

EJERCICIOS RESUELTOS DE PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO. APLICACIONES

Ejercicio 1:

Halla la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a π y a σ :

$$\pi: x - 2y = 5 \qquad \sigma: 2x + z = 7$$

Un vector normal al plano es: $(1, -2, 0) \times (2, 0, 1) = (-2, -1, 4)$

La ecuación del plano será: $-2x - y + 4z = 0$

Ejercicio 2:

Calcula la distancia entre las dos rectas dadas mediante cada uno de los tres métodos aprendidos:

$$r: \begin{cases} x = 13 + 12\lambda \\ y = 2 \\ z = 8 + 5\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + \mu \\ z = -9 \end{cases}$$

■ Primer método:

Hallamos el plano, π , que contiene a r y es paralelo a s :

$$\left. \begin{array}{l} (12, 0, 5) // r \\ (0, 1, 0) // s \end{array} \right\} (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = (-5, 0, 12) \perp \pi$$

El punto $(13, 2, 8)$ es de r , y, por tanto, de π .

Ecuación de π : $-5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$, es decir:

$$-5x + 12z - 31 = 0$$

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(s, \pi) = \text{dist}[(6, 6, -9), \pi] = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13$$

■ Segundo método:

Punto genérico de r : $R(13 + 12\lambda, 2, 8 + 5\lambda)$

Punto genérico de s : $S(6, 6 + \mu, -9)$

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en s es:

$$\overrightarrow{RS} = (-7 - 12\lambda, 4 + \mu, -17 - 5\lambda)$$

De todos los posibles vectores \vec{RS} , buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (12, 0, 5) = 0 \rightarrow -169\lambda - 169 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ \vec{RS} \cdot (0, 1, 0) = 0 \rightarrow 4 + \mu = 0 \rightarrow \mu = -4 \end{cases}$$

Sustituyendo en r y en s , obtenemos los puntos R y S : $R(1, 2, 3)$, $S(6, 2, -9)$.

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(R, S) = |(5, 0, -12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

■ Tercer método:

$$\text{dist}(r, s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{|[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}']|}{|\vec{d} \times \vec{d}'|}$$

$$R(13, 2, 8) \quad \vec{d}(12, 0, 5)$$

$$S(6, 6, -9) \quad \vec{d}'(0, 1, 0)$$

$$\vec{RS}(-7, 4, -17)$$

$$[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d}'] = \begin{vmatrix} -7 & 4 & -17 \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -169 \rightarrow \text{Volumen} = 169$$

$$|\vec{d} \times \vec{d}'| = |(-5, 0, 12)| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\text{Por tanto: } \text{dist}(r, s) = \frac{169}{13} = 13$$

Ejercicio 3:

Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en estos puntos: $A(1, 3, 5)$, $B(2, 5, 8)$ y $C(5, 1, -11)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(1, 2, 3) \\ \vec{AC}(4, -2, -16) \end{array} \right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = (-26, 28, -10)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{26^2 + 28^2 + 10^2} = \sqrt{1560}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1560}}{2} \approx 19,75 \text{ u}^2$$

Ejercicio 4:

Calcula el volumen de un tetraedro cuyos vértices son $A(2, 1, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(4, 3, 2)$ y $D(1, 5, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB}(-1, -1, -2) \\ \vec{AC}(2, 2, -2) \\ \vec{AD}(-1, 4, 2) \end{array} \right\} [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -30$$

$$\text{Volumen} = \frac{30}{6} = 5 \text{ u}^3$$

Ejercicio 5:

Calcula el área total y el volumen del tetraedro de vértices:

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$

- Área del triángulo ABC :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (2, -2, -3) \times (4, 0, 6) = (-12, -24, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{784}}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ABD :

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (2, -2, -3) \times (-7, -7, 7) = (-35, 7, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{2058}}{2} \approx 22,68 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo ACD :

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = (4, 0, 6) \times (-7, -7, 7) = (42, -70, -28)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2} = \frac{\sqrt{7448}}{2} \approx 43,15 \text{ u}^2$$

- Área del triángulo BCD :

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = (2, 2, 9) \times (-9, -5, 10) = (65, -101, 8)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{BC} \times \vec{BD}|}{2} = \frac{\sqrt{14490}}{2} \approx 60,19 \text{ u}^2$$

- Área total = $14 + 22,68 + 43,15 + 60,19 = 140,02 \text{ u}^2$

- Volumen: $\vec{AB}(2, -2, -3)$ $\vec{AC}(4, 0, 6)$ $\vec{AD}(-7, -7, 7)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{306}{6} \approx 51,33 \text{ u}^3$$

Ejercicio 6:

Calcula el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano: $6x - 5y + 3z - 1 = 0$

☞ Recuerda que $V = 1/3 \cdot \text{área base} \times \text{altura}$.

En este caso es muy sencillo obtener ambas por ser un tetraedro con tres aristas perpendiculares entre sí.

Hazlo también utilizando el producto mixto y comprueba que obtienes el mismo resultado.

- Hallamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{3} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{6} \rightarrow B\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{5} \rightarrow C\left(0, -\frac{1}{5}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

- Lo calculamos utilizando el producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{540} \text{ u}^3$$

Ejercicio 7:

Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{4}$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 0)$, y calcula el volumen de la figura limitada por el plano anterior y los tres planos coordenados.

Un vector normal al plano es $\vec{n}(2, 3, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x+1) + 3(y-1) + 4(z-0) = 0$

$$2x + 3y + 4z - 1 = 0$$

Calculamos los vértices:

$$x = y = 0 \rightarrow z = \frac{1}{4} \rightarrow A\left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y = z = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$x = z = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3} \rightarrow C\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$O(0, 0, 0)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{144} \text{ u}^3$$

Ejercicio 8:

Determina la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2, 2)$ y es perpendicular a las rectas r_1 y r_2 :

$$r_1: \begin{cases} x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los vectores dirección de las rectas r_1 y r_2 :

$$r_1: (1, 2, -3) \times (1, 2, -1) = (4, -2, 0) \rightarrow \vec{d}_1(2, -1, 0)$$

$$r_2: (3, -1, 3) \times (1, 4, 0) = (-12, 3, 13) = \vec{d}_2$$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a r_1 y a r_2 :

$$(2, -1, 0) \times (-12, 3, 13) = (-26, -52, -12) \rightarrow \vec{d}(13, 26, 6)$$

Como pasa por el punto $P(1, 2, 2)$, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + 13\lambda \\ y = 2 + 26\lambda \\ z = 2 + 6\lambda \end{cases} \text{ o bien } \frac{x-1}{13} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-2}{6}$$

Ejercicio 9:

Halla la ecuación del plano π que contiene a la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $\sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Obtén también las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ .

Obtenemos un punto y un vector dirección de la recta r :

$$P(1, -1, 1) \in r \rightarrow P(1, -1, 1) \in \pi$$

$$(1, 1, -1) \times (1, 2, 1) = (3, -2, 1) = \vec{d} // r \rightarrow \vec{d}(3, -2, 1) // \pi$$

Si π es ortogonal a σ , el vector normal de σ es paralelo a π :

$$\vec{n}_{\sigma}(2, -1, 3) \perp \sigma \rightarrow (2, -1, 3) // \pi$$

Obtenemos un vector normal a π : $(3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = (-5, -7, 1) \rightarrow (5, 7, -1)$

La ecuación del plano π es: $5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$

$$5x + 7y - z + 3 = 0$$

• Ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π y σ :

$$\left. \begin{array}{l} \pi: 5x + 7y - z + 3 = 0 \\ \sigma: 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Vector dirección de la recta: $(5, 7, -1) \times (2, -1, 3) = (20, -17, -19)$

Punto de la recta:

$$x = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7y - z + 3 = 0 \\ -y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} R\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ecuaciones de la recta: } \left\{ \begin{array}{l} x = 20\lambda \\ y = -\frac{1}{2} - 17\lambda \\ z = -\frac{1}{2} - 19\lambda \end{array} \right.$$

Ejercicio 10:

Dados la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3}$ y el plano $\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0$, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P(0, 1, -1); \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a \vec{d} y a \vec{n} y contendrá a P .

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \rightarrow (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x - 0) - 9(y - 1) - 7(z + 1) = 0$

$$6x - 9y - 7z + 2 = 0$$

Ejercicio 11:

Determina la perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x + y = z + 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Restando la 1ª ecuación a la 2ª: } y = 3 - z \\ x = 7 - 2y = 7 - 2(3 - z) = 1 + 2z \end{array} \right\}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Un punto genérico de } r \text{ es: } R(1 + 2\lambda, 3 - \lambda, \lambda)$$

$$s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = \mu \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{Un punto genérico de } s \text{ es: } S(2, -3, \mu)$$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es: $\overrightarrow{RS}(1 - 2\lambda, -6 + \lambda, \mu - \lambda)$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{RS} \cdot (2, -1, 1) = 0 \rightarrow 2 - 4\lambda + 6 - \lambda + \mu - \lambda = 0 \rightarrow -6\lambda + \mu + 8 = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot (0, 0, 1) = 0 \rightarrow \mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = \lambda \end{array} \right\}$$

$$-5\lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{8}{5}; \quad \mu = \frac{8}{5}$$

Así:

$$\left. \begin{array}{l} R\left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right) \\ S\left(2, -3, \frac{8}{5}\right) \end{array} \right\} \quad \overrightarrow{RS}\left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right) \rightarrow \vec{d}(1, 2, 0)$$

La perpendicular común a las rectas es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 8/5 \end{cases}$$

Ejercicio 12:

Dados la recta $r: \begin{cases} x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z - 1 = 0$,

halla la ecuación de una recta situada en el plano π , que pase por el punto $P(2, 1, -1)$ y sea perpendicular a r .

Un vector dirección de r es: $(1, 0, -2) \times (0, 1, -1) = (2, 1, 1)$

La recta que buscamos ha de ser perpendicular a $(2, 1, 1)$ y perpendicular a $(1, 2, 3)$ (pues está situada en el plano π). Un vector dirección de la recta es:

$$(2, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -5, 3)$$

El punto $P(2, 1, -1)$ pertenece al plano y debe pertenecer a la recta buscada. Luego la recta es:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 13:

Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas: $(-1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda, 2 + \lambda)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

Determina también el ángulo formado por la recta y el plano dados.

Un vector normal al plano es: $(3, 2, 1) \times (2, 1, -3) = (-7, 11, -1) \rightarrow (7, -11, 1)$

Un punto del plano es $(-1, 1, 2)$ (pues contiene a la recta).

- La ecuación del plano será:

$$7(x + 1) - 11(y - 1) + 1(z - 2) = 0$$

$$7x - 11y + z + 16 = 0$$

- Ángulo formado por la recta y el plano dados:

$$\vec{d}(3, 2, 1); \vec{n}(2, 1, -3)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{6 + 2 - 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{14} = 0,357$$

$$90^\circ - \alpha = 69^\circ 4' 31'' \rightarrow \alpha = 20^\circ 55' 29''$$

Ejercicio 14:

Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C .

a) Escribe la ecuación de π .

b) Calcula el área del triángulo ABC .

a) El plano es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}(-4, 6, -2)$; un vector normal al plano es $(2, -3, 1)$.

Pasa por el punto medio del segmento PQ : $M(1, 4, 4)$.

La ecuación del plano es: $2(x - 1) - 3(y - 4) + 1(z - 4) = 0$

$$\pi: 2x - 3y + z + 6 = 0$$

b) Hallamos los vértices del triángulo:

$$y = z = 0 \rightarrow 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow A(-3, 0, 0)$$

$$x = z = 0 \rightarrow -3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(0, 2, 0)$$

$$x = y = 0 \rightarrow z + 6 = 0 \rightarrow z = -6 \rightarrow C(0, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AB}(3, 2, 0) \quad \overrightarrow{AC}(3, 0, -6)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-12, 18, -6) \rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{504}$$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} \approx 11,22 \text{ u}^2$$

Ejercicio 15:

Sea r_1 la recta que pasa por $A(2, 4, 0)$ y $B(6, 2, 0)$ y sea r_2 la recta que pasa por $C(0, 0, 7)$ y $D(3, 2, 0)$.

Obtén, de manera razonada, la distancia entre r_1 y r_2 .

• Escribamos las rectas en forma paramétrica:

$$r_1: \overrightarrow{AB}(4, -2, 0) // (2, -1, 0)$$

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r_2: \overrightarrow{CD}(3, 2, -7)$$

$$r_2: \begin{cases} x = 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 7 - 7\mu \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de r_1 y r_2 :

$$\overrightarrow{AC}(-2, -4, 7)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -21 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre r_1 y r_2 :

$$\begin{aligned} \text{dist}(r_1, r_2) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{21}{|(2, -1, 0) \times (3, 2, -7)|} = \\ &= \frac{21}{|(7, 14, 7)|} = \frac{21}{\sqrt{294}} \approx 1,22 \end{aligned}$$

Ejercicio 16:

Calcula la distancia entre las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 \\ y - z = -4 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

- Escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x - z = -2 \rightarrow x = -2 + z \\ y - z = -4 \rightarrow y = -4 + z \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 \rightarrow x = z \\ y + z = 0 \rightarrow y = -z \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Estudiamos la posición relativa de las dos rectas:

$$\vec{d}_r(1, 1, 1); P(-2, -4, 0)$$

$$\vec{d}_s(1, -1, 1); P'(0, 0, 0)$$

$$\vec{PP'}(2, 4, 0)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

- Hallamos la distancia entre las rectas:

$$\begin{aligned} \text{dist}(r, s) &= \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{4}{|(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)|} = \\ &= \frac{4}{|(2, 0, -2)|} = \frac{4}{\sqrt{4+4}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41 \end{aligned}$$

Ejercicio 17:

Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(1, 0, 0)$, $B(2, 3, 0)$, $C(4, 0, 5)$ y $E(7, 6, 3)$.

Halla las coordenadas de los restantes vértices del paralelepípedo.

Hallamos las coordenadas de los restantes vértices:

- Vértice $D(d_1, d_2, d_3)$:

$$\vec{BA} = \vec{CD} \rightarrow (-1, -3, 0) = (d_1 - 4, d_2, d_3 - 5)$$

$$D(3, -3, 5)$$

- Vértice $F(f_1, f_2, f_3)$:

$$\vec{AE} = \vec{BF} \rightarrow (6, 6, 3) = (f_1 - 2, f_2 - 3, f_3)$$

$$F(8, 9, 3)$$

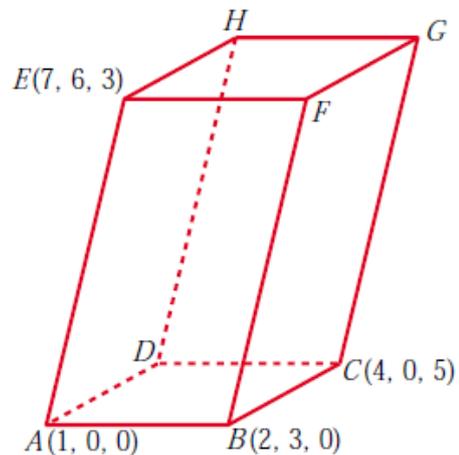
- Vértice $G(g_1, g_2, g_3)$ y vértice $H(h_1, h_2, h_3)$:

$$\vec{AE} = \vec{CG} \rightarrow (6, 6, 3) = (g_1 - 4, g_2, g_3 - 5) \rightarrow G(10, 6, 8)$$

$$\vec{AE} = \vec{DH} \rightarrow (6, 6, 3) = (h_1 - 3, h_2 + 3, h_3 - 5) \rightarrow H(9, 3, 8)$$

$$\vec{AB}(1, 3, 0) \quad \vec{AD}(2, -3, 5), \quad \vec{AE}(6, 6, 3)$$

$$[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 6 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 33 \rightarrow \text{Volumen} = 33 \text{ u}^3$$



Ejercicio 18:

Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S , pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r .

a) Determina las coordenadas de S .

b) Calcula el área del triángulo PQS .

$$a) \vec{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \vec{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$$

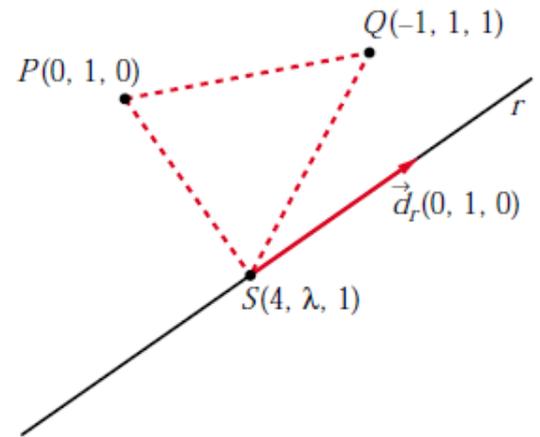
$$(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$S(4, 1, 1)$$

$$b) \vec{PS}(4, 0, 1) \quad \vec{PQ}(-1, 0, 1)$$

$$\vec{PS} \times \vec{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{PS} \times \vec{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$

**Ejercicio 19:**

Considera un cuadrado cuyo centro es el punto $C(1, 1, -1)$ y tiene uno de sus lados en la recta:

$$r: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

a) Halla la ecuación del plano en el que se encuentra el cuadrado.

b) Calcula la longitud del lado del cuadrado.

a) Es el plano, π , que contiene a C y a r . $\vec{d}_r(1, 1, 0)$; $P(2, 1, 1) \in r$.

$$C(1, 1, -1)$$

$$\vec{PC}(-1, 0, -2) \parallel \pi$$

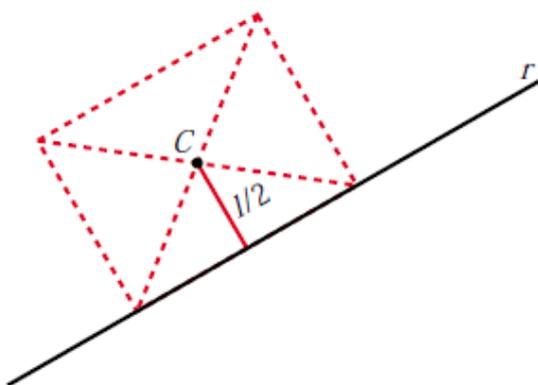
Un vector normal al plano es:

$$\vec{n} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 2) = (2, -2, -1)$$

La ecuación del plano es:

$$2(x-1) - 2(y-1) - 1(z+1) = 0$$

$$2x - 2y - z - 1 = 0$$



b) La distancia de C a r es la mitad del lado del cuadrado.

$$\vec{d}_r \times \vec{PC} = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (-2, 2, 1)$$

$$|\vec{d}_r| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{dist}(C, r) = \frac{|\vec{d}_r \times \vec{PC}|}{|\vec{d}_r|} = \frac{\sqrt{4 + 4 + 1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{l}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{lado del cuadrado} = l = 3\sqrt{2} \approx 4,24$$

