HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 8: **DETERMINANTES**

Ejercicio 1: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4+3t+0-0-0-t^2 = -t^2+3t+4$

Piden $|A|>0$ y el mayor valor que alcanza

$|A| = -t^2+3t+4$

$-t^2+3t+4 \geq 0$

$t^2-3t-4<0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 4 \quad +$

$\boxed{|A| = -t^2+3t+4}$

$t^2-3t-4=0$

$t = \dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot(1)} = \dfrac{3\pm 5}{2} = \begin{cases} t=4 \\ t=-1 \end{cases}$

$|A|>0$ si $t\in(-1,4)$

$|A|\geq 0$ si $t\in[-1,4]$

El mayor valor se alcanza si $t=\dfrac{-b}{2a}$

$t=\dfrac{-3}{2\cdot(-1)}$ $\quad t=\dfrac{3}{2}$

Ejercicio 2: Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz inversa de A.
b) Calcula A^{127} y A^{128}.
c) Determina x y y tal que $A\cdot B = B\cdot A$.

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) A^{-1} $\quad |A| = 0+0+0-1-0-0 = -1$ $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b) A^{127}, A^{128}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = I$$

$$A^{127} = A^{2\cdot 63} \cdot A = (A^2)^{63} \cdot A = I \cdot A = A$$

$$A^{128} = A^{2\cdot 64} = (A^2)^{64} = (I)^{64} = I$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A^{127} = A \\ A^{128} = I \end{array}}$$

c) Buscar x, y tal que $A \cdot B = B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

Si deben ser iguales $y = 1$, $x = 0$

$$\boxed{AB = BA \iff x = 0,\ y = 1}$$

Ejercicio 3: Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la inversa de A^2 para $a = 0$.

a) Debe ser $|3A| \neq 0$ $\quad |3A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot |A| \quad |A| = -a^2 - 1$

$$|3A| = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3a \\ 3a & 0 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3a \\ 3a & 0 & -3 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 27a^2 - 0 - 0 - 27$$

Debe ser $-27a^2 - 27 \neq 0$

Si resolvemos $-27a^2 - 27 = 0$; $27a^2 + 27 = 0$

$a^2 = -1$; $a = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

Nunca se anula,

$3A$ tiene inversa $\forall a \in \mathbb{R}$

b) Si $a = 0$, entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 0 + 0 + 0 - 0 - 1 - 0$

$|A| = -1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t$$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = +1$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4: Determina la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = X - B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Como tenemos $A \cdot X = X - B \Rightarrow A \cdot X - X = -B \Rightarrow (A - I) \cdot X = -B \Rightarrow (A - I)^{-1} \cdot (A - I) \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot (-B) \Rightarrow$ $X = (A - I)^{-1} \cdot (-B)$

Vamos pues a calcular la inversa de $(A - I)$. Tenemos que $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Y como sabemos $(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \cdot adj\left((A - I)^t\right)$, pasamos a calcular:

$|A - I| = -1 + 0 + 0 - (1 + 0 + 0) = -2 \qquad (A - I)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad adj\left((A - I)^t\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego, $(A - I)^{-1} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$. Ya podemos calcular $X = (A - I)^{-1} \cdot (-B)$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5: Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas usado.

5

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} \underset{①}{=} \begin{vmatrix} k & x & 1 \\ 2k & y & 2 \\ 3k & z & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & x & ax \\ 2k & y & ay \\ 3k & z & az \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot \underset{②}{\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & y & 2 \\ 3 & z & 3 \end{vmatrix}} + k \cdot a \underset{②}{\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 3 & z & z \end{vmatrix}} \underset{③}{=} k \cdot 0 + k \cdot a \cdot 0 = 0$$

① Columna con suma se separa en suma de dos det.
② Toda una columna multiplicada por un nº real, sale fuera y multiplica al determinante.
③ Dos columnas iguales, determinante nulo.

Ejercicio 6: Sea $A = \begin{pmatrix} senx & -\cos x & 0 \\ \cos x & senx & 0 \\ senx + \cos x & senx - \cos x & 1 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

6

$$A = \begin{pmatrix} senx & -\cos x & 0 \\ \cos x & senx & 0 \\ senx + \cos x & senx - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

Existe $A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = sen^2 x + 0 + 0 - 0 - 0 + \cos^2 x = sen^2 x + \cos^2 x = 1$

$|A| = 1$ por tanto siempre existe A^{-1}

$A_{11} = + \begin{vmatrix} senx & 0 \\ senx - \cos x & 1 \end{vmatrix} = senx$ $\qquad$ $A_{21} = - \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ senx - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \cos x$

$A_{12} = - \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ senx + \cos x & 1 \end{vmatrix} = -\cos x$ $\qquad$ $A_{22} = + \begin{vmatrix} senx & 0 \\ senx + \cos x & 1 \end{vmatrix} = senx$

$A_{13} = + \begin{vmatrix} \cos x & senx \\ senx + \cos x & senx - \cos x \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $A_{23} = - \begin{vmatrix} senx & -\cos x \\ senx + \cos x & senx - \cos x \end{vmatrix} = -1$

$= \cos x \cdot \cancel{senx} - \cos^2 x - sen^2 x - \cancel{senx \cos x} = -1$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 7: Determina la matriz X tal que $A\cdot X - 3\cdot B = \theta$, siendo:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

7

$$AX - 3B = \theta$$
$$AX = \theta + 3B$$
$$AX = 3B$$
$$X = A^{-1}\cdot 3B$$
$$\boxed{X = 3\cdot A^{-1}\cdot B}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -6 + 0 - 2 - 0 + 7 - 0 = -1$$
$$|A| = -1$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\cdot 3B$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 8: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula el determinante de las matrices $2A$, A^{31} y $\left(A^{31}\right)^{-1}$

b) Halla la matriz A^{-1}

Calculamos primero $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(0+0-2)-(-2+0+1)=-1$

a) $|2A|=2^3\cdot|A|=8\cdot(-1)=-8$

$\left|A^{31}\right|=|A|^{31}=(-1)^{31}=-1$

$\left|\left(A^{31}\right)^{-1}\right|=\left|\left(A^{-1}\right)^{31}\right|=\left|A^{-1}\right|^{31}=\left(\frac{1}{|A|}\right)^{31}=\left(\frac{1}{-1}\right)^{31}=-1$

b) Aplicamos la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right)$ o bien $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\left(A\right)\right)^t$

Usemos esta segunda expresión: $adj\left(A\right)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\left(\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 9: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 1\end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores del parámetro λ, la matriz A no tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda=-2$.

a) Calculamos el determinante de la matriz A, y cuando se anule, no tendrá inversa.

$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda & 1\end{vmatrix}=(1+0+\lambda^2)-(0+\lambda^2+\lambda^2)=1-\lambda^2$. Vemos cuando se anula: $1-\lambda^2=0\Rightarrow\lambda=\pm1$

Luego A no tiene inversa si $\lambda=\pm1$

b) Para $\lambda=-2$, la matriz si tiene inversa, como hemos visto en el apartado anterior.

Aplicamos que $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right)$. Ya tenemos que $|A|=1-(-2)^2=-3$

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ pues es una matriz simétrica. Y ahora $adj(A^t)=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$

Por tanto, $A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & 0\\ \frac{-4}{3} & \frac{-2}{3} & 1\end{pmatrix}$

Ejercicio 10: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & -1\\ 1 & \alpha & -1\\ -1 & -1 & \alpha\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.
b) Para $\alpha=2$, resuelve la ecuación matricial $AX=B$.

b) Calcular el rango de A dependiendo de los valores de α: $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & -1\\ 1 & \alpha & -1\\ -1 & -1 & \alpha\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1 & -1\\ 1 & \alpha & -1\\ -1 & -1 & \alpha\end{vmatrix} = \alpha^3+1+1-\alpha-\alpha-\alpha = \alpha^3-3\alpha+2$$

$$\alpha^3-3\alpha+2=0 \iff (\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha+2)=0 \quad \alpha=-2 \quad \alpha=1$$

- Rango(A) = 3 $\iff \alpha\neq 2$ y $\alpha\neq 1$
- Si $\alpha=1$ $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad$ rango(A) = 1 porque los menores de orden 2 todos son nulos. $F_1=F_2=-F_3$
- Si $\alpha=-2$ $\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$ $\quad$ rango(A) = 2 porque $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=3\neq 0$

b) Si $\alpha=2$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Resuelve:

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$$
$$I\cdot X = A^{-1}\cdot B \; ; \quad X=A^{-1}\cdot B$$

Calculemos A^{-1}

$$|A| = 8+1+1-2-2-2 = 2$$

$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$ $\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1$ $\qquad A_{31}=+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1$ $\qquad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3$ $\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1$

$A_{13}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1$ $\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1$ $\qquad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix} \; ; \quad X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}3/2 & -1/2 & 1/2\\ -1/2 & 3/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 3/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 11: Sean A y B dos matrices que verifican:

$A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}$

a) Halla las matrices $(A+B)\cdot(A-B)$ y A^2-B^2.

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$

a) $(A+B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 20\\4 & 16\end{pmatrix}$

La igualdad $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ no se cumple entre matrices, luego hemos de calcular las matrices A y B, resolviendo el sistema $\left\{\begin{array}{l} A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right. \Rightarrow (E_2=E_2+E_1)\left\{\begin{array}{r} A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\\ 2A=\begin{pmatrix}6 & 6\\2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right.$

Calculamos ahora la matriz B. Como $A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}$

Por último, $A^2-B^2=\begin{pmatrix}3 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}12 & 15\\5 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 16\\3 & 9\end{pmatrix}$

b) Resolvamos

$$XA-XB-(A+B)^t=2I\Rightarrow X\cdot(A-B)=2I+(A+B)^t\Rightarrow X\cdot(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=\left(2I+(A+B)^t\right)\cdot(A-B)^{-1}\Rightarrow$$

$$X=\left(2I+(A+B)^t\right)(A-B)^{-1}$$

Calculamos: $2I+(A+B)^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$

$(A-B)^{-1}=\dfrac{1}{|A-B|}\cdot adj\left((A-B)^t\right)$: Primero el determinante $|A-B|=\begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & 2\end{vmatrix}=8$

$(A-B)^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left((A-B)^t\right)=\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 2\end{pmatrix}$. Luego, $(A-B)^{-1}=\dfrac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 2\end{pmatrix}$

Ya finalizamos, $X=\dfrac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}15 & -18\\8 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{15}{8} & \frac{-9}{4}\\1 & 0\end{pmatrix}}$

Ejercicio 12: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A-2I$ tiene inversa.

b) Para $\lambda=-2$, resuelve la ecuación matricial $AX=2X+I$.

12 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determine λ para que $A-2I$ tenga inversa

b) Si $\lambda=-2$, resuelve $AX=2X+I$

a)

$$A-2I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2I| = \lambda-2+0+0-\lambda^2(\lambda-2)-0-0=$$

$$=\lambda-2-\lambda^3+2\lambda^2 = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=$$

$$-\lambda^3+2\lambda+\lambda-2$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)\cdot(-\lambda+2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & -2 & \\ \hline & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$|A-2I|=0 \iff \lambda=1,\ \lambda=-1,\ \lambda=2$$

Para que tenga inversa debe ser $\lambda\neq 1$, $\lambda\neq 2$, $\lambda\neq -1$

b) Si $\lambda=-2$ es $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ resolver $AX=2X+I$

$$AX=2X+I$$

$$AX-2X=I\ ; \quad (A-2I)X=I$$

$$\boxed{X=(A-2I)^{-1}\cdot I}$$

$$A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2I| = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = \quad (\text{Si } \lambda=-2)$$

$$=+8+2\cdot 4-2-2=12$$

$A_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -8$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -15 \quad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = +15$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = -4$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ -15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = (A-2I)^{-1} \cdot I = \begin{pmatrix} -4/12 & 0 & -8/12 \\ -15/12 & -3 & 15/12 \\ -8/12 & 0 & -4/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ -15/12 & -3 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \frac{1}{2}$ y $|B| = -2$, halla:

a) $|A^3|$ b) $|A^{-1}|$ c) $|-2A|$ d) $|A \cdot B^t|$ e) El rango de B

a) $|A^3| = \frac{1}{8}$ b) $|A^{-1}| = 2$ c) $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = -4$ d)

$|A \cdot B^t| = |A| \cdot |B^t| = |A| \cdot |B| = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$

e) Como la matriz B es cuadrada y de orden 3, y además $|B| = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(B) = 3$

Ejercicio 14: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica $A^3 = I$.
b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.
c) Calcula razonadamente A^{100}.

14 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 14 = 20 de matrices.

a) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = A^2$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = -I$

b) $|A| = 0 + 15 + 12 - 16 - 0 - 12 = -1$

$A^{-1} = -A^2$ (Ya lo sabemos porque $A^3 = A^2 \cdot A = -I$

$-A^2 \cdot A = I$

$A^{-1} = -A^2$

c) $A^{100} = (A^3)^{33} \cdot A =$

$= (-I)^{33} \cdot A = (-1)^{33} \cdot I^{33} \cdot A =$

$= -1 \cdot I \cdot A = -A.$

Ejercicio 15: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$

a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X-B=BA$.

(15) $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ $B=$ tal que $AB=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$

a) Comprueba que A y B poseen inversas

$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3+10=13\neq 0 \quad \exists A^{-1}$

$|B|=?$ $\quad |A\cdot B|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{vmatrix}=-6-7=-13\neq 0$

$|A|\cdot|B|=13\cdot|B| \Rightarrow |B|=\frac{-13}{13}$

$|B|=-1\neq 0$

$\exists B^{-1}$

b) Resuelve la ecuación: $A^{-1}\cdot X-B=B\cdot A$

$A^{-1}\cdot X-B=B\cdot A$

$A^{-1}\cdot X=BA+B$

$X=A(BA+B)$

$X=\underbrace{A\cdot B}A+\underbrace{A\cdot B}$

$X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$

$X=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 36 & -11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{pmatrix}$

$\boxed{X=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 43 & -8\end{pmatrix}}$

Ejercicio 16: De la matriz $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, se sabe que $\det(A)=4$.

a) Halla $\det(-3A^t)$ y $\det\begin{pmatrix}2b & 2a\\ -3d & -3c\end{pmatrix}$

b) Calcula $\det(A^{-1}\cdot A^t)$.

c) Si B es una matriz cuadrada tal que $B^3=I$, halla $\det(B)$.

(16) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ $|A|=4$

a) $\det(-3A)=(-3)^2\cdot\det A=9\cdot 4=36$

$\det\begin{pmatrix}2b & 2a\\ -3d & -3c\end{pmatrix}=2\cdot(-3)\cdot\det\begin{pmatrix}b & a\\ d & c\end{pmatrix}=2\cdot(-3)\cdot(-4)=$
$C_1\leftrightarrow C_2$
$=24$

b) $\det(A^{-1}\cdot A^t) = \det(A^{-1})\cdot \det(A^t) = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \det(A) = 1$

c) Si B es tal que $B^3 = I$, halle $\det(B)$

$|B^3| = |I|$; $|B^3| = 1$; $|B\cdot B\cdot B| = 1$; $|B|^3 = 1$

$|B| = \sqrt[3]{1}$; $|B| = 1$

Ejercicio 17: Sean F_1, F_2 y F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz B de orden 3, cuyo determinante vale -2. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de B^{-1}.
b) El determinante de $\left(B^t\right)^4$.
c) El determinante de $2B$.
d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas filas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $5F_1 - F_3, 3F_3$ y F_2

17) $\det(F_1, F_2, F_3) = \det(B) = -2$

a) $\det(B^{-1}) = \dfrac{1}{\det B} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\det(B^t)^4 = \det(B)^4 = (\det(B))^4 = (-2)^4 = 16$

c) $\det(2B) = 2^3\cdot \det(B) = 8\cdot(-2) = -16$

d) $\det(5F_1 - F_3, 3F_3, F_2) = \det(5F_1, 3F_3, F_2) +$
$+ \det(-F_3, 3F_3, F_2) =$
$= 5\cdot 3\cdot \det(F_1, F_3, F_2) - 3\det(F_3, F_3, F_2) =$
$= 5\cdot 3\cdot(+2) - 0 =$
$= 30$

Ejercicio 18: Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = A - k\cdot I$, donde k es una constante e I la matriz identidad de orden 2.

a) Determina los valores de k para los que B no tiene inversa.
b) Calcula B^{-1} para $k = -1$.
c) Determina las constantes α y β para los que se cumple $A^2 + \alpha A = \beta I$.

(18) Sea $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=A-KI$, $K\in\mathbb{R}$

a) Determine K para que B no tenga inversa

$$B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K & 0\\ 0 & K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-K & 1\\ 2 & -1-K\end{pmatrix}$$

$$|B|=(-3-K)(-1-K)-2=3+3K+K+K^2-2=$$
$$=K^2+4K+1$$

$$|B|=0 \iff K^2+4K+1=0 \;;\; K=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}$$

$$K=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

B tiene inversa cuando $K\neq-2+\sqrt{3}$
y $K\neq-2-\sqrt{3}$

b) Si $K=-1$, halla B^{-1}

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix} \qquad |B|=-2 \qquad \begin{matrix}A_{11}=0 & A_{21}=-1\\ A_{12}=-2 & A_{22}=-2\end{matrix}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & -2\end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

c) Determine α y β para que se cumple que $A^2+\alpha A=\beta I$

$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}11 & -4\\ -8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\alpha & \alpha\\ 2\alpha & -\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}11-3\alpha & -4+\alpha\\ -8+2\alpha & 3-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix}11-3\alpha=\beta\\ 3-\alpha=\beta\end{matrix}\right\} \rightarrow \beta=-1$$

$$\left.\begin{matrix}-4+\alpha=0\\ -8+2\alpha=0\end{matrix}\right\} \quad \alpha=4$$

Ejercicio 19: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&k\\k&1&3\\1&7&k\end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro k.
b) Para $k=0$, halla la matriz inversa de A.

a) Calculamos $|A|=\begin{vmatrix}1&3&k\\k&1&3\\1&7&k\end{vmatrix}=k+9+7k^2-(k+21+3k^2)=4k^2-12$.

Veamos cuando se anula $4k^2-12=0\Rightarrow k=\pm\sqrt{3}$ y a partir de este datos estudiamos diferentes casos:

Caso 1: $k\neq\pm\sqrt{3}\Rightarrow|A|\neq 0$, y como $|A|$ es el mayor menor que se puede tomar, por tanto, $rang(A)=3$

Caso 2: $k=\sqrt{3}\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rang(A)$ no puede ser $3\Rightarrow rang(A)\leq 2$

Sustituimos en la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1&3\\1&7&\sqrt{3}\end{pmatrix}$ y tomamos un menor de orden 2:

$\begin{vmatrix}1&3\\\sqrt{3}&1\end{vmatrix}=1-3\sqrt{3}\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$

Caso 3: Análogamente al caso anterior $k=-\sqrt{3}\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rang(A)$ no puede ser $3\Rightarrow rang(A)\leq 2$

Sustituimos en la matriz $A=\begin{pmatrix}1&3&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1&3\\1&7&-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ y tomamos un menor de orden 2:

$\begin{vmatrix}1&3\\-\sqrt{3}&1\end{vmatrix}=1+3\sqrt{3}\neq 0\Rightarrow rang(A)=2$

b) Para $k=0\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&3\\1&7&0\end{pmatrix}$ y $|A|=4\cdot 0^2-12=-12$ aplicando la fórmula del apartado a)

Calculamos la adjunta de $A: adj(A)=\begin{pmatrix}-21&3&-1\\0&0&-4\\9&-3&1\end{pmatrix}$ Y ahora ya aplicamos la inversa:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\left(A\right)\right)^t=\frac{-1}{12}\cdot\begin{pmatrix}-21&0&9\\3&0&-3\\-1&-4&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{4}&0&\frac{-3}{4}\\\frac{-1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{12}&\frac{1}{3}&\frac{-1}{12}\end{pmatrix}$$

Ejercicio 20: Sabiendo que $|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=2$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$.

b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

20) $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$

a) $|3 \cdot A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot 2 = 54$; $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$

b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = -4$

c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{vmatrix} = 0 + (-1) \cdot |A| =$

$= 0 - 2 = -2$