HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 11: **GEOMETRÍA EUCLÍDEA. PRODUCTO ESCALAR**

Ejercicio 1: Dados los puntos $A(2,1,-1)$ y $B(-2,3,1)$ y la recta r definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$, halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B.

1 FORMA

$A(2,1,-1)$

$B(-2,3,1)$

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$$

Hacemos: $y=\lambda$

$$r \equiv \begin{cases} x-z=-1+\lambda \\ 3x-2z=-5 \end{cases} \xrightarrow{-2E1} \begin{cases} -2x+2z=+2-2\lambda \\ 3x-2z=-5 \end{cases} \xrightarrow{E1+E2} \begin{cases} x=-3-2\lambda \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$$

$3x-2z=-5$

$3(-3-2\lambda)-2z=-5$

$-9-6\lambda-2z=-5$

$z=\dfrac{4+6\lambda}{-2}$

$z=-2-3\lambda$

$$r \equiv \begin{cases} x=-3-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$$

Punto genérico: $P(-3-2\lambda, \lambda, -2-3\lambda) \in r$

Imponemos:

$d(A,P)=d(B,P) \rightarrow |\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$

$|(-3-2\lambda-2, \lambda-1, -2-3\lambda+1)|=|(-3-2\lambda+2, \lambda-3, -2-3\lambda-1)|$

$\sqrt{(-5-2\lambda)^2+(\lambda-1)^2+(-1-3\lambda)^2}=\sqrt{(-1-2\lambda)^2+(\lambda-3)^2+(-3-3\lambda)^2}$

$(-5-2\lambda)^2+(\lambda-1)^2+(-1-3\lambda)^2=(-1-2\lambda)^2+(\lambda-3)^2+(-3-\lambda)^2$

$25+20\lambda+4\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+9\lambda^2+6\lambda+1=4\lambda^2+4\lambda+1+\lambda^2-6\lambda+9+9\lambda^2+18\lambda+9$

$27+24\lambda=19+16\lambda$

$24\lambda-16\lambda=19-27$

$8\lambda=-8$

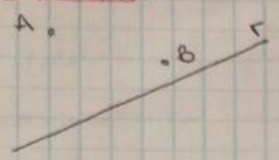
$\lambda=-\dfrac{8}{8} \rightarrow \lambda=-1$

Sustituyo $\lambda=-1$ en el punto genérico

$P(-3+2, -1, -2+3)$

$\boxed{P(-1,-1,1)}$

2 FORMA



Vamos a calcular el plano $\perp$ a $\overline{AB}$ y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$, que se llama PLANO MEDIADOR del segmento AB.

$\overline{AB} = (-2, 3, 1) - (2, 1 - 1) = (-4, 2, 2) = (-2, 1, 1)$

$\overline{AB} = (-4, 2, 2)$ es el normal de π, el plano mediador.

Tomamos mejor $\vec{n} = \frac{1}{2} \quad \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 1)$

$\pi \equiv -2x + y + z + D = 0$

Calculamos M el punto medio de AB

$M(0, 2, 0) \in \pi \rightarrow 0 + 2 + 0 + D = 0$

$D = -2$

Luego: $\pi \equiv -2x + y + z - 2 = 0$

Calculamos $P r \cap \pi \rightarrow$ Como $P \in r \rightarrow P(-3 - 2\lambda, \lambda, -2 - 3\lambda)$

Sustituimos en π:

$-2 \cdot (-3 - 2\lambda) + \lambda + (-2 - 3\lambda) - 2 = 0$

$6 + 4\lambda + \lambda - 2 - 3\lambda - 2 = 0$

$2\lambda + 2 = 0 \rightarrow 2\lambda = -2$

$\lambda = -\frac{2}{2} = -1$

Luego: $\boxed{P(-1, 1, 1)}$

Ejercicio 2: Se considera la recta $r \equiv mx = y = z + 2$, $m \neq 0$ y la recta $s \equiv \dfrac{x-4}{4} = y - 1 = \dfrac{z}{2}$.

a) Halla el valor de m para el que r y s son perpendiculares.

b) Deduce razonadamente si existe algún valor de m para el que r y s son paralelas.

Sol:

Pasamos ambas recta a ecuaciones paramétricas: $r \equiv mx = y = z + 2 \Rightarrow r \equiv \dfrac{x}{1/m} = y = z + 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{1}{m}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$

$s \equiv \dfrac{x-4}{4} = y - 1 = \dfrac{z}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 + 4\mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 2\mu \end{cases}$. De esta forma, ya tenemos un punto y un vector director de cada una de las rectas: $r \equiv \begin{cases} A_r(0,0,-2) \\ \overrightarrow{u_r} = \left(\dfrac{1}{m}, 1, 1\right) \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} A_s(4,1,0) \\ \overrightarrow{u_s} = (4,1,2) \end{cases}$

a) Para que las rectas sean perpendiculares se ha de cumplir que $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \Rightarrow \dfrac{4}{m} + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{-4}{3}$

b) Para que las rectas sean paralelas se ha de cumplir que sus vectores directores sean linealmente dependientes (proporcionales), es decir, $\dfrac{1/m}{4} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{2}$, lo cual obviamente no se cumple pues la segunda igualdad es contradictoria. También se podía haber hecho con rangos, pues si son proporcionales $rang\begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, lo cual no se cumple pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Ejercicio 3: Considera los puntos $A(2,0,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(2,2,1)$ y $D(3,1,0)$.

a) Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos B, C y D.

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

$A(2,0,1)$, $B(-1,1,2)$, $C(2,2,1)$ y $D(3,1,0)$

a) Plano que contiene a B, C, D

b) Halla el simétrico de A respecto de π.

a) $B(-1,1,2)$

$\overrightarrow{BC} = (3,1,-1)$

$\overrightarrow{BD} = (4,0,-2)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix}1&-1\\0&-2\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}3&-1\\4&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&1\\4&0\end{vmatrix}(z-2)=0$$

$$-2(x+1)+2(y-1)+(-4)(z-2)=0$$

$$-2x-2+2y-2-4z+8=0$$

$$-2x+2y-4z+8-2-2=0$$

$$\pi:\ -2x+2y-4z+4=0$$

b) Buscamos $r\perp\pi$ pasando por A.

$\vec{n}(-2,2,-4)=\vec{v}$

$$r\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-4}$$

$$r\equiv\begin{cases}2x-4=-2y\\-4y=2z-2\end{cases}\qquad r\equiv\begin{cases}2x+2y=4\\-2z-4y=-2\end{cases}$$

$$r\cap\pi=\begin{cases}2x+2y=4\\-2z-4y=-2\\-2x+2y-4z=-4\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=2\\+2y+z=+1\\-x+y-2z=-2\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&+2&+1&+1\\-1&1&-2&-2\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&+2&+1&+1\\0&2&-2&0\end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&2&1&1\\0&0&-3&-1\end{array}\right)$$

$3z=1;\ z=\frac{1}{3}$

$2y+z=1$

$2y=1-\frac{1}{3}$, $2y=\frac{2}{3}$

$y=\frac{1}{3}$; $x+y=2$

$x=2-\frac{1}{3}$

$x=\frac{5}{3}$

$P\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

debe ser el punto medio entre A y $S(x,y,z)$.

$A(2,0,1)$

$\frac{5}{3}=\frac{x+2}{2}$; $10=3x+6$; $x=\frac{4}{3}$

$\frac{1}{3}=\frac{y+0}{2}$; $2=3y$; $y=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}=\frac{z+1}{2}$; $2=3z+3$; $z=-\frac{1}{3}$

$$\boxed{S\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)}$$

Ejercicio 4: Considera los puntos $A(0,3,-1)$ y $B(0,1,5)$.

a) Calcula los valores de x sabiendo que el triángulo ABC de vértices A, B y $C(x,4,3)$ tiene un ángulo recto en C.

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos $(0,1,5)$ y $(3,4,3)$ y es paralelo a la recta definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y-z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

<u>*Sol*</u>:

a) Los vectores $\overrightarrow{CA}=(-x,-1,-4)$ y $\overrightarrow{CB}=(-x,-3,2)$ han de ser ortogonales, luego $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow x^2+3-8=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

b) Como el plano que nos piden, π, pasa por $P(0,1,5)$ y $Q(3,4,3) \Rightarrow$ el vector $\overrightarrow{PQ}=(3,3,-2)$ es un vector director de π.

Pasamos r a paramétricas para obtener su vector director , que será director del plano pedido también.

Hacemos $x=\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda-y-z=0 \Rightarrow \lambda-3+2\lambda-z=0 \\ 2\lambda+y=3 \Rightarrow y=3-2\lambda \end{cases} \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-3+3\lambda \end{cases}$ Luego el vector $\vec{u_r}=(1,-2,3)$ es otro vector director del plano.

Tomando el punto $P(0,1,5)$, la ecuación del plano es:

$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z-5 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv 9x-2y+2-6z+30-3z+15-4x-9y+9=0 \Rightarrow \pi\equiv 5x-11y-9z+56=0$$

Ejercicio 5: Dada la recta r definida por $\dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ y el plano π de ecuación $2x-y+\beta z=0$.

Determina α y β en cada uno de los siguientes casos:

a) La recta r es perpendicular al plano π.

b) La recta r está contenida en el plano π.

$r \equiv \dfrac{x-1}{\alpha}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{2}$ Calcula α y β para que:

$\pi \equiv 2x-y+\beta z=0$

a) $r \perp \pi$

b) $r \subset \pi$

a) $\vec{u}(\alpha,4,2)$ Si $r\perp\pi \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{n}$

$\vec{n}(2,-1,\beta)$

$(\alpha,4,2) \parallel (2,-1,\beta)$

$(\alpha,4,2) = -4(2,-1,\beta)$

$(\alpha,4,2) = (-8,4,-4\beta)$

igualando las coordenadas debe ser: $\alpha=-8$, $2=-4\beta$; $\beta=-\frac{1}{2}$

b) $r \subset \pi \Rightarrow \begin{cases} P(1,0,1) \in \pi \Rightarrow 2\cdot 1 - 0 + \beta = 0; \quad \beta = -2 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$

$(\alpha, 4, 2)\cdot(2,-1,-2) = 0$

$2\alpha - 4 - 4 = 0$

$2\alpha - 8 = 0; \quad \alpha = 4$

Ejercicio 6: Calcula la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su punto simétrico respecto de la recta definida por $\begin{cases} 3x - y - z - 2 = 0 \\ x + y - z + 6 = 0 \end{cases}$.

Sol:

Vamos a calcular el plano π que pasa por el punto $P(1,-3,7)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y - z - 2 = 0 \\ x + y - z + 6 = 0 \end{cases}$

Pasamos la recta a paramétricas: Hacemos $x = \lambda \Rightarrow$

$\begin{cases} -y - z = 2 - 3\lambda \\ y - z = -6 - \lambda \end{cases} \Rightarrow (E_2 + E_1) \begin{cases} -y - z = 2 - 3\lambda \\ -2z = -4 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow (-E_1) \begin{cases} y + z = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

Luego, $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$ y su vector director es $\vec{u_r} = (1,1,2)$ que será el vector normal del plano π

$\pi \equiv x + y + 2z + D = 0$. Como ha de pasar por $P(1,-3,7) \Rightarrow 1 - 3 + 14 + D = 0 \Rightarrow D = -12$

Así el plano es $\pi \equiv x + y + 2z - 12 = 0$

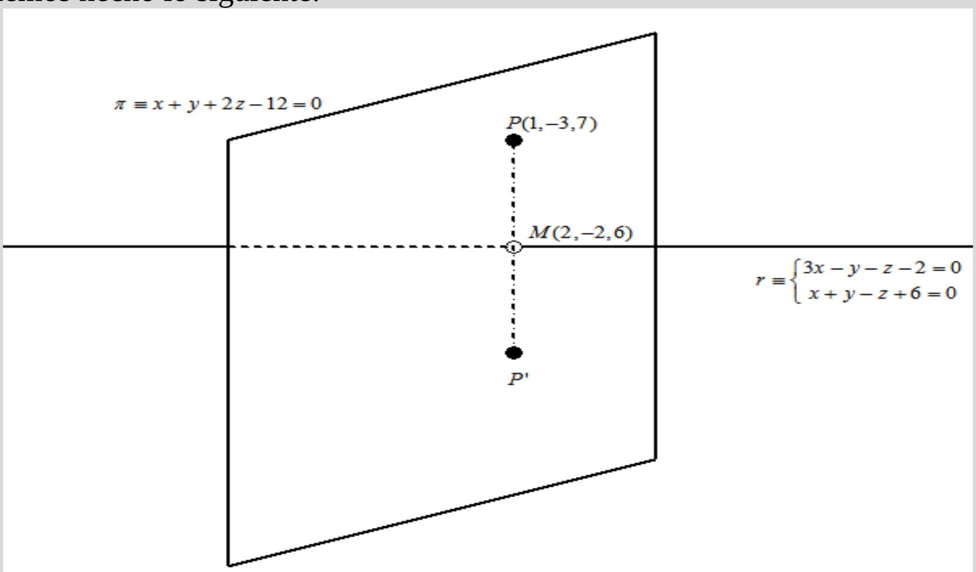
Calculamos ahora el punto de intersección de la recta y el plano: $M = r \cap \pi$, para ellos sutituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano y obtenemos λ.

$\lambda - 4 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$. Por tanto $M(2,-2,6)$

Como nos pide la distancia del punto $P(1,-3,7)$ a su simétrico P', esta distancia será el doble de la distancia del punto $P(1,-3,7)$ al punto $M(2,-2,6)$ y no nos hace falta calcular el punto simétrico P'.

$d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = 2\left|\overrightarrow{PM}\right| \Rightarrow d(P,P') = 2\left|(1,1,-1)\right| = 2\sqrt{3}$

Gráficamente hemos hecho lo siguiente:



Ejercicio 7: Considera el punto $P(1,0,-2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

a) Determina la recta perpendicular a r que pasa por P.
b) Halla la distancia del punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

$P(1,0,-2)$ $\quad r \equiv \begin{cases} 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

a) $\pi \perp r$ y que pase por P.

$r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda-5 \\ z=\lambda-3 \end{cases}$ $\quad \vec{u}(1,2,1)=\vec{n}$ $\quad x+2y+z+D=0$

$1+2\cdot 0+(-2)+D=0$

$D=1$

$$\boxed{\pi \equiv x+2y+z+1=0}$$

$x=\lambda$
$y=2\lambda-5$
$2x+y-7=4z$
$2\lambda+2\lambda-5-7=4z$
$4\lambda-12=4z$; $z=\lambda-3$

b) $d(P,Q)=2d(P,M)$ $\quad M=r\cap\pi=\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x-y=5 \\ 2x+y-4z=7 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ E_2-2E_1 \\ E_3-E_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} E_3/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & 7 \end{pmatrix} E_3+5E_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow -12z=12 \ ; \ z=-1$$

E_2: $y-2z=1$; $y=1+2z$; $y=1-2$; $y=-1$

E_1: $x+2y+z=-1$; $x=-1-2y-z$; $x=2$

$M(2,-1,-1)$ es la proy. ortogonal de P

$P(1,0,-2)$

$d(P,Q)=2d(P,M)=2\cdot|\overrightarrow{PM}|=2\sqrt{(1)^2+1^2+(-1)^2}=2\sqrt{3}\,u$

$\overrightarrow{PM}(-1,1,-1)$

Ejercicio 8: Considera el plano π de ecuación $2x+2y-z-6=0$ y la recta r definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

b) Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.

Sol:

a) Calculamos los punto de corte del plano π con los ejes coordenados:

$P_1=\pi\cap OX\Rightarrow$

$$\begin{cases}2x+2y-z-6=0\Rightarrow x=3\\ y=0 \\ z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$P_1(3,0,0)$

$P_2=\pi\cap OY\Rightarrow$

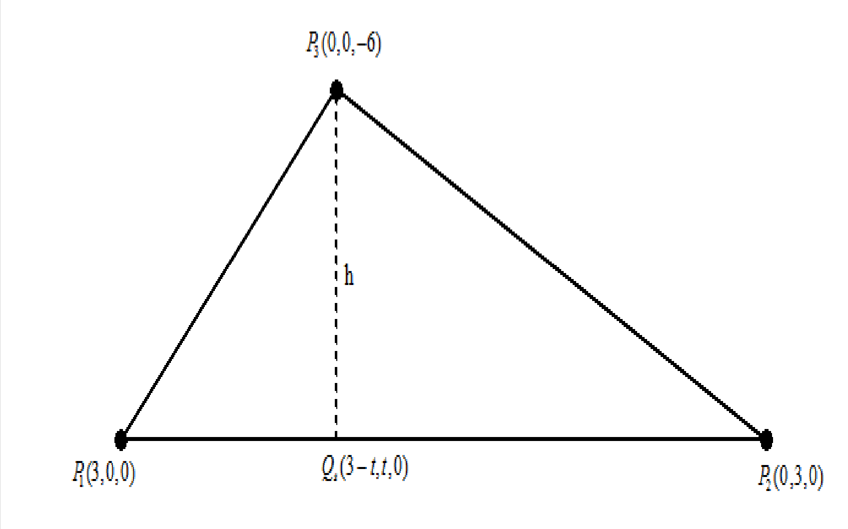
$$\begin{cases}2x+2y-z-6=0\Rightarrow y=3\\ x=0 \\ z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$P_2(0,3,0)$

$P_3=\pi\cap OZ\Rightarrow$

$$\begin{cases}2x+2y-z-6=0\Rightarrow z=-6\\ x=0 \\ y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$P_3(0,0,-6)$



El área como sabemos es: $Área=\frac{base\bullet altura}{2}$, tomaremos como base la distancia entre los puntos $P_1(3,0,0)$ y $P_2(0,3,0)$. Luego: $base=\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\left|(-3,3,0)\right|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Es más complicado el cálculo de la altura pues es la distancia del punto $P_3(0,0,-6)$ a la recta que pasa por P_1 y P_2. Vamos a calcular esta recta en forma paramétrica, pasa por $P_1(3,0,0)$ y por vector director $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,3,0)$, que por comodidad tomaremos $\vec{u}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,1,0)$

Es por tanto la recta: $s\equiv\begin{cases}x=3-t\\ y=t\\ z=0\end{cases}$ Tomamos un punto genérico de esta recta $Q_s(3-t,t,0)$ e imponemos que los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}=(-3,3,0)$ y $\overrightarrow{P_3Q_s}=(3-t,t,6)$ sean ortogonales

$\Rightarrow\overrightarrow{P_3Q_s}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=(3-t,t,6)\cdot(-3,3,0)=0\Rightarrow -9+3t+3t=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$

Luego $Q_s(3-\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)=Q_s(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0)$ (NOTA: Este punto Q_s se podía haber calculado también construyendo el plano que pasa P_3 y es perpendicular a la recta s, y después Q_s es la intersección de dicho plano y la recta s)

Ya tenemos la altura: $altura=\left|\overrightarrow{P_3Q_s}\right|=\left|(\frac{3}{2},\frac{3}{2},6)\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+36}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$

Y así: $Área=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{2}}{2}\Rightarrow Área=\dfrac{27}{2}u^2$

b) Primero tenemos que estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π, pues sólo si son paralelos tiene sentido calcular la distancia entre ellos.

Pasamos $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ a ecuaciones implícitas: $r\equiv\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z}{2}\\ \dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x-z=1\\2y+z=-2\end{cases}$

El sistema asociado a r y π es: $\begin{cases}x-z=1\\2y+z=-2\\2x+2y-z=6\end{cases}$

<u>Matriz de coeficientes</u>: $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\2&2&-1\end{pmatrix}$ Tenemos que $|A|=-2+4-2=0$, y por el menor $\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2\neq0$,

por lo que $rang(A)=2$

<u>Matriz ampliada</u>: $A^*=\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&2&1&-2\\2&2&-1&6\end{pmatrix}$ Y el menor $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&-2\\2&2&6\end{vmatrix}=12-4+4\neq0\Rightarrow rang(A^*)=3$

Por Rouché-Frobenius, se trata de un sistema incompatible, luego recta y plano son paralelos.
Para calcular la distancia de r a π, basta calcular la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano:

$$d(r,\pi)=d(A_r,\pi)=\frac{|2\cdot1+2\cdot(-1)-0-6|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{6}{3}=2$$

<u>Ejercicio 9</u>: Dados los puntos $A(1,0,0),B(0,0,1)$ y $P(1,-1,1)$ y la recta r definida por $\begin{cases}x-y-2=0\\z=0\end{cases}$.

a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia el punto P es de 3 unidades.

b) Calcula el área del triángulo $\overset{\Delta}{ABP}$.

<u>*Sol*</u>:

a) Pasamos r haciendo $y=\lambda$ y tenemos $\begin{cases}x=2+\lambda\\y=\lambda\\z=0\end{cases}$ Tomamos un punto genérico de $r:Q_r(2+\lambda,\lambda,0)$

E imponemos que: $d(Q_r,P)=3\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ_r}\right|=3\Rightarrow\sqrt{(1+\lambda)^2+(\lambda+1)^2+(-1)^2}=3\Rightarrow$

$\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+3}=3\Rightarrow2\lambda^2+4\lambda+3=9\Rightarrow 2\lambda^2+4\lambda-6=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\\lambda=-3\end{cases}$

Hay por tanto dos puntos:
$\lambda=1\Rightarrow Q_1(3,1,0)$ $\qquad\qquad$ $\lambda=-3\Rightarrow Q_2(-1,-3,0)$

b) Vamos a aplicar una fórmula que se dará en el tema siguiente, para ello necesitamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{AP}=(0,-1,1)$. Ahora hacemos lo que veremos que se llama producto vectorial de esos dos vectores: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-1&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=\vec{k}+\vec{i}+\vec{j}=(1,1,1)$. Se tiene que $Área(\overset{\Delta}{ABP})=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}u^2$

NOTA: También se puede hacer como base por altura partido por 2, para ello podemos tomar como base el lado AB y la altura es la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B. Este proceso es mucho más laborioso y largo.

Ejercicio 10: Sea el punto $P(2,3,-1)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P.
b) Calcula la distancia del punto P a la recta r y determina el punto simétrico de P respecto de r.

$P(2,3,-1)$ $\quad r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

a) Hallar $\pi \perp r$ y que pase por $P(2,3,-1)$

b) $d(P,r)$ y determine el simétrico de P respecto de r

a) $\vec{u}_r(0,-2,1)=\vec{n}$ $\qquad -2y+z+D=0$

$P\in\pi \Rightarrow -2\cdot 3-1+D=0$

$-7+D=0$

$D=7$

$\boxed{\pi \equiv -2y+z+7=0}$

b) $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ \dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x=1 \\ y+2z=0 \end{cases}$

$Q=\pi\cap r = \begin{cases} -2y+z+7=0 \\ x=1 \\ y+2z=0 \end{cases}$ $\qquad z=-\dfrac{7}{5}$ $\qquad x=1$

$y=-2z \Rightarrow y=\dfrac{14}{5}$

$\boxed{Q\left(1,\dfrac{14}{5},-\dfrac{7}{5}\right)}$ es la proy. ortogonal

$\vec{PQ}=\left(-1,\dfrac{-1}{5},\dfrac{-2}{5}\right)$

$d(P,r)=|\vec{PQ}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{-1}{5}\right)^2+\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{25}+\dfrac{4}{25}}=\sqrt{\dfrac{30}{25}}=$

$=\sqrt{\dfrac{6}{5}}\,u$

$\boxed{d(P,r)=\sqrt{\dfrac{6}{5}}\,u}$

S simétrico de P

$1 = \frac{x+2}{2}$ $x = 0$

$\frac{14}{5} = \frac{y+3}{2}$ $y = \frac{13}{5}$

$-\frac{7}{5} = \frac{z-1}{2}$ $z = -\frac{9}{5}$

$\boxed{S\left(0, \frac{13}{5}, \frac{-9}{5}\right)}$

Ejercicio 11: Considera los planos π_1 y π_2 dados respectivamente por las ecuaciones:

$(x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1)$ y $2x + y - z + 5 = 0$.

Determina los puntos de la recta r definida por $x = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2.

$\pi_1 \equiv (x, y, z) = (-2, 0, 7) + \lambda(1, -2, 0) + \mu(0, 1, -1)$

$\pi_2 = 2x + y - z + 5 = 0.$

Piden $P \in r$ con $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

siendo $r \equiv x = y + 1 = \frac{z-1}{-3}$

$\pi_1 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z-7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 : 2x + y + z - 3 = 0}$

$\vec{n}_1 = (2, 1, 1)$

$\boxed{\pi_2 : 2x + y - z + 5 = 0}$ $\vec{n}_2(2, 1, -1)$

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$ si $P \in r$, debe ser $P(\lambda, -1+\lambda, 1-3\lambda)$

Si imponemos que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

$$\frac{|2\lambda - 1 + \lambda + 1 - 3\lambda - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2\lambda - 1 + \lambda - 1 + 3\lambda + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{|6\lambda + 3|}{\sqrt{6}}$$

$3 = |6\lambda + 3|$

$3 = 6\lambda + 3 \Rightarrow 0 = 6\lambda \Rightarrow \lambda = 0$

$3 = -6\lambda - 3 \Rightarrow 6 = -6\lambda \Rightarrow \lambda = -1$

Si $P(\lambda, -1+\lambda, 1-3\lambda)$ puede ser $P_1(0,-1,1)$ ó

$P_2(-1,-2,4)$

Ejercicio 12: Dada la recta r definida por $\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z$ y la recta s definida por $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas, recta conocida como perpendicular común.
b) Calcula la distancia entre r y s.

$r \equiv \frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z$ $\quad A(-7,7,0)$

$\vec{u}(2,-1,1)$

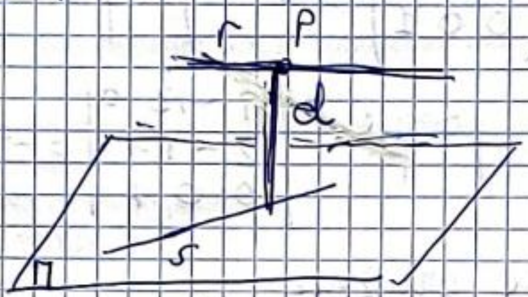
$s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}$ $\quad B(2,-5,0)$

$\vec{v}(0,0,1)$

a) Hallar la recta perpendicular común (recta que corta perpendicularmente a ambas

b) Calcula la distancia entre r y s.

b) Buscamos Π que contiene a s y es paralelo a r



$d(r,s) = d(r,\Pi) =$

$= d(P,\Pi)$

$P \in r$, cualquiera

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y+5)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2) + 2(y+5) = 0$$

$$x + 2y - 2 + 10 = 0 \quad ; \quad \boxed{\pi \equiv x + 2y + 8 = 0}$$

$$d(r,s) = d(r,\pi) = d(A,\pi) = \qquad A(-7,7,0)$$

$$= \frac{\lvert -7 + 2\cdot 7 + 8\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} = \frac{\lvert -7+14+8\rvert}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}}\ u$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{15}{\sqrt{5}}\ u} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = \boxed{3\sqrt{5}\ u}$$

a) Con el producto mixto en el tema siguiente.