HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 9: **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

Ejercicio 1:

a) Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x & & +z & = & 2 \\ -x & +y & +2z & = & 0 \\ -x & +2y & +5z & = & 2 \end{cases}$

b) Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado a)

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 1 \\ -x & +y & +3z & = & 1 \\ x & +2y & +\lambda z & = & -3 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{array}{l} x + z = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 2 \end{array}\right\}$ Por Gauss

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2+E_1 \\ E_3+E_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3-2E_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

S.C.I. (∞ soluciones)

$z = \lambda$

$y + 3z = 2$

$y = 2 - 3\lambda$

$x + z = 2$

$x = 2 - \lambda$

Soluciones: $\boxed{\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 2-3\lambda \\ z = \lambda \end{array} , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}}$

Ejercicio 2: Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} -\lambda x & +y & +z & = & 1 \\ x & +\lambda y & +z & = & 2 \\ \lambda x & +y & +z & = & 1 \end{cases}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Consideremos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Dado que es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, vamos a estudiarlo en función del rango de A

$|A| = -\lambda^2 + \lambda + 1 - (\lambda^2 - \lambda + 1) = -2\lambda^2 + 2\lambda$. Vemos dónde se anula: $-2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow -2\lambda \cdot (\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

Vamos a tener 3 casos:

CASO 1: $\lambda \neq 0,1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A)=3$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ es una submatriz de la matriz ampliada, } A^*, \\ \qquad \Rightarrow rang(A^*) \geq 3 \\ A^* \text{ es de dimensión 3x4} \Rightarrow rang(A^*) \leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow rang(A^*) \leq 3$$

Por tanto, tenemos que $rang(A)=rang(A^*)=3=\text{nº de incógnitas} \Rightarrow$ Por el teorema de Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un sistema compatible determinado (S.C.D.) para $\lambda \neq 0,1$

CASO 2: $\lambda = 0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rang(A) \leq 2$

Sustituimos en el sistema el valor $\lambda = 0$ para ver como queda $\Rightarrow \begin{cases} \quad y + z = 1 \\ x \quad + z = 2 \\ \quad +y + z = 1 \end{cases}$

Podemos observar que tiene dos ecuaciones iguales, $E_1 = E_3$, con lo cual podemos suprimir una de ellas, por ejemplo E_3, y el sistema queda así: $\Rightarrow \begin{cases} \quad y + z = 1 \\ x \quad + z = 2 \end{cases}$ y las matrices asociadas nos quedan así:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ que obviamente tienen rango 2, pues sus filas no son proporcionales, o bien, tomando el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Por tanto, tenemos que $rang(A)=rang(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3 \Rightarrow$ Por el teorema de Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un sistema compatible indeterminado (S.C.I.) para $\lambda = 0$

CASO 3: $\lambda = 1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rang(A) \leq 2$

Sustituimos en el sistema el valor $\lambda = 1$ para ver cómo queda $\Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, el cual se observa fácilmente que las ecuaciones E_2 y E_3 son incompatibles, luego se trata de un sistema incompatible (S.I.)

NOTA: Por rangos también podemos ver que se trata de un sistema incompatible.

Tenemos que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que como el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rang(A)=2$

Por otro lado, $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene dos columnas iguales, $C_2 = C_3$, y por tanto sólo podemos tomar un menor de orden 3, $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rang(A^*)=3$

Así, $rang(A)=2 \neq rang(A^*)=3 \Rightarrow$ Por el teorema de Rouché-Frobenius, tenemos que se trata de un sistema incompatible (S.I.).

b) Resolvemos para $\lambda = 0$ que sabemos que es un S.C.I. $\Rightarrow \begin{cases} \quad y + z = 1 \\ x \quad + z = 2 \end{cases}$

Parametrizamos una de las incógnitas, siempre eligiendo de manera conveniente, en este caso $z = \rho$

Nos queda: $\Rightarrow \begin{cases} y = 1-\rho \\ x = 2-\rho \end{cases}$

Las infinitas soluciones son: $\begin{cases} x = 2-\rho \\ y = 1-\rho \quad \text{con } \rho \in \mathbb{R} \\ z = \rho \end{cases}$

Ejercicio 3: Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x & +(k+1)y & +2z & = & -1 \\ kx & +y & +z & = & 2 \\ x & -2y & -z & = & k+1 \end{cases}$

a) Clasifícalo según los valores de k .

b) Resuélvelo para el caso $k = 2$.

3 a) $\left.\begin{aligned} x + (k+1)y + 2z &= -1 \\ kx + y + z &= 2 \\ x - 2y - z &= k+1 \end{aligned}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & k+1 \end{pmatrix}$

$|A| = -1 + k+1 - 4k - 2 + 2 + k(k+1) = -1 + k + 1 - 4k - 2 + 2 + k^2 + k =$

$= k^2 - 2k$

$|A| = 0 \iff k^2 - 2k = 0$

$k(k-2) = 0 \rightarrow k = 0, \; k = 2$

- Si $k \neq 0$, $k \neq 2 \Rightarrow$ rango$(A) =$ rango$(A^*) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.C.D. (solución única)

- Si $k = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A) = 2$ pq $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ $C_1 C_2$ $(C_3 = C_1 + C_2)$

rango $A^* = 3$

$\det(C_1, C_2, C_4) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1 - 2 + 0 + 1 + 4 - 0 =$

$= 3 \neq 0$

Si $k = 0 \Rightarrow$ rango$(A) = 2 \neq$ rango(A^*)

$\Rightarrow$ S.I. (sin solución).

• Si $K=2$: $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\2&1&1&2\\1&-2&-1&3\end{pmatrix}$

$|A|=0$

rango$(A)=2$

$\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=1-6=-5\neq 0$

$C_1\ C_2$

$\det(C_1,C_2,C_4)=\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&1&2\\1&-2&3\end{vmatrix}=$

$=3+6+4+1+4-18=$

$=18-18=0$

rango$(A^*)=2$

Si $K=2 \Rightarrow$ rango$(A)=2=$ rango$(A^*)<$ nº incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S.C.I. (infinitas soluciones)

b) Resolver si $K=2$

$$\left.\begin{aligned}x+3y+2z&=-1\\2x+y+z&=2\\x-2y-z&=3\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&-1\\2&1&1&2\\1&-2&-1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}E_1\\E_2-2E_1\\E_3-E_1\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&2&-1\\0&-5&-3&4\\0&-5&-3&4\end{pmatrix}_{E_3+E_2}\quad \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&3&2&-1\\0&-5&-3&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\longrightarrow \text{S.C.I. } (\infty \text{ soluciones})$$

$z=\lambda$ $\quad -5y-3z=4$

$-5y=4+3z$; $\quad y=\dfrac{4+3\lambda}{-5}$

$x+3y+2z=-1$

$x=-1-3y-2z$; $\quad x=-1+\dfrac{12+9\lambda}{5}-2\lambda$

$x=\dfrac{-5+12+9\lambda-10\lambda}{5}$

$x=\dfrac{7-\lambda}{5}$ $\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned}z&=\lambda\\y&=\frac{4+3\lambda}{-5}\\x&=\frac{7-\lambda}{5},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\end{aligned}}$$

Ejercicio 4: Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} kx & +2y & = & 2 \\ 2x & +ky & = & k \\ x & -y & = & -1 \end{cases}$

a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
c) Halla las soluciones de cada caso.

a) $A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A' = \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad |A'| = -k^2 + 2k - 4 - 2k + k^2 + 4 =$
$= 0$

$k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k = +2$
$-2 - k = 0 \quad\quad k = -2$

Así que nunca es rango $A' = 3$

b) • Si $k = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ rango$(A) = 2 =$ rango $A' =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D

• Si $k = -2$ $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ rango$(A) = 1$ $\quad (F_2 = -F_1 = 2F_3)$

$A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ rango$(A') = 1$ pq $F_2 = -F_1 = 2F_3$

Así que rango$(A) =$ rango$(A') = 1 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I. (∞ soluciones)

c) Resuelve el sistema:

Si $k = 2$ $\quad \left.\begin{matrix} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\}$ $\quad \left.\begin{matrix} 2x + 2y = 2 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\}$ $\quad \left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\}$
$2x = 0; \; x = 0$
$y = +1 + x \quad y = 1$

Si $k = -2$ $\quad \left.\begin{matrix} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = -2 \\ x - y = -1 \end{matrix}\right\} \longrightarrow x - y = -1$ $\quad y = \lambda$
$x = -1 + y$
$x = -1 + \lambda$

$\boxed{\begin{matrix} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}}$

Ejercicio 5: Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x & +y & +z & = & \lambda+1 \\ & 3y & +2z & = & 2\lambda+3 \\ 3x & +(\lambda-1)y & +z & = & \lambda \end{cases}$

a) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.
c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$?

a) Sustituimos en el sistema $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ & 3y & +2z & = & 5 \\ 3x & & +z & = & 1 \end{cases} \Rightarrow$ (lo resolvemos por Gauss) $E_3 - 3E_1$

$\Rightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ & 3y & +2z & = & 5 \\ & -3y & -2z & = & -5 \end{cases} \Rightarrow$ Como $E_3 = -E_2$, suprimimos E_3 (es evidente que se trata de un S.C.I.)

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ 3y+2z=5 \end{cases}$. Hacemos $z = t \Rightarrow \begin{cases} x+y=2-t \\ 3y=5-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2-t \\ y=\frac{5-2t}{3} \end{cases}$ Calculamos x en la E_1

$\Rightarrow x + \frac{5-2t}{3} = 2-t \Rightarrow x = 2-t-\frac{5-2t}{3} \Rightarrow x = \frac{1-t}{3}$. Las soluciones son: $\boxed{\begin{cases} x = \frac{1-t}{3} \\ y = \frac{5-2t}{3} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$

b) Para que el sistema tenga una única solución debe verificarse el teorema de Rouché-Frobenius. En este caso, $rang(A) = rang(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$. Para que este ocurra basta con que $|A| \neq 0$, pues es el mayor menor de orden 3 que hay. Calculamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = 3+6-(9+2\cdot(\lambda-1)) = -2\cdot(\lambda-1)$$

Se anula cuando:

$-2\cdot(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$. Así, $|A| \neq 0$ para $\lambda \neq 1 \Rightarrow rang(A) = 3 = rang(A^*) = n^o\ \textit{incógnitas}$

Por tanto, $\forall \lambda \neq 1$ tenemos que es un S.C.D. por el teorema de Rouché-Frobenius.

c) Sustituimos la solución $\left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ en el sistema y calculamos λ:

$\begin{cases} \frac{-1}{2} & +0 & +\frac{1}{2} & = & \lambda+1 \\ & 0 & +2\cdot\frac{1}{2} & = & 2\lambda+3 \\ 3\cdot\frac{-1}{2} & +(\lambda-1)\cdot 0 & +\frac{1}{2} & = & \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda+1 \Rightarrow \lambda = -1 \\ 1 = 2\lambda+3 \Rightarrow \lambda = -1 \\ \frac{-3}{2}+\frac{1}{2} = \lambda \Rightarrow \lambda = -1 \end{cases}$, como en las 3 ecuaciones ha salido el mismo valor de λ, ese es el valor que se nos pregunta: $\boxed{\lambda = -1}$

Ejercicio 6: Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50%, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante hubiera pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

6 a) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{array}\right\}$

x = precio libro
y = " calculadora
z = " estuche

$\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}$ $\quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$ $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango } A^* < \text{nº incógnitas} \Rightarrow$ S.C.I. por el T. Rouché-F.

No es posible determinar de forma única los precios de ninguno de los artículos (calculadora y estuche). Sí $x = 38$ € libro

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2 - E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3/-3}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 1 & 19 \end{array}\right)$

S.C.I.

$z = \lambda$

$y + z = 19$

$y = 19 - \lambda$

$x + y + z = 57$

$x = 57 - y - z$

$x = 57 - 19 + \lambda - \lambda$

$x = 38$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \\ 0'5x + 0'8y + 0'75z = 34 \end{array}\right\}$ $\quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \\ 50x + 80y + 75z = 3400 \end{array}\right\}$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 50 & 80 & 75 & 3400 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} E_1 \\ E_2-E_1 \\ E_3-50E_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \\ 0 & 30 & 25 & 550 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3+10E_2 \end{array}$$

$57 \times 50 = 2850$

$3400 - 2850 = 550$

$-570 + 550 = -20$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & -3 & -3 & -57 \\ 0 & 0 & -5 & -20 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow -5z = -20$$

$z = 4$

$x + y + z = 57$

$x = 57 - y - z$

$x = 57 - 15 - 4$

$x = 57 - 19$; $x = 38$

$-3y - 3z = -57$

$y + z = 19$; $y = 19 - 4$

$y = 15$

Comp. $38 + 4 + 15 = 57$

$38 = 2(4+15)$

$19 + 12 + 3 = 34$

Ejercicio 7: Considera el sistema $\begin{cases} 3x & -2y & +z & = & 5 \\ 2x & -3y & +z & = & -4 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente un valor de λ para que el sistema resultante al añadirle la ecuación $x + y + \lambda z = 9$ sea compatible determinado

b) ¿Existe algún valor de λ para el cual el sistema resultante no tiene solución?

a) Al añadirle la ecuación nos queda el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas siguiente: $\begin{cases} 3x & -2y & +z & = & 5 \\ 2x & -3y & +z & = & -4 \\ x & +y & +\lambda z & = & 9 \end{cases}$. La matriz de coeficientes es: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda & 9 \end{pmatrix}$. Empezamos estudiando el rango de A y para ellos con su determinante pues es cuadrada: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -9\lambda - 2 + 2 - (-3 + 3 - 4\lambda) = -5\lambda$

Obviamente se anula para $\lambda = 0$, luego si $\lambda \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3$, y como A^* es de dimensión 3x4 y A es un menor de A^*, tenemos que $rang(A^*) = 3$, por tanto $rang(A) = rang(A^*) = 3 = \text{nº de incógnitas}$ y por el teorema de Rouché-Frobenius, concluimos que para $\lambda \neq 0$ se trata de un sistema compatible determinado.

b) La única opción posible para que no tenga solución (incompatible) es que sea $\lambda = 0$. Estudiemos este caso, lo primero sustituir: $\begin{cases} 3x & -2y & +z & = & 5 \\ 2x & -3y & +z & = & -4 \\ x & +y & & = & 9 \end{cases}$ y así $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

Como ya sabemos $|A| = 0 \Rightarrow rang(A) \leq 2$ y el menor de A, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$

Estudiemos ahora el rango de $A^*=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 5\\ 2 & -3 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 0 & 9\end{pmatrix}$, viendo el valor de sus menores de orden 3 distintos a $|A|$, que ya sabemos que vale 0 :

$\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & -3 & -4\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix} = -81+8+10-(-15-36-12)=0$ $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 5\\ -3 & 1 & -4\\ 1 & 0 & 9\end{vmatrix} = -18-4+0-(5+0-27)=0$, luego

$rang(A^*)\le 2$, y el menor de orden 2 anterior es no nulo $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix} = -5\neq 0 \Rightarrow rang(A^*)=2$

Tenemos por el teorema de Rouché-Frobenius que al ser $rang(A)=rang(A^*)=2<\text{nº de incógnitas}=3 \Rightarrow$ se trata de un sistema compatible indeterminado. Por tanto, ningún valor de λ hace que sea un sistema incompatible.

NOTA IMPORTANTE: Si nos damos cuenta que la E_3 es combinación lineal de E_1 y E_2 nos podíamos haber ahorrado todos los cálculos. Así como $\begin{cases}3x & -2y & +z & = & 5\\ 2x & -3y & +z & = & -4\\ x & +y & & = & 9\end{cases} \Rightarrow E_3 = E_1 - E_2$,

podemos suprimir E_3 y el sistema que queda $\begin{cases}3x & -2y & +z & = & 5\\ 2x & -3y & +z & = & -4\end{cases}$ es inmediato ver que es compatible indeterminado y por tanto nunca podrá ser incompatible.

Ejercicio 8:

a) Discute, según los valores de λ, el sistema $\begin{cases}-x & +\lambda y & +z & = & \lambda\\ \lambda x & +2y & +(\lambda+2)z & = & 4\\ x & +3y & +2z & = & 6-\lambda\end{cases}$

b) Resuelve el sistema anterior para $\lambda = 0$.

a)

$A=\begin{pmatrix}-1 & \lambda & 1\\ \lambda & 2 & \lambda+2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}-1 & \lambda & 1 & \lambda\\ \lambda & 2 & \lambda+2 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 6-\lambda\end{pmatrix}$

$|A| = -4+\lambda(\lambda+2)+3\lambda-2+3(\lambda+2)-2\lambda^2 =$

$= \cancel{-4}+\lambda^2+2\lambda+3\lambda\cancel{-2}+3\lambda\cancel{+6}-2\lambda^2 = -\lambda^2+8\lambda$

$|A| = -\lambda^2+8\lambda$ $\quad |A|=0 \Leftrightarrow \lambda=0,\ \lambda=8$

- Si $\lambda\neq 0, \lambda\neq 8 \Rightarrow$ rango(A) = rango$(A^*)=3 \Rightarrow$ S. C. D. (solución única)

• Si $\lambda=0$: $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&2&2\\1&3&2\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&4\\1&3&2&6\end{pmatrix}$ $(C_4=2C_2)$

rango(A) = 2 porque $\underset{C_1\,C_2}{\begin{vmatrix}-1&0\\0&2\end{vmatrix}}=-2\neq 0$

$\det(C_1,C_2,C_4)=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&4\\1&3&6\end{vmatrix}=$

$=-12+0+0-0+12+0=0$

rango$(A^*)=2$

Si $\lambda=0$, rango(A) = 2 = rango(A^*)
$\Rightarrow$ S.C.I.
(infinitas soluciones)

• Si $\lambda=8$: $A=\begin{pmatrix}-1&8&1\\8&2&10\\1&3&2\end{pmatrix}$ $A^*=\begin{pmatrix}-1&8&1&8\\8&2&10&4\\1&3&2&-2\end{pmatrix}$

rango(A) = 2 porque

$\underset{C_1\,C_2}{\begin{vmatrix}-1&8\\8&2\end{vmatrix}}=-2-64=-66\neq 0$

$\det(C_1,C_2,C_4)=\begin{vmatrix}-1&8&8\\8&2&4\\1&3&-2\end{vmatrix}=$

$=4+32+192-16+12+$
$+128\neq 0$

rango$(A^*)=3$

Si $\lambda=8\Rightarrow$ rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*)
$\Rightarrow$ S.I. (sin solución)

b) Resolver si $\lambda=0$ (S.C.I. según hemos visto)

$$\left.\begin{array}{r}-x\quad\;\;+z=0\\2y+2z=4\\x+3y+2z=6\end{array}\right\}$$

$A^*\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&2&2&4\\1&3&2&6\end{array}\right)\begin{array}{l}E_1\\E_2\\E_3+E_1\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&2&2&4\\0&3&3&6\end{array}\right)E_2/2$

$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&1&1&2\\0&3&3&6\end{array}\right)\begin{array}{l}E_1\\E_2\\E_3-3E_2\end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&0\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow$ rango 2 < nº incógnitas S.C.I. (∞ soluciones)

$z=\lambda$ $\quad y+z=2$ $\quad -x+z=0$
$y=2-\lambda$, $\quad z=x$; $x=\lambda$

Soluciones:
$$\boxed{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=2-\lambda\\z=\lambda\quad,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}\end{array}}$$

(por Gauss)

Ejercicio 9: Tratamos de adivinar, mediante ciertas pistas, los precios de tres productos A, B y C.

- Pista 1: Si compramos una unidad de A, dos de B y una de C gastamos 118 euros.
- Pista 2: Si compramos n unidades de A, $n+3$ de B y tres de C gastamos 390 euros.

a) ¿Hay algún valor de n para el que estas dos pistas sean incompatibles?

b) Sabiendo que $n=4$ y que el producto C cuesta el triple que el A, calcula el precio de cada producto.

9

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=118 \\ nx+(n+3)y+3z=390 \end{array}\right\}$$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ n & n+3 & 3 & 390 \end{array}\right)$

En A^* $\det(C_3, C_4)$ $\begin{vmatrix} 1 & 118 \\ 3 & 390 \end{vmatrix} = 390-354 = 36 \neq 0$

rango $A^* = 2$ siempre, $\forall n$

En A: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ n & n+3 \end{vmatrix} = n+3-2n = -n+3$ $(=\det(C_1, C_2))$

rango $A \neq 2$ si $-n+3=0$; $n=3$

Luego si $n=3 \Rightarrow$ rango $A=1$ y rango $A^*=2 \Rightarrow$ S.I.

b) Si $n=4$ y además $z=3x$, resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=118 \\ 4x+7y+3z=390 \\ 3x-z=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 4 & 7 & 3 & 390 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_2-4E_1 \\ E_3-3E_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & -1 & -1 & -82 \\ 0 & -6 & -4 & -354 \end{array}\right) -E_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & 1 & 1 & 82 \\ 0 & -6 & -4 & -354 \end{array}\right) E_3+6E_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 118 \\ 0 & 1 & 1 & 82 \\ 0 & 0 & 2 & 138 \end{array}\right) \text{S.C.D.}$$

E_3: $2z=138$; $z=\frac{138}{2}$; $z=69$

E_2: $y+z=82$; $y=82-z$; $y=82-69$; $y=13$

E_1: $x+2y+z=118$; $x=118-2y-z$

$x=118-2\cdot 13-69$

$x=118-69-26$

$x=23$

Solución:

Los precios de los productos son:

Producto A = 23 €

Producto B = 13 €

Producto C = 69 €

Ejercicio 10: Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & -2y & +4z & = & 4 \\ 2x & & +z & = & a \\ -3x & -3y & +3z & = & -3 \end{cases}$

a) Discútelo según los valores de a .   b) Resuélvelo cuando sea posible.

a) Tenemos las matrices de coeficientes y ampliada:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & a \\ -3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes, A, que al ser cuadrada nos resultará más fácil.

$|A| = 6 - 24 + 6 + 12 = 0 \Rightarrow rang(A) < 3$. Tomamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 2$ siempre, valga lo que valga el parámetro a .

Veamos el rango de la matriz ampliada, A^*, tomando los menores de orden 3:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ como ya sabemos

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & a \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 6a - 24 + 6a - 12 = 12a - 36$ Igualamos a 0: $12a - 36 = 0 \Rightarrow a = 3$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & a \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 12a + 24 + 12 - 6a + 24 = -18a + 54$ Igualamos a 0; $-18a + 54 = 0 \Rightarrow a = 3$

$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & a \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 12a + 12 + 6a = -6a + 18$ Igualamos a 0; $-6a + 18 = 0 \Rightarrow a = 3$

Como nos ha salido el mismo valor del parámetro a en todos los menores de orden 3, tenemos dos casos:

NOTA: Si hubieran salido valores distintos de a , el rango de la matriz ampliada A^* siempre hubiese sido 3, pues algún menor de orden 3 no sería nulo, y tendríamos un sistema incompatible $\forall a \in \mathbb{R}$.

CASO 1: $a \neq 3 \Rightarrow A^*$ tiene menores de orden 3 que no son nulos $\Rightarrow rang(A^*) = 3 \neq rang(A) = 2 \Rightarrow$ Por el teorema de Rouché-Frobenius, se trata de un sistema incompatible.

CASO 2: $a=3 \Rightarrow A^*$ tiene todos los menores de orden 3 nulos $rang(A^*)<3$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rang(A^*) = 2 = rang(A) = 2 <$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Frobenius, se trata de un sistema compatible indeterminado.

b) Lo resolvemos para $a=3 \Rightarrow \begin{cases} 2x & -2y & +4z & = & 4 \\ 2x & & +z & = & 3 \\ -3x & -3y & +3z & = & -3 \end{cases}$ Dado que todos los rangos son 2, sólo hay 2 ecuaciones linealmente independientes, y nos quedamos con la E_1 y la E_2, pues tienen un menor de orden 2 que no es nulo, $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

El sistema queda: $\begin{cases} 2x & -2y & +4z & = & 4 \\ 2x & & +z & = & 3 \end{cases}$ hay 3 incógnitas y 2 ecuaciones linealmente independientes, luego hemos de hacer (3-2)=1 incógnita parámetro. Hacemos $z=\lambda$ y nos queda:

$\begin{cases} 2x & -2y & +4\lambda & = & 4 \\ 2x & & +\lambda & = & 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x & -2y & = & 4-4\lambda \\ 2x & & = & 3-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y=4-4\lambda \\ x=\dfrac{3-\lambda}{2} \end{cases}$ Y sustituyendo en E_1:

$(3-\lambda)-2y = 4-4\lambda \Rightarrow 2y = -1+3\lambda \Rightarrow y = \dfrac{-1+3\lambda}{2}$.

Luego, las soluciones del sistema compatible indeterminado son: $\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\lambda \\ y = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{3}{2}\lambda \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}}$

Ejercicio 11: Resuelve, según valga m, el sistema siguiente cuando sea compatible: $\begin{cases} x & +my & = & m \\ mx & +y & = & m \\ mx & +my & = & 1 \end{cases}$

Consideremos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \\ m & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$

Vamos a empezar por A^* pues al ser cuadrada será más fácil estudiar su rango

$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + m^3 + m^3 - (m^2 + m^2 + m^2) = 2m^3 - 3m^2 + 1$. Vemos dónde se anula: $2m^3 - 3m^2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$2m^3 - 3m^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ (aplicando Ruffini y ecuación de 2º grado)

$2m^3 - 3m^2 + 1 = (m-1)^2 \cdot (2m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

CASO 1: $m \neq 1, -\dfrac{1}{2} \Rightarrow |A^*| \neq 0 \Rightarrow rang(A^*) = 3$

Y como obviamente $rang(A) \leq 2$ pues es de dimensión 3x2, entonces, $rang(A) < rang(A^*) \Rightarrow$ Por el teorema de Rouché-Frobenius tenemos que es un sistema incompatible.

<u>CASO 2</u>: $m=1 \Rightarrow |A^*|=0 \Rightarrow rang(A^*) \leq 2$. Sustituimos en el sistema y nos queda: $\begin{cases} x & +y & = & 1 \\ x & +y & = & 1 \\ x & +y & = & 1 \end{cases}$ donde son 3 ecuaciones iguales y suprimimos dos de ellas. Nos queda el sistema $\{x+y=1$ en el cual es evidente que $rang(A)=rang(A^*)=1<2=$ nº de incógnitas, luego es un sistema compatible indeterminado.

Resolvemos haciendo $y=\lambda \Rightarrow x=1-\lambda$. Las soluciones son $\boxed{\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=\lambda \end{cases} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}}$.

<u>CASO 3</u>: $m=-\frac{1}{2} \Rightarrow |A^*|=0 \Rightarrow rang(A^*) \leq 2$

Sustituimos $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ y $A^*=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ Tanto en A como en A^*, tomamos el menor de orden 2 siguiente $\begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow rang(A)=rang(A^*)=2=$ nº de incógnitas, y se trata de un sistema compatible determinado según nos dice el teorema de Rouché-Frobenius

Resolvamos el sistema eliminado la tercera ecuación que es combinación lineal de las otras dos:

$\begin{cases} x & -\frac{1}{2}y & = & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x & +y & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$ que lo vamos a hacer por Cramer: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}=-1$;

$$y==\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}=-1$$

La solución es: $\boxed{\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}}$

<u>Ejercicio 12</u>: Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 € respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40500 €. Calcula cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos se ha comprado el 30% de las cajas.

12

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1500 \\ 30x+20y+40z=40.500 \\ x=0'30\cdot 1500 \end{array}\right\}$$

x = nº cajas en mercado A
y = " " " B
z = " " " C

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1500 \\ 3x+2y+4z=4050 \\ x=450 \end{array}\right\}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1500 & 1 & 1 \\ 4050 & 2 & 4 \\ 450 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0+\overset{1800}{4\cdot 450}+0-900}{2}=\frac{900}{2}=450 \qquad x=450$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+4+0-2-0-0=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1500 & 1 \\ 3 & 4050 & 4 \\ 1 & 450 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0+6000+1350-4050-1800}{2} \ \circledast$$

$|A|\neq 0$

$n=m=3$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1500 \\ 3 & 2 & 4050 \\ 1 & 0 & 450 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{900+4050-3000-1350}{2}$$

$\circledast$ $y=\dfrac{7350-5850}{2}$

$y=\dfrac{1500}{2}$, $y=750$

$z=\dfrac{600}{2}$ $\quad z=300$

Ejercicio 13: Sabemos que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x & -y & +3z & = & 1 \\ x & +2y & -z & = & 2 \end{cases}$ tiene las mismas soluciones que el que resulta de añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$

a) Determina el valor de a.
b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad.

13

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=2 \end{array}\right\} \text{ equivalente a } \left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=2 \\ ax+y+7z=7 \end{array}\right\}$$

(A_1) $\qquad$ (A_2)

a) Calcula a

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$ rango$(A_1)=2$ (F_1 y F_2 l.i.)

para tener las mismas soluciones $\longrightarrow$ $|A_2|=0$ debe ser

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 7 \end{vmatrix}=28+a+3-6a+2+7=40-5a$$

$|A_2|=0 \iff a=8$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-y+3z=1 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) E_1 \leftrightarrow E_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_2-2E_1 \\ E_3-E_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \leftrightarrow E_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3-5E_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$-5z=3 \Rightarrow z=\frac{3}{-5}$

$-y+2z=-1$

$2z+1=y \; ; \quad y=-\frac{6}{5}+1 \; ; \quad y=\frac{-1}{5}$

$x+2y-z=2$

$x=2-2y+z$

$x=2+\frac{2}{5}-\frac{3}{5} \; ; \quad x=\frac{10+2-3}{5}$

$x=\frac{9}{5}$

Ejercicio 14: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

b) Razona para qué valores de t, el sistema $AX=0$ tiene más de una solución.

14

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

a) Rango A

$|A| = (t+1)(t+3) + (t-1)(-2t-1) + 0 - 0 - 2(t+3) =$

$= t^2+4t+3+(-2t^2+2t-t+1)-2t-6 =$

$= t^2+4t+3-2t^2+t+1-2t-6 =$

$= -t^2+3t-2$

$|A|=0 \iff -t^2+3t-2=0 \qquad t=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot(-1)}$

$t=\dfrac{-3\pm 1}{-2}$ $\begin{cases} t=2 \\ t=1 \end{cases}$

- Si $t\neq 2,\ t\neq 1 \Rightarrow$ rango$A=3$
- Si $t=1$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$F_2=F_1$
F_2 y F_3 indptes.

rango$A=2$ $\left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=0+6\neq 0\right)$

- Si $t=2$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\left(|A|=15-5-10=0\right.$ ya se sabía$\left.\right)$

$|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$

rango$A=2$

b) Si consideramos el sistema homogéneo:
$AX=0$

Rango$(A)=$ Rango(A^*) por tanto siempre es compatible.

- Si $t\neq 2,\ t\neq 1 \Rightarrow$ Rango$(A)=$ rango$(A^*)=3$
  S.C.D. (solución única) $\Rightarrow$ $x=0$, $y=0$, $z=0$
- $t=1$ ó $t=2 \Rightarrow$ rango$(A)=$ rango$(A^*)=2$
  S.C.I. (infinitas soluciones)

Resolvemos:

- Si $t=1$ $\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \\ -3x+4z=0 \end{array}\right\}$ Elimino E_2 $\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ -3x+4z=0 \end{array}\right\}$ $z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ -3x=-\lambda \end{array}\right\}$ $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=+3$

$r=m=2$

$x=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix}}{|B|}=\dfrac{\lambda}{3}$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}}{|B|}=\dfrac{-\lambda}{3}$

Soluciones:

$x=\dfrac{\lambda}{3}$

$y=\dfrac{-\lambda}{3}$

$z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Si $t=2$ $\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ -5x+5z=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$

Elimino E_3 y $z=\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ 2x+3y=-\lambda \end{array}\right\}$ $x=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 3 \end{vmatrix}}{|B|}=\lambda$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}}{|B|}=-\lambda$

Soluciones:

$x=\lambda$

$y=-\lambda$

$z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$

Ejercicio 15: Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 euros.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?
b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo.

15

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=130 \\ 10x+20y+50z=3000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y+z=130 \\ x+2y+5z=300 \end{array}\right\}$$

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 1 & 2 & 5 & 300 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 4 & 170 \end{array}\right) \qquad z=\lambda$$

E_2: $y+4z=170$

$y=170-4\lambda$

E_1: $x+y+z=130$

$x=130-y-z$

$x=130-170+4\lambda-\lambda$; $x=-40+3\lambda$

No

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=130 \\ x+2y+5z=300 \\ x-2z=0 \end{array}\right\}$$

Hemos

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4+5+0-2-0+2=1\neq 0$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 130 & 1 & 1 \\ 300 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4(130)+0+0-0+600}{1} = 80$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 130 & 1 \\ 1 & 300 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = -600+650+0-300-0+260 = 10 \; ; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 130 \\ 1 & 2 & 300 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = 300-260 = 40$$