicando sea positivo o 0. Para hacerlo vemos primero dónde se anula el radicando: $3x-6=0 \Rightarrow x=2$
Ahora construimos una tabla de signos para saber dónde es positivo: con los dos intervalos que nos salen al usar $x=2$ para dividir la recta real.

En cada uno de esos intervalos cogemos un número y sustituimos en el radicando y consideramos el signo del número resultante.

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$3x-6$	Probando con $x=0$ nos resulta $3\cdot 0-6=-6$ que es negativo -	Probando con $x=4$ nos resulta $3\cdot 4-6=6$ que es positivo +

Por tanto, $Dom(f)=[2,+\infty)$

f) $y=\sqrt{x^2-3x-4}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$x^2-3x-4=0\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{3\pm 5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\x=-1\end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,4)$	$(4,+\infty)$
x^2-3x-4	Probando con $x=-2$ nos resulta $(-2)^2-3\cdot(-2)-4=4+6-4=6$ que es positivo +	Probando con $x=0$ nos resulta $0^2-3\cdot 0-4=-4$ que es negativo -	Probando con $x=5$ nos resulta $5^2-3\cdot 5-4=25-15-4=6$ que es positivo +

Como los extremos tienen sentido: $Dom(y)=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$

g) $y=\sqrt[6]{2x^2-1}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$$2x^2-1=0\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$
$2x^2-1$	Probando con $x=-2$ nos resulta $2\cdot(-2)^2-1=8-1=7$ que es positivo +	Probando con $x=0$ nos resulta $2\cdot 0^2-1=-1$ que es negativo -	Probando con $x=5$ nos resulta $2\cdot 5^2-1=50-1=49$ que es positivo +

Como los extremos tienen sentido: $Dom(y)=(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$

h) $y=\sqrt{x^2+x+1}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el radicando:

Sol.:

$x^2+x+1=0\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ No existen soluciones. Se trata de un caso especial, en el cual el radicando siempre es positivo o siempre es negativo. Comprobamos con un valor de x si es positivo o negativo, por ejemplo, para $x=0$ sustituimos: $0^2+0+1=1>0$. Podemos deducir que siempre es positivo, así, por tanto, $Dom(y)=\mathbb{R}$

i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x}{x-3}}$ Como el índice es par, vemos dónde se anula el numerador y el denominador del radicando:

Sol.:

$\begin{cases} -2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$ Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{-2x}{x-3}$	Probando con $x=-2$ nos resulta $\dfrac{4}{-5}=-\dfrac{4}{5}$ que es negativo -	Probando con $x=1$ nos resulta $\dfrac{-2}{-2}=1$ que es positivo +	Probando con $x=5$ nos resulta $\dfrac{-10}{2}=-5$ que es negativo -

Por lo que obtenemos que es factible en el intervalo $(0,3)$. Veamos que ocurre en $x=0$ y en $x=3$ para ver si son del dominio.

En $x=0$ al sustituir nos queda $f(0)=\sqrt{\dfrac{-2\cdot 0}{0-3}}=\sqrt{0}=0$ luego $x=0$ es del dominio.

En $x=3$ al sustituir nos queda $f(0)=\sqrt{\dfrac{-2\cdot 3}{3-3}}=\sqrt{\dfrac{-6}{0}} \Rightarrow \text{No } \exists$ luego $x=3$ NO es del dominio.

Concluimos entonces que $Dom(f)=[0,3)$

j) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{-2x}{x-3}}$ Es parecida a la función anterior, pero como el índice es impar, vemos dónde se anula el denominador del radicando que serán los puntos que no son del dominio:

Sol.:

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

<u>Cuestión 8</u>:

Sin necesidad de representarlas, hallar **analíticamente** el Dom(f) de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$

b) $f(x)=\dfrac{8x}{x+5}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$

d) $f(x)=\dfrac{2}{4x-x^2}$

e) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-16}$

f) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$

g) $f(x)=\sqrt{x+5}$

h) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

i) $f(x)=\sqrt{2x-5}$

j) $f(x)=\sqrt{4-x}$

k) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

l) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$

m) $f(x)=\sqrt{x^2+x+4}$

n) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-16}}$

o) $f(x)=\dfrac{x+1}{(2x-3)^2}$

p) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x^2-x-6}}$

q) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3x-12}}$

r) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+4}$

s) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

t) $f(x)=\dfrac{14}{x^2+2x+1}$

u) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+5x+4}$

v) $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$

w) $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x^2-4}}$

*(Sol: **a)** IR; **b)** IR-{-5}; **c)** IR-{-2,4}; **d)** IR-{0,4}; **e)** IR-[±4}; **f)** IR; **g)** [-5,∞); **h)** (-5,∞); **i)** [5/2,∞); **j)** (-∞,4]; **k)** (-∞ ,-3]U[3,∞); **l)** (-∞,-4]U[2,∞); **m)** IR; **n)** (-4,0]U(4,∞); **o)** IR-{3/2}; **p)** [-3,-2)U(3,∞); **q)** (4,∞); **r)** IR; **s)** (-∞,2)U(3,∞); **t)** IR-{-1}; **u)** IR; **v)** IR; **w)** IR-{±2})*

Cuestión 9:

Determina el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{7}$ b) $f(x)=\dfrac{7}{x-3}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

a) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{3\}$

c) $\text{Dom } f=\mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-2,0\}$

Cuestión 10:

Estudia el dominio de las siguientes funciones.

a) $y=\sqrt{x+3}$ c) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$ e) $y=\sqrt{x^2+2x+9}$

b) $y=\sqrt{2x^2+3x-2}$ d) $y=\sqrt{5-2x}$ f) $y=\sqrt{6+x-x^2}$

a) $\text{Dom } f=[-3,+\infty)$

b) $2x^2+3x-2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\text{Dom } f=(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

c) $x^2-4x+4=0 \rightarrow x=2$

$\text{Dom } f=\mathbb{R}$

d) $\text{Dom } f=\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$

e) $x^2+2x+9=0 \rightarrow \Delta=-32<0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones.

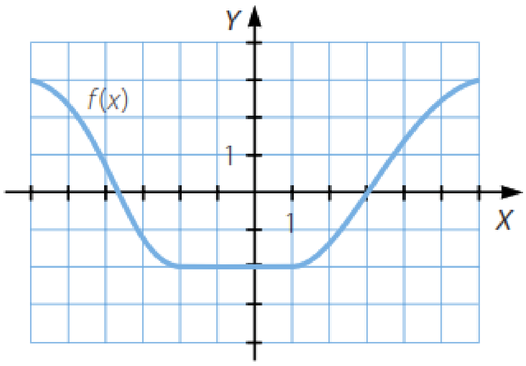
$\text{Dom } f=\mathbb{R}$

f) $6+x-x^2=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$

$\text{Dom } f=[-2,3]$

Cuestión 11:

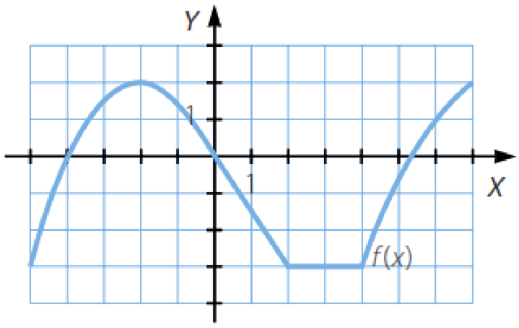
Estudia el crecimiento de la función.



La función es decreciente en $(-\infty,-2)$, es constante en $(-2,1)$ y es creciente en $(1,+\infty)$.

Cuestión 12:

¿En qué puntos de la función hay máximos relativos? ¿Y mínimos relativos? ¿Tiene máximos o mínimos absolutos?

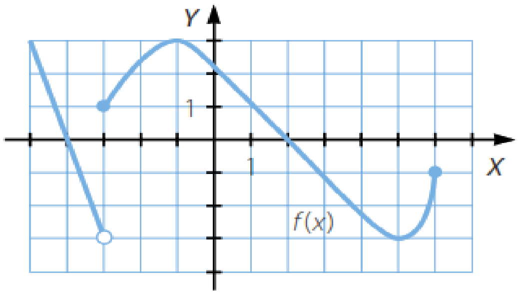


Existe un máximo relativo en el punto $x = -2$.

No tiene mínimos relativos ni absolutos y no hay máximos absolutos.

Cuestión 13:

Estudia el dominio, el recorrido, el crecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$.



Dom $f = (-\infty, 6]$

Im $f = [-3, +\infty)$

La función es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 5)$ y es creciente en $(-3, -1) \cup (5, 6)$.

Existe un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo absoluto en $x = 5$. No hay máximos absolutos.

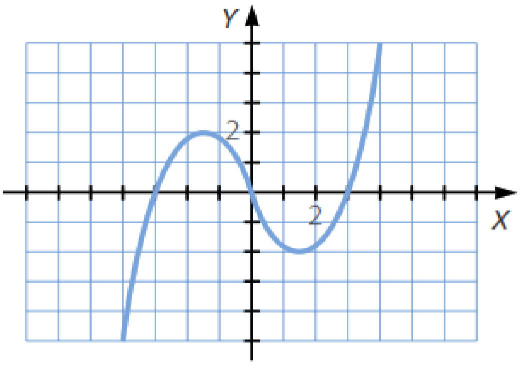
Cuestión 14:

Dibuja la gráfica de una función para que sea:

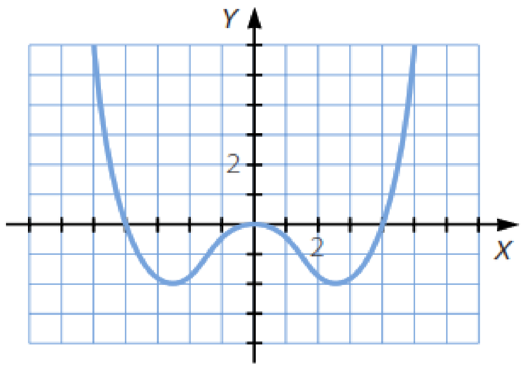
a) Impar. **b)** Par.

Respuesta abierta.

a)



b)



Cuestión 15:

Justifica si estas funciones son simétricas.

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x^2}$ b) $g(x) = \sqrt{x^3 - 3}$

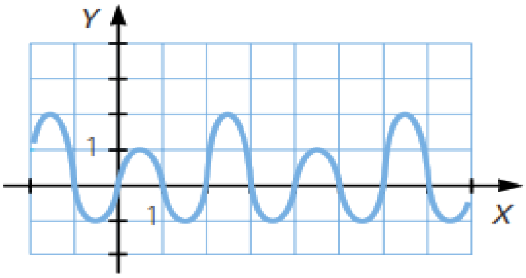
a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^4 + 2}{(-x)^2} = \dfrac{x^4 + 2}{x^2} = f(x) \rightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.

b) $g(-x) = \sqrt{(-x)^3 - 3} = \sqrt{-x^3 - 3} \rightarrow g(x)$ no es simétrica.

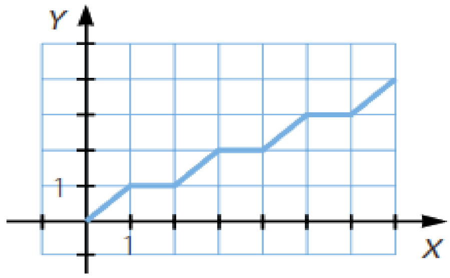
Cuestión 16:

Razona si las siguientes gráficas corresponden a funciones periódicas.

a)



b)



a) La función es periódica y su período es 4.

b) La función no es periódica, porque la gráfica no se repite.

Cuestión 17:

Determina el valor de las estas funciones en el punto $x = -5$,

si $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = \dfrac{x+3}{x}$.

a) $(f - g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f-g)(x) = x^2 - 3 - \dfrac{x+3}{x}$ $\qquad (f-g)(-5) = (-5)^2 - 3 - \dfrac{-5+3}{-5} = \dfrac{108}{5}$

b) $(f \cdot g)(x) = (x^2 - 3) \cdot \left(\dfrac{x+3}{x}\right) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 3x - 9}{x}$

$(f \cdot g)(-5) = \dfrac{(-5)^3 + 3(-5)^2 - 3(-5) - 9}{-5} = \dfrac{44}{5}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2 - 3}{\dfrac{x+3}{x}} = \dfrac{x^3 - 3x}{x+3}$ $\qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)(-5) = \dfrac{(-5)^3 - 3(-5)}{-5+3} = 55$

Cuestión 18:

Teniendo en cuenta que $f(x) = \sqrt{x^5}$ y $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$, halla el valor de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $(f \cdot g)(-4)$ b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$

a) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^5} \cdot \dfrac{x^2+3}{x+1}$

No existe $(f \cdot g)(-4)$, porque $\sqrt{(-4)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

b) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x^5}}{\dfrac{x^2+3}{x+1}} = \dfrac{(x+1)\sqrt{x^5}}{x^2+3}$

No existe $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-1)$, porque $\sqrt{(-1)^5}$ no es real por ser el radicando negativo.

Cuestión 19:

Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$:

a) Determina $g \circ f$, $f \circ g$ y $g \circ g$.

b) Halla las funciones inversas de $f(x)$ y de $g(x)$, y comprueba que $f \circ f^{-1}$ y $g^{-1} \circ g$ dan la función identidad.

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \dfrac{3x+2}{3x+3}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3 \cdot \frac{x}{x+1} + 2 = \frac{5x+2}{x+1}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1}$$

b) $y = 3x + 2 \rightarrow x = \dfrac{y-2}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x-2}{3} + 2 = x$$

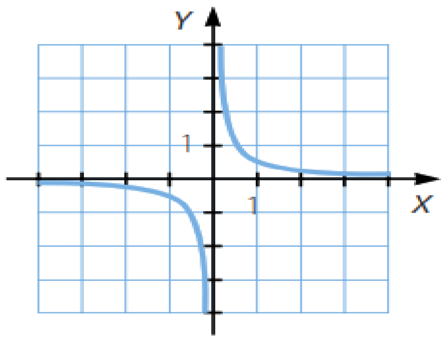
$$y = \frac{x}{x+1} \rightarrow xy + y = x \rightarrow x - xy = y \rightarrow x = \frac{y}{1-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{x}{1-x}+1} = \frac{x}{x+1-x} = x$$

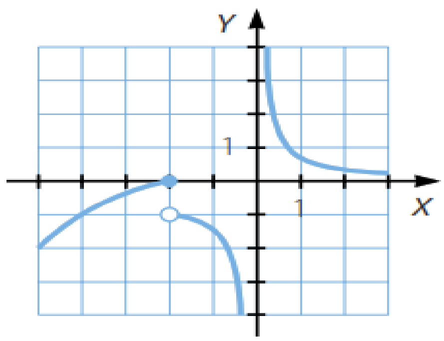
Cuestión 20:

Estudia las características de las siguientes funciones.

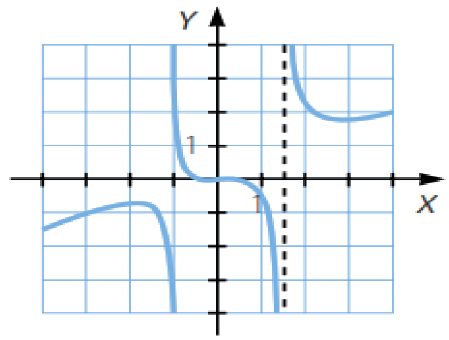
a)



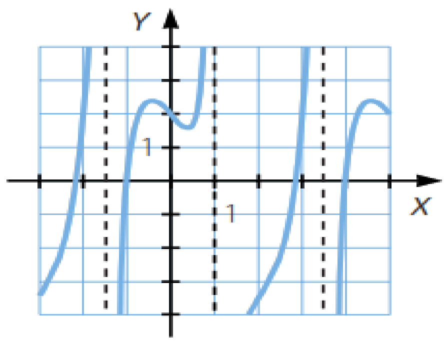
b)



c)



d)



a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ Im $f = \mathbb{R} - \{0\}$

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

No hay periodicidad.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2)$ y es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

No existen máximos ni mínimos relativos y absolutos.

Es convexa en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

La función no es simétrica ni periódica.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(-2, -1) \cup \left(-1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Existe un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Es convexa en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$ y es cóncava en $(-1, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

La función no es simétrica ni periódica.

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1{,}5;\ 1;\ 3{,}5\}$ Im $f = \mathbb{R}$

La función es creciente en $(-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; -0{,}5) \cup (0{,}5; 1) \cup (1; 3{,}5) \cup (3{,}5; 4{,}5)$ y es decreciente en $(-0{,}5; 0{,}5) \cup (4{,}5; +\infty)$.

Máximo relativo en $x = -0{,}5$ y en $x = 4{,}5$ y mínimo relativo en $x = 0{,}5$.

Es cóncava en $(-\infty; -1{,}5) \cup (0, 1) \cup (1; 3{,}5)$ y es convexa en $(-0{,}5; 0) \cup (3{,}5; 5)$.

La función no es simétrica ni periódica.

Cuestión 21:

Estudia las simetrías de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x$$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \rightarrow$ La función es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Cuestión 22:

Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = 5x - 2$

Solución:

Escribimos la función como $y = 5x - 2$ y cambiamos x por y:
$x = 5y - 2$

Ahora despejamos y:
$$x = 5y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{5}$$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$$

b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

Solución:

Escribimos la función como $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ y cambiamos x por y:

$$x = \frac{2y+3}{y-1}$$

Ahora despejamos y:
$$x = \frac{2y+3}{y-1} \Rightarrow y = \frac{x+3}{x-2}$$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

Cuestión 23:

Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^4 + x^2$

Solución:

- La simetría de una función puede ser:

b) Par o simétrica respecto al eje OY, cuando se cumple que $f(x) = f(-x)$

c) Impar o simétrica respecto al origen, cuando se cumple que $-f(x)=f(-x)$

d) No tener simetría, si no se dan ninguno de los dos casos anteriores.

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow x^4+x^2=(-x)^4+(-x)^2\Rightarrow x^4+x^2=x^4+x^2$.

Conclusión:

La simetría es par. No hace falta seguir con el estudio, ya que las funciones no pueden tener dos tipos de simetría.

b) $f(x)=x^3-x$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow x^3-x=(-x)^3-(-x)\Rightarrow x^3-x\neq -x^3+x$. Conclusión: La simetría no es par.

- Estudio de la simetría impar:

$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -x^3+x=(-x)^3-(-x)\Rightarrow -x^3+x=-x^3+x$. Conclusión: La simetría es impar.

c) $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow \dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(-x)-1}\Rightarrow \dfrac{1}{2x-1}\neq\dfrac{1}{-2x-1}$, luego la simetría no es par.

- Estudio de la simetría impar:

$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(-x)-1}\Rightarrow \dfrac{1}{-2x+1}\neq\dfrac{1}{-2x-1}$, luego la simetría no es impar.

- conclusión final: La función no tiene simetría.

Cuestión 24:

Las funciones f y g están definidas por:

$$f(x)=\frac{x-1}{3} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\sqrt{x}.$$

Explica cómo, a partir de ellas, por composición, podemos obtener:

$$p(x)=\sqrt{\frac{x-1}{3}} \qquad \text{y} \qquad q(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{3}$$

Solución:

$$p(x)=(g\circ f)(x) \qquad\qquad q(x)=(f\circ g)(x)$$

Cuestión 25:

Dadas las funciones $f(x)=2x^2-1$ y $g(x)=\sqrt{x}$, calcula :

a) $(f\circ g)(x)$

b) $(g\circ f)(x)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[\sqrt{x}\right]=2\left(\sqrt{x}\right)^2-1=2x-1$

b) $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[2x^2-1\right]=\sqrt{2x^2-1}$

Cuestión 26:

Considera las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\frac{x+1}{3} \text{ y } g(x)=x^2-1$$

Calcula:

a) $(f\circ g)(x)$

b) $(g\circ f)(x)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[x^2-1\right]=\dfrac{x^2-1+1}{3}=\dfrac{x^2}{3}$

b) $(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\dfrac{x+1}{3}\right]=\left(\dfrac{x+1}{3}\right)^2-1=\dfrac{x^2+2x+1}{9}-1=\dfrac{x^2+2x+1-9}{9}=\dfrac{x^2+2x-8}{9}$

Cuestión 27:

Las funciones f y g están definidas por $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=x+1$. Calcula :

a) $(f\circ g)(x)$

b) $(g\circ g\circ f)(x)$

Solución:

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f[x+1]=\dfrac{(x+1)^2}{3}=\dfrac{x^2+2x+1}{3}$

b) $(g\circ g\circ f)(x)=g[g[f(x)]]=g\left[g\left(\dfrac{x^2}{3}\right)\right]=g\left(\dfrac{x^2}{3}+1\right)=\dfrac{x^2}{3}+1+1=\dfrac{x^2}{3}+2$

Cuestión 28:

Sabiendo que:

$$f(x)=3x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x)=\frac{1}{x+2}$$

Explica cómo se pueden obtener por composición, a partir de ellas, las siguientes funciones:

$$p(x)=\frac{3}{(x+2)^2} \qquad q(x)=\frac{1}{3x^2+2}$$

Solución:

$$p(x)=(f\circ g)(x) \qquad q(x)=(g\circ f)(x)$$

Cuestión 29:

Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones analíticas:

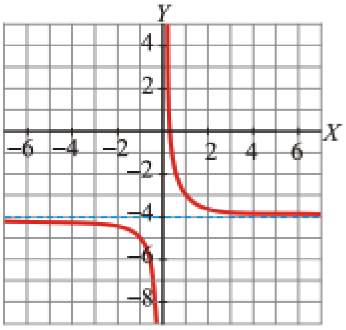
a) $y = \dfrac{1}{x+4}$

b) $y = \sqrt{x-2}$

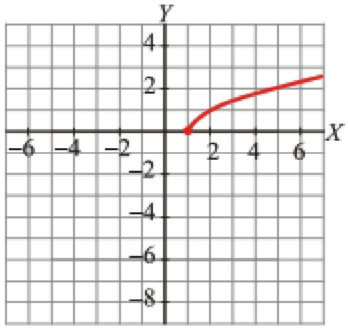
c) $y = \dfrac{1}{x} - 4$

d) $y = \sqrt{2-x}$

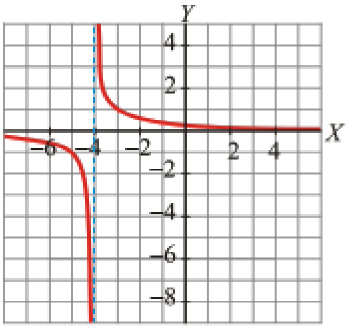
I)



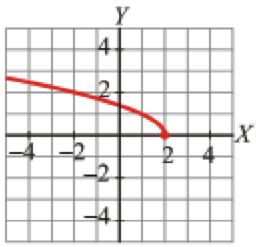
II)



III)



IV)



Solución:

a) **III**
b) **II**
c) **I**
d) **IV**

Cuestión 30:

Asocia a cada gráfica su ecuación:

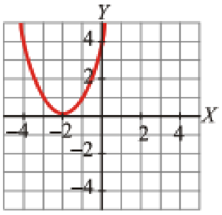
a) $y = -3x + 5$

b) $y = (x+2)^2$

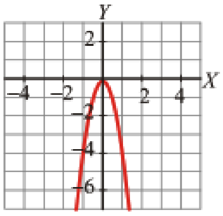
c) $y = -\dfrac{5}{3}x$

d) $y = -4x^2$

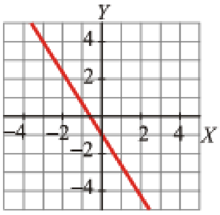
I)



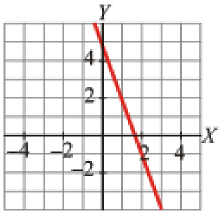
II)



III)



IV)



Solución:

a) IV
b) I
c) III
d) II

<u>Cuestión 31</u>:

Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad\qquad g(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

calcula.

a) $(f+g)(5)$ **c)** $(f \cdot g)(0)$ **e)** $(f \cdot f)(2)$ **g)** $(g-f)(3)$ **i)** $\left(\frac{g}{f}\right)(-2)$

b) $(f-g)(3)$ **d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ **f)** $(g+f)(5)$ **h)** $(f+f \cdot g)(0)$ **j)** $f^2(2)$

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{3}{x^2-1}$ $\qquad (f+g)(5) = \sqrt{7} + \dfrac{1}{8}$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \dfrac{3}{x^2-1}$ $\qquad (f-g)(3) = \sqrt{5} - \dfrac{3}{8}$

c) $(f \cdot g)(x) = \dfrac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ $\qquad (f \cdot g)(0) = -3\sqrt{2}$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{(x^2-1)\sqrt{x+2}}{3}$ $\qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)(-2) = 0$

e) $(f \cdot f)(x) = x+2$ $\qquad (f \cdot f)(2) = 4$

f) $(g+f)(x) = \dfrac{3}{x^2-1} + \sqrt{x+2}$ $\qquad (g+f)(5) = \dfrac{1}{8} + \sqrt{7}$

g) $(g-f)(x) = \dfrac{3}{x^2-1} - \sqrt{x+2}$ $\qquad (g-f)(3) = \dfrac{3}{8} - \sqrt{5}$

h) $(f+f \cdot g)(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{3\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ $\qquad (f \cdot g)(0) = -2\sqrt{2}$

i) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{3}{(x^2-1)\sqrt{x+2}}$

$\left(\dfrac{g}{f}\right)(-2)$ no es real, porque el denominador de una fracción no puede ser igual a 0.

j) $(f^2)(x) = x+2$ $\qquad (f^2)(2) = 4$

Cuestión 32:

Comprueba con las funciones $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=3x-2$ que la composición de funciones no es conmutativa. Calcula el dominio de $f\circ g$ y de $g\circ f$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(3x-2)=\sqrt{3x-1}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x+1}\right)=3\sqrt{x+1}-2$$

$(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)\rightarrow$ La composición de funciones no es conmutativa.

$$\text{Dom }(f\circ g)=\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$$

$$\text{Dom }(g\circ f)=[-1,+\infty)$$

Cuestión 33:

Calcula la función inversa de cada función.

a) $y=2x+5$

b) $y=\dfrac{3-x}{2}$

c) $y=\sqrt[3]{2x-3}$

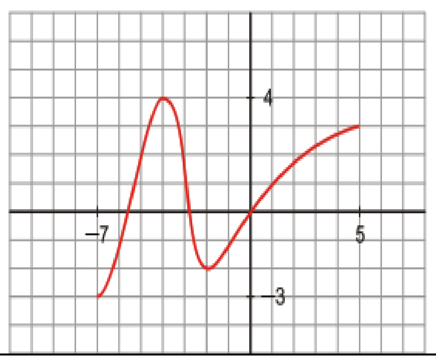
a) $y=2x+5\rightarrow x=\dfrac{y-5}{2}\rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{2}$

b) $y=\dfrac{3-x}{2}\rightarrow x=3-2y\rightarrow f^{-1}(x)=3-2x$

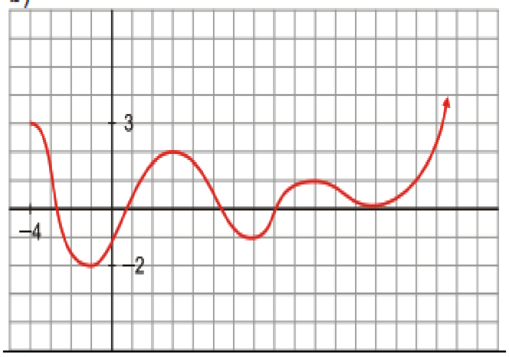
c) $y=\sqrt[3]{2x-3}\rightarrow x=\dfrac{y^3+3}{2}\rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x^3+3}{2}$

Cuestión 34:

Dada las gráficas de las siguientes funciones, estudia sus propiedades:

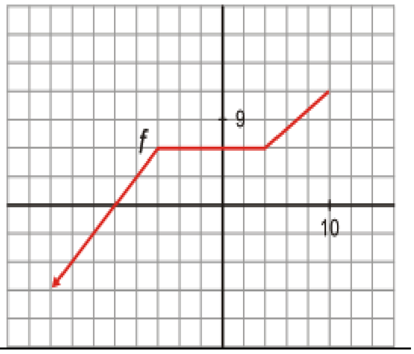
a) 	a) *Dom f* = [−7, 5] Rec f = [-3,4] Puntos de corte con los ejes: OX: (-5,5;0); (-2,8,0), (0,0) OY: (0,0) Simetría: No es simétrica Continuidad: Continua en [-7,5] Tendencia y periodicidad: No tiene Monotonía: Creciente [-7,-4) ∪ (-2,5] ; Decreciente (-4,-2) Extremos relativos: Máximo relativo (-4,4) y Mínimo relativo (-2,-2) Extremos absolutos: Máximo absoluto (-4,4) y Mínimo absoluto (-7,-3) Curvatura: Cóncava (-6,-3) ∪ (0,5] y Convexa [-7,-6) ∪ (-3,0) Puntos de Inflexión: (-6,-1), (-3,2), (0,0)

b)



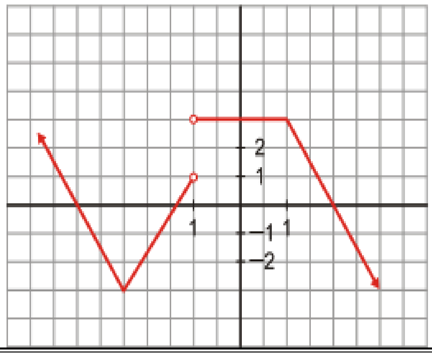
b) *Dom f* = [−4, ∞)
Rec f = [-2,∞)
Puntos de corte con los ejes: OX: (-2,7;0); (1,0), (5,5;0), (8,0), (13,0) y OY: (0;-1,2)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en [-4,∞)
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞
Monotonía: Creciente (-1,3) ∪ (7,10) ∪ (13,+∞) ; Decreciente [-4,-1) ∪ (3,7) ∪ (10,13)
Extremos relativos: Máximos relativos (3,2), (10,1) y Mínimo relativo (-1,-2), (7,-1), (13,0)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (-1,-2)
Curvatura: Cóncava [-4,-3) ∪ (0;5,2) ∪ (8,12) y Convexa (-3,0) ∪ (5,2;8) ∪ (12,+∞)
Puntos de Inflexión: (-3;1,8), (5,2;0), (8,0), (12;0,8)

c)



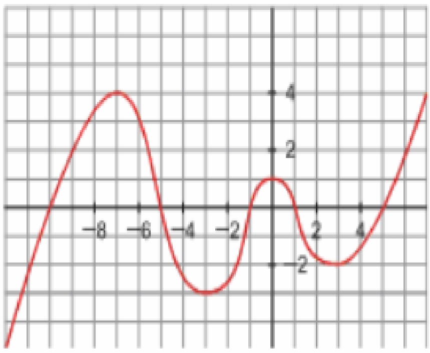
c) *Dom f* = (-∞, 10]
Rec f = (-∞,12]
Puntos de corte con los ejes: OX: (-10,0) OY: (0,6)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en (-∞,10]
Tendencia y periodicidad: Cuando x tiene a -∞, la función tiene a -∞
Monotonía: Creciente (-∞,-6) ∪ (4,10] ; Constante (-6,4)
Extremos relativos: No tiene
Extremos absolutos: Máximo absoluto (10,12) y Mínimo absoluto no tiene
Curvatura: No tiene
Puntos de Inflexión: No tiene

d)



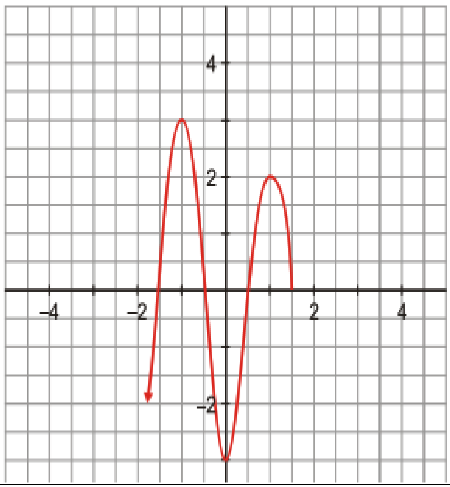
d) *Dom f* = (-∞,-1) ∪ (-1,+∞) = R – {-1}
Rec f = R
Puntos de corte con los ejes: OX: (-3,5;0), (-1,3;0), (2,0) OY: (0,3)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en R – {-1}. En x = -1 es discontinua inevitable de salto finito (Salto 2)
Tendencia y periodicidad: Cuando la x tiende a -∞ la función tiende a +∞. Cuando la x tiende a +∞, la función tiende a -∞.
Monotonía: Creciente (-2,5;-1) ; Decreciente (-∞;-2,5) ∪ (1,+∞) ; Constante (-1,1)
Extremos relativos: Máximo relativo: No tiene y Mínimo relativo (-2,5;-3)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto: No tiene
Curvatura: No tiene
Puntos de Inflexión: No tiene

e)



e) *Dom f* = R Rec f = R
Puntos de corte con los ejes: OX: (-10,0), (-5,0), (-1,0), (1,0), (5,0) y OY: (0,1)
Simetría: No es simétrica
Continuidad: Continua en R
Tendencia y periodicidad: Cuando la x tiende a -∞, la función tiende a -∞. Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞
Monotonía: Creciente (-∞,-7) ∪ (-3,0) ∪ (3,+∞) ; Decreciente (-7,-3) ∪ (0,3)
Extremos relativos: Máximos relativos (-7,4), (0,1) y Mínimos relativos (-3,-3), (3,-2)
Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto: No tiene
Curvatura: Cóncava (-∞,-5) ∪ (-1,1) y Convexa (-5,-1) ∪ (1,+∞)
Puntos de Inflexión: (-5,0), (-1,0), (1,0)

f)



f) *Dom f* = (-∞;1,5]

Rec f = (-∞,3]

Puntos de corte con los ejes: OX: (-1,5;0), (-0,5;0), (0,5;0), (1,5;0) y OY: (0,-3)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en (-∞;1,5]

Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a -∞

Monotonía: Creciente (-∞,-1) ∪ (0,1) ; Decreciente (-1,0) ∪ (1;1,5]

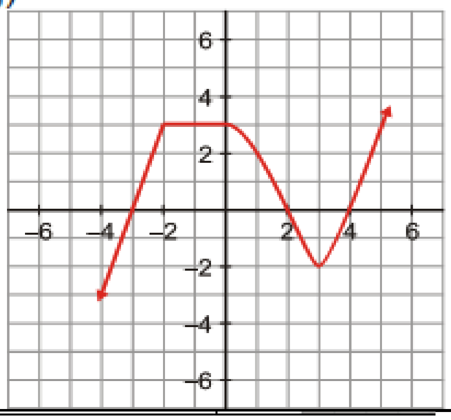
Extremos relativos: Máximos relativos (-1,3), (1,3) y Mínimo relativo (0,-3)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: (-1,3) y Mínimo absoluto: No tiene

Curvatura: Cóncava (-∞,-0,5) ∪ (0,5;1,5] y Convexa (-0,5;0,5)

Puntos de Inflexión: (-0,5;0), (0,5;0)

g)



g) *Dom f* = R

Rec f = R

Puntos de corte con los ejes: OX: (-3,0), (2,0), (4,0) y OY: (0,3)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en R

Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a -∞. Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞

Monotonía: Creciente (-∞,-2) ∪ (3,+∞) ; Constante (-2,0) ; Decreciente (0,3)

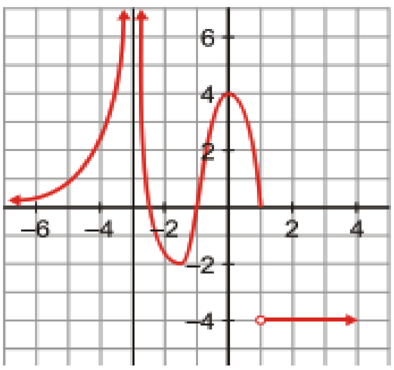
Extremos relativos: Máximos relativos: No tiene y Mínimo relativo (3,-2)

Extremos absolutos: No tiene

Curvatura: Cóncava (0,3) y Convexa (3,+∞)

Puntos de Inflexión: (3,-2)

h)



h) *Dom f* = R – {-3}

Rec f = {-4} ∪ [-2,+∞)

Puntos de corte con los ejes: OX: (-2,5;0); (-1,0), (1;0) y OY: (0,4)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en R – {-3,1}. En x = -3 es discontinua inevitable de salto finito. En x = 1 es discontinua inevitable de salto finito (salto 4)

Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a -∞, la función tiende a 0. Cuando x tiende a +∞, la función tiende a -4. Asíntotas: Asíntota vertical x = -3 (Se va al infinito). Asíntota horizontal y = 0

Monotonía: Creciente (-∞,-3) ∪ (-1,5,0) ; Constante (1,+∞) ; Decreciente (-3;-1,5) ∪ (0,1]

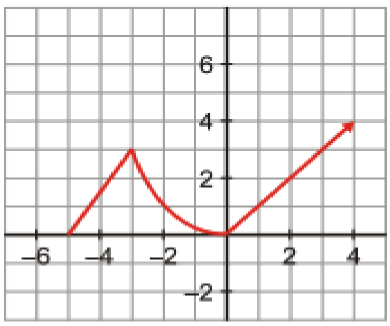
Extremos relativos: Máximos relativos (0,4) y Mínimo relativo (-1,5;-2)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto {(x,-4) / x ∈ (1,+∞)}

Curvatura: Cóncava (-1,1) y Convexa (-∞,-3) ∪ (-3,-1)

Puntos de Inflexión: (-1,0)

i)



i) *Dom f* = [–5, ∞)

Rec f = [0,∞)

Puntos de corte con los ejes: OX: (-5,0), (0,0) OY: (0,0)

Simetría: No es simétrica

Continuidad: Continua en [-5,∞)

Tendencia y periodicidad: Cuando x tiende a +∞, la función tiende a +∞

Monotonía: Creciente [-5,-3) ∪ (0,+∞) ; Decreciente (-3,0)

Extremos relativos: Máximos relativos (-3,3) y Mínimo relativo (0,0)

Extremos absolutos: Máximo absoluto: No tiene y Mínimo absoluto (-5,0), (0,0)

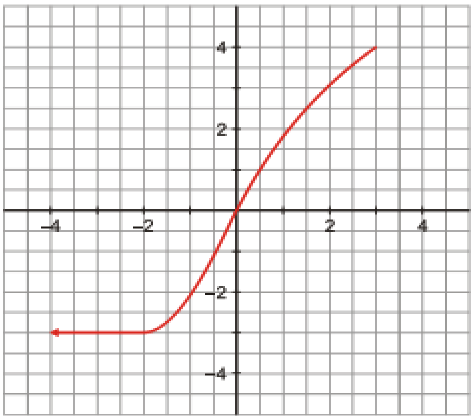
Curvatura: Convexa (-3,0)

Puntos de Inflexión: No tiene

Cuestión 35:

a) El dominio de definición son todos los valores de $x \leq 3$.
b) Es continua en su dominio.
c) Crece en el intervalo $(-2, 3)$.
d) Pasa por los puntos $(0, 0)$, $(-2, -3)$ y $(3, 4)$.
e) Es constante para todos los valores de $x \leq -2$.

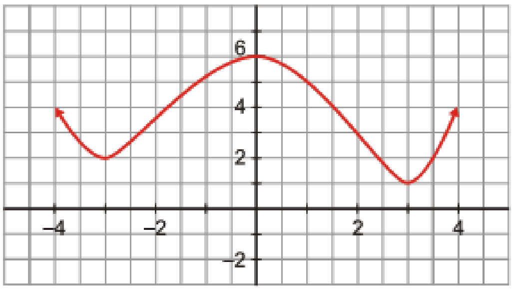
Solución:



Cuestión 36:

Representa gráficamente una función, f, que cumpla las siguientes condiciones:
a) Está definida en todo R
b) Es continua.
c) Corta al eje Y en $(0, 6)$, pero no corta al eje X.
d) Crece en $(-3, 0)$ y $(3, +\infty)$. Decrece en $(-\infty, -3)$ y $(0, 3)$.
e) Su mínimo es $(3, 1)$, y pasa por el punto $(-3, 2)$.

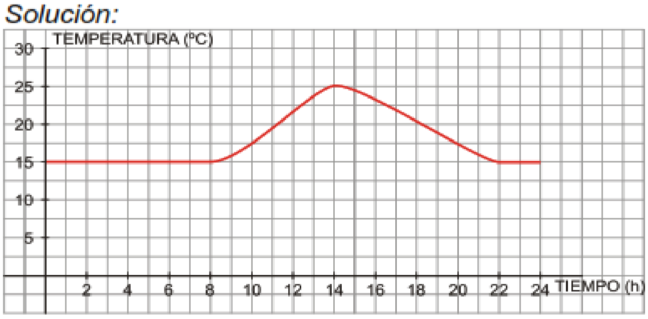
Solución:



Cuestión 37:

Construye una gráfica que se ajuste al siguiente enunciado: A las 0 horas, la temperatura de una casa es de 15 ° C y, por la acción de un aparato que controla la temperatura, permanece así hasta las 8 de la mañana. En ese momento se enciende la calefacción y la temperatura de la casa va creciendo hasta que, a las 14:00 h, alcanza la temperatura máxima de 25 ° C. Paulatinamente, la temperatura disminuye hasta el momento en que se apaga la calefacción (a las 10 de la noche) volviendo a coincidir con la que había hasta las 8:00 horas.

Solución:



Cuestión 38:

Construye una gráfica que corresponda a los ingresos anuales que obtienen unos grandes almacenes, sabiendo que: Durante los dos primeros meses del año, aumentan paulatinamente debido a las ofertas; desde marzo hasta junio los ingresos van disminuyendo alcanzando, en ese momento, el mínimo anual. En julio y agosto vuelven a crecer los ingresos, alcanzando el máximo del año en agosto. A partir de entonces se produce un decrecimiento que llega a coincidir, en diciembre, con los ingresos realizados al comienzo del año.

Solución: Esta es una posible gráfica que describe la situación anterior: