

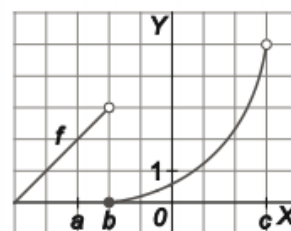
EJERCICIOS RESUELTOS LÍMITES DE FUNCIONES

Cuestión 1:

Dada la función de la figura, calcula $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ y los límites laterales y el límite de f en a , b y c .

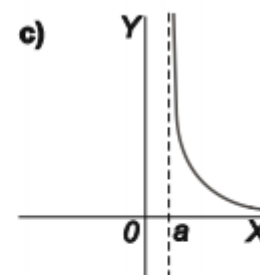
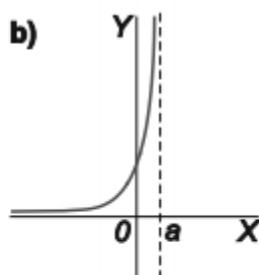
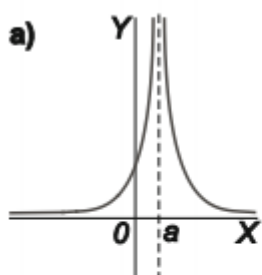
$f(a) = 2$, $f(b) = 0$ y $f(c)$ no existe.

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ no existe, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ no existe y $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ no existe.



Cuestión 2:

Halla $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ en estas funciones.



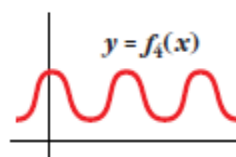
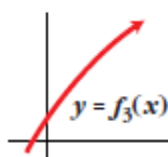
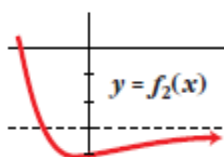
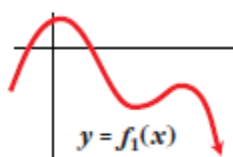
a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ no existe.

c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ no existe, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

Cuestión 3:

Di el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de las siguientes funciones dadas por sus gráficas:



$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x)$ no existe

Cuestión 4:

Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$

b) -1

Cuestión 5:

Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ en los siguientes casos.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2}$

d) $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+x-6}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5)}{(x+2)} = -\frac{3}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{0}{3} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6}$, el numerador tiende a 4 y el denominador a 0, por lo que la función se hace muy grande en valor absoluto cuando x tiende a 2. Estudiando el signo de la función cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)} = -\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-2x}{(x-2)(x+3)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x}{x^2+x-6} \text{ no existe.}$$

Cuestión 6:

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

a) 5

b) 0

c) -2

d) $\sqrt{2}$

e) 4

f) 2

g) 1

h) e^2

Cuestión 7:

Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa el resultado que obtengas.

a) $f(x) = x^3 - 10x$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{3-x}{2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-2x}{-3}$

☛ Dale a x "valores grandes" y saca conclusiones.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



Cuestión 8:

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, calcula los límites en $x = a$ de fg , $f : g$, f^g

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ el numerador tiende a } 3 \text{ y el denominador a } 0, \text{ por lo que } \frac{f}{g} \text{ se hace arbitrariamente}$$

grande en valor absoluto cerca de $x = a$. Habría que estudiar el signo de $\frac{f}{g}$ cuando x se acerca a a por la izquierda y por la derecha, es decir, determinar los límites laterales. Si los límites laterales existen y coinciden, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ existirá y su valor coincidirá con el de los límites laterales, en caso contrario $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ no existirá.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^g)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = 3^0 = 1$$

Cuestión 9:

Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3} = -\frac{1}{2}$, ya que el numerador y el denominador tienen el mismo grado.

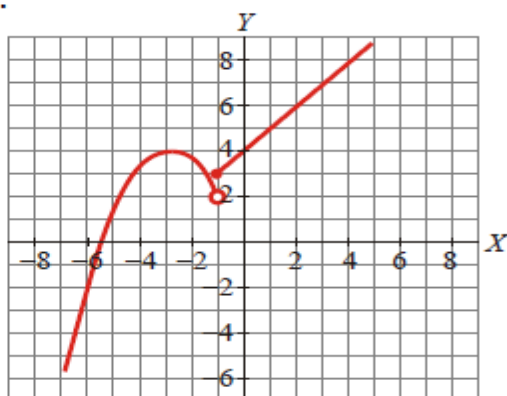
Si se quiere ser más riguroso: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} - 2} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 - 2} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = 0$, ya que el "grado" del "numerador" es menor que el grado del denominador.

Si se quiere ser más riguroso: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x-2}}{x}}{\frac{x+6}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-2}{x^2}}}{1 + \frac{6}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

Cuestión 10:

A partir de la gráfica de $f(x)$, calcula:



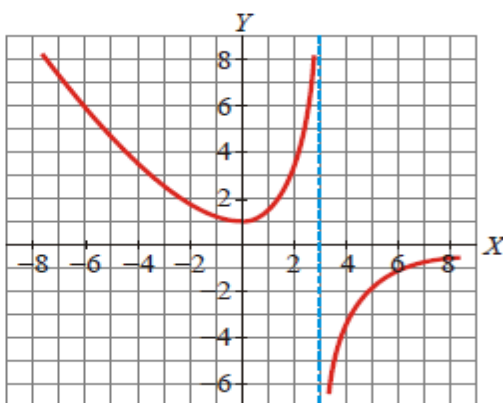
- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$ e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0$

Cuestión 11:

La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. Sobre ella, calcula los límites:



- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solución:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

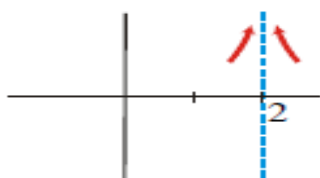
Cuestión 12:

Representa los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

Solución:



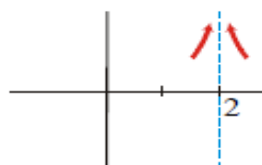
Cuestión 13:

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-2)^2} = +\infty$$

**Cuestión 14:**

Dada la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$, calcula el límite de $f(x)$ en $x = 2$. Representa la información que obtengas.

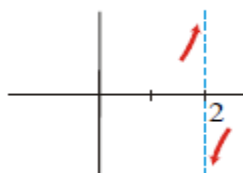
Solución:

$$\frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} = -\infty$$

**Cuestión 15:**

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función a la izquierda y a la derecha de $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9}$$

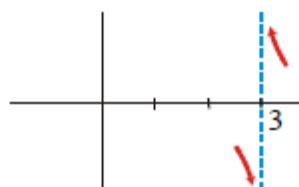
Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9} = +\infty$$



Cuestión 16:

Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2+2x}$$

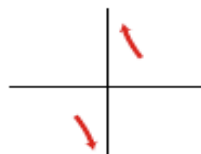
Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x^2+2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2+2x} = +\infty$$

**Cuestión 17:**

Calcula el límite cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$ de la siguiente función y representa la información que obtengas:

$$f(x) = \frac{1-2x^2+4x}{3}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x^2+4x}{3} = -\infty$$

**Cuestión 18:**

Calcula y representa gráficamente la información obtenida

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}$$

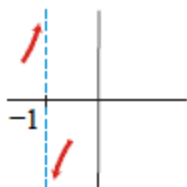
Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{x+1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-4}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-4}{x+1} = -\infty$$



Cuestión 19:

Resuelve el siguiente límite e interprétalo gráficamente.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{(x-2)} = 0$$

**Cuestión 20:**

Calcula los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$

b) $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$

a) El límite en $-\infty$ no existe pues la función solo está definida si $x \geq 5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-5} = +\infty$.

b) $f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, así $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2-x} = -1$

Cuestión 21:

Halla, si existen, estos límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-50}{x^2+10x+25}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$$e) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 6x + 8} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 4x - 1}{(x-4)(x-2)} = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 50}{x^2 + 10x + 25} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^3 - 3)}{x^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3}{x(x-2)}$$
 no existe, pues el signo del cociente cambia si la aproximación a 2 es por la derecha o por la izquierda.

$$h) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3}{x(x-2)} = +\infty$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 3}{x(x-2)} = -\infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = -\infty$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = +\infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3}{x(x-2)}$$
 no existe, pues el signo del cociente cambia según sea la aproximación a derecha o por la izquierda.

Cuestión 22:

En caso de existir, calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9 - x^2}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 + x - 90}{\sqrt{x} - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{10}{2} = 5$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{0}{12} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x-1} = -3$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9-x^2} \text{ no existe, ya que la raíz está definida sólo si } x \in [-3, 3].$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2+x-90}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} (x+10)(\sqrt{x}+3) = 114$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Cuestión 23:

Si existen, halla los siguientes límites en la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ \sqrt{x}+x+1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-2} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe, pues no coinciden los límites laterales.}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-2} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = 5$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\sqrt{x}+x+1) = 7$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 1) = 7$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7, \text{ pues } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 7$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x} + x + 1) = 6 + \sqrt{5}$$

Cuestión 24:

Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$$

$$c) \lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$$

$$d) \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$$

• *Saca factor común y simplifica cada fracción.*

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$$

$$c) \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2(3b-2)}{b} = 0$$

$$d) \lim_{b \rightarrow 0} \frac{b(b-7)}{4b} = -\frac{7}{4}$$

Cuestión 25:

Resuelve los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = 2$$

Cuestión 26:

Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 5}$ en $x = 2$ y en $x = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \rightarrow \frac{24}{0} \qquad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

Cuestión 27:

Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} \rightarrow \frac{0}{0} \qquad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)} = -\frac{8}{3}$$

Cuestión 28:

Pon un ejemplo de una función que tenga como asíntotas verticales las rectas cuyas ecuaciones son:

$$x = 1 \qquad x = 2 \qquad x = 3$$

Respuesta abierta. Por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

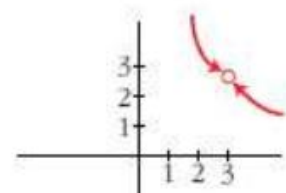
Cuestión 29:

Calcula los siguientes límites y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \frac{5}{3}$

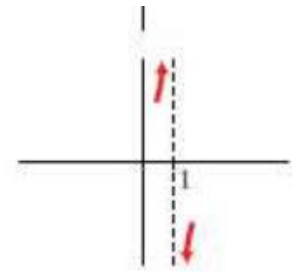


$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

$$\text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$



Cuestión 30: Calcula los siguientes límites:

a.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol: 1/2	b.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{3x^2-x+1}}{\sqrt{4x-1}}$	Sol: 0
c.- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4-x}}{x^{\frac{1}{3}}}$	Sol: $-\infty$	d.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-x}{5x^2-x+1}$	Sol: $+\infty$
e.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$	Sol: 3/2	f.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$	Sol: 0
g.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2+3x}}$	Sol: $+\infty$	h.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$	Sol: 0
i.- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-4}$	Sol: 1	j.- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$	Sol: -1
k.- $\lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt[3]{x^2+2}-x)$	Sol: -2	l.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^4-x^3+x-1}$	Sol: -2
m.- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+1)^3}{(x+3)^4}$	Sol: $-\infty$	n.- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+7x^2+15x+9}$	Sol: -2
ñ.- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-2x^3+x-2}{x^3+4x^2-11x-2}$	Sol: 9/17	o.- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$	Sol: 2
p.- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x- x }{2x}$	Sol: 0	q.- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{x-1}{2x-4} \right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol: $e^{\frac{-1}{2}}$
r.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2-1}{2x^2-4} \right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol: 1	s.- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-x}{3x^4+1} \right)^{\frac{-1}{x}}$	Sol: e
t.- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(2 - \frac{x-1}{2x-4} \right)^{\frac{1}{x-3}}$	Sol: $\sqrt{e}$	u.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)^{2x-3}$	Sol: 1

v.- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)^x$	Sol : $\frac{\sqrt{e}}{e}$	X.- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x - \sqrt{x}} - \sqrt{x + \sqrt{x}})$	Sol : -1
y.- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2 x - 1 - 1}$	Sol : 1/3	z.- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - x}{3x^4 + 1} \right)^{\frac{-1}{x}}$	Sol : e

Cuestión 31:

Encuentra el valor de:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3})$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = 0 \end{aligned}$$

Cuestión 32:

Obtén los resultados de:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1} = -\infty$

Cuestión 33:

Determina.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(2 + \sqrt{x + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 + \sqrt{x + 4}} = -\frac{1}{4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Cuestión 34:

Halla los límites.

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \rightarrow \frac{1}{0}$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \operatorname{sen} x = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \rightarrow -\frac{1}{0}$

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

Cuestión 35:

Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(2x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x - 2} = \frac{5}{4}$$

Cuestión 36: Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x}) = \infty - \infty$$

SOL:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} &= \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2 - x^2 - x}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 - x}{(\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 + x})} = \\ = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

Cuestión 37:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x \Rightarrow \dots \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x} - x)(\sqrt{x^2 + 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

Cuestión 38:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} \Rightarrow \dots \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2 - x+2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \frac{4}{\infty} = 0$$