HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 12: **PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO. APLICACIONES**

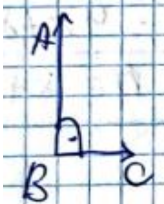
Ejercicio 1: Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

a) Halla un punto C de la recta de ecuación $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z$ que verifica que el triángulo de vértices A, B y C tiene un ángulo recto en B.

b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y D, donde D es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z=6$ con el eje OX

$A(1,0,2)$
$B(1,2,-1)$

$C \in r: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$



a) $C(1+3\lambda, 2\lambda, \lambda)$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{AB}(0,2,-3)$

$\overrightarrow{BC}(3\lambda, 2\lambda-2, \lambda+1)$

$0 \cdot 3\lambda + 2(2\lambda-2) - 3(\lambda+1) = 0$

$4\lambda - 4 - 3\lambda - 3 = 0$

$\lambda - 7 = 0; \quad \lambda = 7$

$\boxed{C(22,14,7)} \Leftarrow C(1+21, 14, 7)$

b) $A(1,0,2)$
$B(1,2,-1)$

$\widehat{ABD}$ siendo D:

D es intersección de $\pi \equiv 2x-y+3z=6$ y el eje OX

$D = \begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ eje X $\Rightarrow 2x=6$, $x=3$ $\qquad D(3,0,0)$

Piden área de $\widehat{ABD}$

$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| \qquad \overrightarrow{AB}(0,2,-3) \quad \overrightarrow{AD}(2,0,-2)$

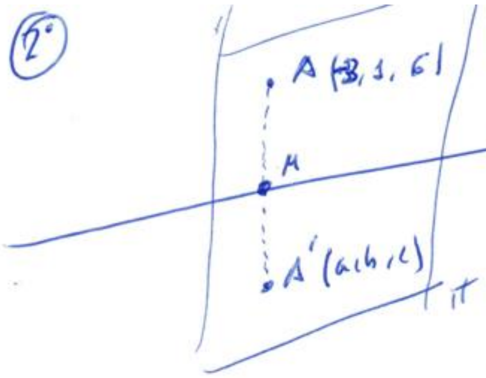
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$

$(-4,-6,-4)$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16+36+16} = \frac{1}{2}\sqrt{68} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17} = \boxed{\sqrt{17}\ u^2} \simeq 4'12\ u^2$$

Ejercicio 2: Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto de la recta r de ecuaciones $x-1=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

2º



$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -3+2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P_r(1,-3,-1) \\ \vec{d_r} = (1,2,2) \end{matrix}$$

Sea π el plano que pasa por A y es $\perp$ a r.
El vector director de r es el normal de π

$\Rightarrow \pi \equiv x+2y+2z+D=0$

Como $A\in\pi \Rightarrow -3+2+12+D=0 \Rightarrow \boxed{D=-11}$

$\Rightarrow \pi \equiv x+2y+2z-11=0$

Calculamos $M = r\cap\pi \Rightarrow M(1+\lambda, -3+2\lambda, -1+2\lambda) \in \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\lambda+2\cdot(-3+2\lambda)+2(-1+2\lambda)-11=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1+\lambda-6+4\lambda-2+4\lambda-11=0 \Rightarrow 9\lambda-18=0 \Rightarrow \boxed{\lambda=2}$

$\Rightarrow M(3,1,3)$

Como M es el punto medio de $\overline{AA'} \Rightarrow \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b+1}{2}, \frac{c+6}{2}\right) = (3,1,3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a-3}{2} = 3 \Rightarrow a=9 \\ \frac{b+1}{2} = 1 \Rightarrow b=1 \\ \frac{c+6}{2} = 3 \Rightarrow c=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A'(9,1,0)}$$

Ejercicio 3: Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z-8}{4}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$

a) Determina la posición relativa de las rectas r y s.

b) Calcula la distancia entre r y s.

3) $r: \dfrac{x+3}{-6} = \dfrac{y-9}{4} = \dfrac{z-8}{4}$ $\quad \vec{u}(-6,4,4) \quad P(-3,9,8)$

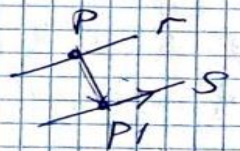
$s: \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-9}{-2} = \dfrac{z-8}{-2}$ $\quad \vec{v}(-3,9,8) \quad P'(3,9,8)$

$\overrightarrow{PP'}(6,0,0)$

a) $\text{rango}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix}-6 & 4 & 4\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix} = 1$

$\text{rango}\begin{pmatrix}\overrightarrow{PP'}\\ \vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -6 & 4 & 4\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix}6 & 0\\ -6 & 4\end{vmatrix} = 24 \neq 0.$

Las rectas son paralelas.



b) $d(r,s) = d(P,s) = \dfrac{|\vec{v} \times \overrightarrow{PP'}|}{|\vec{v}|}$

$= \dfrac{\sqrt{0^2+12^2+12^2}}{\sqrt{9+4+4}} = \dfrac{\sqrt{288}}{\sqrt{17}}$

$\vec{v} \times \overrightarrow{PP'} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -2\\ 6 & 0 & 0\end{vmatrix} =$

$= 0\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k} =$

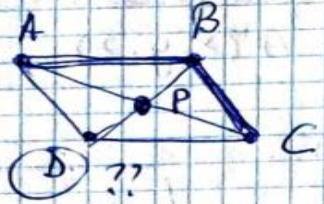
$= (0,-12,12)$

Ejercicio 4: De u paralelogramo $ABCD$ conocemos tres vértices consecutivos $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$

a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que la contiene.

b) Halla el área de dicho paralelogramo.

c) Calcula el vértice D.



a) $A(2,-1,0)$
$B(-2,1,0)$
$C(0,1,2)$

recta que pasa por P y es ⊥ al plano que contiene paralelogramo.

$P = PM_{AC} = \left(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{-1+1}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) = (1,$

(También $P, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$, p.e.)

$\pi(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z\\ -4 & 2 & 0\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix} = 0$

$\overrightarrow{AB} = (-4,2,0)$

$\overrightarrow{AC} = (-2,2,2)$

$4(x-2) - (y+1)\cdot(-8) + 2\cdot(-4) = 0$

$4x - 8 + 8y + 8 - 4z = 0 \qquad 4x + 8y - 4z$

$\pi \equiv x + 2y - z$

$\vec{n}(1,2,-1)$

$r(P, \vec{n}) \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$

$\boxed{r: x-1 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}}$

b) $A = |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \sqrt{4^2+8^2+4^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\ u^2$

$\vec{AB}\ (-4,2,1)$ $\qquad \vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{BC}\ (2,0,2)$ $\qquad (4,8,-4)$

$\vec{AB} \times \vec{BC} = (4,8,-4)$

Ejercicio 5: Se consideran los vectores $\vec{u} = (k,1,1)$, $\vec{v} = (2,1,-2)$ y $\vec{w} = (1,1,k)$ donde k es un número real.

a) Determina los valores de k para los que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Determina los valores de k para los que $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{v-w}$ son ortogonales.

c) Para $k=-1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 2.

$\vec{u}\ (k,1,1)$

$\vec{v}\ (2,1,-2)$

$\vec{w}\ (1,1,k)$

a) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ l. dependientes $\Rightarrow$

$\Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 0$ $\qquad k^2-2+2-1+2k-2k=0$

$k^2-1=0 \Rightarrow k=\pm 1$

b) $\vec{u}+\vec{v} \perp \vec{v}-\vec{w}$

$\vec{u}+\vec{v} = (k+2, 2, -1)$ $\qquad (\vec{u}+\vec{v})(\vec{v}-\vec{w}) = 0$

$\vec{v}-\vec{w} = (1, 0, -2-k)$ $\qquad 1\cdot(k+2) + 2\cdot 0 - 1\cdot(-2-k) = 0$

$k+2+2+k=0$

$2k+4=0 \Rightarrow k=-2$

c) Si $k=-1$ $\quad \vec{v}\ (2,1,-2)$

$\vec{w}\ (1,1,-1)$ $\qquad \vec{z} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 0\vec{j} + 1\vec{k} = (1,0,1)$

Si hacemos

$\sqrt{2}\cdot\vec{z} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ $\qquad$ y $|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{2}$

tiene módulo $= \sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2} = 2$

Ejercicio 6: Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.

<u>*Sol*</u>:

Pasamos la recta $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3$ a paramétricas, poniendo primero la recta en forma continua de forma correcta pues la variable y, no lo está: $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-2} = z-3$. Así ya tenemos $r \equiv \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$

Con ello tomemos un punto genérico de la recta r, que será $P_r(1+4t, 2-2t, 3+t)$

Ahora imponemos que $d(P_r,\pi)=4$, y el plano en forma general $\pi \equiv x-2y+2z-1=0$ ya puesto de forma correcta: $d(P_r,\pi)=\dfrac{|(1+4t)-2\cdot(2-2t)+2\cdot(3+t)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=4 \Rightarrow \dfrac{|2+10t|}{3}=4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2+10t}{3}=4 \Rightarrow t=1 \\ \dfrac{2+10t}{3}=-4 \Rightarrow t=\dfrac{-14}{10}=\dfrac{-7}{5} \end{cases}$

Hay por tanto dos puntos solución:

Si $t=1 \Rightarrow \boxed{P_1(5,0,4)}$ Si $t=\dfrac{-7}{5} \Rightarrow P_2\left(1-\dfrac{28}{5}, 2+\dfrac{14}{5}, 3-\dfrac{7}{5}\right) \Rightarrow \boxed{P_2\left(\dfrac{-23}{5}, \dfrac{24}{5}, \dfrac{8}{5}\right)}$

Ejercicio 7: Determina el punto P de la recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+5}{3}=\dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3,2,1)$.

$P \in r \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=-5+3\lambda \\ z=-4+3\lambda \end{cases}$

$P(-3+2\lambda, -5+3\lambda, -4+3\lambda)$

equidiste de $A(3,2,1)$ y $O(0,0,0)$

$\vec{AP}=(2\lambda-6, 3\lambda-7, 3\lambda-5)$

$\vec{OP}=(-3+2\lambda, -5+3\lambda, -4+3\lambda)$

$(2\lambda-6)^2+(3\lambda-7)^2+\cancel{(3\lambda-5)^2}=(2\lambda-3)^2+\cancel{(3\lambda-5)^2}+(3\lambda-4)^2$

$\cancel{4\lambda^2}+36-\cancel{24\lambda}+\cancel{9\lambda^2}+49-42\lambda=\cancel{4\lambda^2}+9-12\lambda+\cancel{9\lambda^2}+16-\cancel{24\lambda}$

$-42\lambda+12\lambda=9-36-49+16$

$30\lambda=60$; $\lambda=2$

$P(-3+2\cdot2, -5+3\cdot2, -4+3\cdot2)=(1,1,2)$

$\boxed{P(1,1,2)}$

Ejercicio 8: Considera la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ.
b) Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1,2,1)$ sobre la recta r

Sol:

Pasamos la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ a paramétricas haciendo $z=t$, con lo que nos queda el sistema

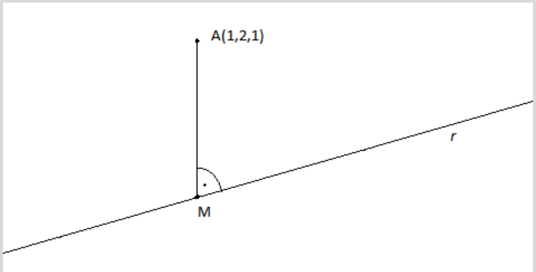
$\begin{cases} x+y=1-t \\ x-2y=-3t \end{cases} \Rightarrow \text{(Por Gauss resolvemos)}(E_2-E_1)\begin{cases} x+y=1-t \\ -3y=-1-2t \Rightarrow y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}t \end{cases}$ Y sustituyen en E_1 obtenemos la x:

$x+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t=1-t \Rightarrow x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t$. Por tanto la recta nos queda: $r\equiv\begin{cases} x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t \\ y=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t \\ z=t \end{cases}$ Ya tenemos un punto por donde pasa la recta, $A_r\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$ y un vector director $\vec{u}=\left(\frac{-5}{3},\frac{2}{3},1\right)$, que para mayor comodidad vamos a usar $\vec{w}=3\vec{u}=(-5,2,3)$

a) Si el plano que nos piden, π, contiene a la recta r, ya tenemos un punto por donde pasa $A_r\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$ y un vector director $\vec{w}=(-5,2,3)$. El otro vector director lo sacamos de la condición de que no corta al eje $OZ\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$ pues eso significa que plano y eje han de ser paralelos, luego el vector director del eje OZ es un vector director del plano π. El vector director del eje, obviamente es: $\vec{k}(0,0,1)$

Por tanto, $\pi\equiv\begin{vmatrix} x-\frac{2}{3} & y-\frac{1}{3} & z \\ -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi\equiv 2x-\frac{4}{3}+5y-\frac{5}{3}=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 2x+5y-3=0}$

b) El punto que es la proyección ortogonal sobre r del punto $A(1,2,1)$, que lo denotamos M, es un punto de la recta r y además los vectores $\overrightarrow{AM}$ y el director de r, $\vec{w}=(-5,2,3)$ han de ser ortogonales.



Como $M\in r\Rightarrow M\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t,\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t,t\right)$, pues es un punto genérico de r

Además $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{w}=0$ pues son ortogonales. Como $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t-1,\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t-2,t-1\right)=\left(\frac{-1}{3}-\frac{5}{3}t,\frac{-5}{3}+\frac{2}{3}t,t-1\right)$,

hacemos el producto escalar: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{w}=\left(\frac{-1}{3}-\frac{5}{3}t,\frac{-5}{3}+\frac{2}{3}t,t-1\right)\cdot(-5,2,3)=\frac{5}{3}+\frac{25}{3}t-\frac{10}{3}+\frac{4}{3}t+3t-3=0\Rightarrow$

$\frac{5}{3}+\frac{25}{3}t-\frac{10}{3}+\frac{4}{3}t+3t-3=0\Rightarrow\frac{38}{3}t-\frac{14}{3}=0\Rightarrow t=\frac{14}{38}=\frac{7}{19}$

Sustituyendo en $M\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{19},\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{19},\frac{7}{19}\right)\Rightarrow\boxed{M\left(\frac{1}{19},\frac{11}{19},\frac{7}{19}\right)}$

NOTA: Este apartado también se puede hacer usando el plano perpendicular a r que pasa por A, y el punto M es la intersección de este plano con la recta r. Se recomienda realizar el ejercicio de esta otra forma y comprobar que da el mismo resultado.

Ejercicio 9: Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación $x+y+z=1$ y forme con los ejes coordenados un triángulo de área $18\sqrt{3}$.

Sol:

Si el plano es paralelo a $\pi \equiv x+y+z-1=0$ ha de ser de la forma $\alpha \equiv x+y+z+D=0$

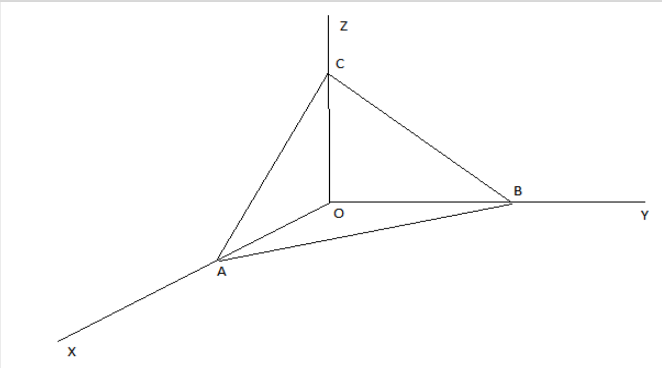
Calculamos los puntos de corte del plano pedido con los ejes coordenados:

$A=\alpha \cap OX \Rightarrow$ Como $OX \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$, sustituimos en α y tenemos que $\lambda+D=0 \Rightarrow \lambda=-D \Rightarrow A(-D,0,0)$

$B=\alpha \cap OY \Rightarrow$ Como $OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$, sustituimos en α y tenemos que $\lambda+D=0 \Rightarrow \lambda=-D \Rightarrow B(0,-D,0)$

$C=\alpha \cap OZ \Rightarrow$ Como $OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$, sustituimos en α y tenemos que $\lambda+D=0 \Rightarrow \lambda=-D \Rightarrow A(0,0,-D)$

Gráficamente tenemos lo siguiente:



Aplicamos la fórmula del área de un triángulo mediante el producto vectorial:

$\acute{A}rea=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|$

Tenemos que:

$\overrightarrow{AB}=(D,-D,0)$

$\overrightarrow{AC}=(D,0,-D)$

Por tanto: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ D & -D & 0 \\ D & 0 & -D \end{vmatrix}=D^2\vec{i}+D^2\vec{j}+D^2\vec{k}=\left(D^2,D^2,D^2\right) \Rightarrow \acute{A}rea=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^4+D^4+D^4}$

$\Rightarrow \acute{A}rea=\frac{1}{2}\sqrt{3D^4}=\frac{1}{2}D^2\sqrt{3}=18\sqrt{3} \Rightarrow D^2=36 \Rightarrow D=\pm 6$. Hay por tanto dos planos solución:

$\boxed{\alpha_1 \equiv x+y+z+6=0}$ y $\boxed{\alpha_2 \equiv x+y+z-6=0}$

Ejercicio 10: Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+z-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{2}=y-1=\frac{z}{3}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a s y es paralelo a r.
b) Calcula la distancia de la recta r al plano π.

Sol:

Pasamos las dos rectas a ecuaciones paramétricas:

En r hacemos $x=\lambda$ y nos queda: $\begin{cases} z=2-\lambda \\ y=-1+\lambda \end{cases}$, así, $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad r \equiv \begin{cases} A_r(0,-1,2) \\ \vec{u}=(1,1,-1) \end{cases}$

En s, es más fácil: $s \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=1+\mu \\ z=3\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad s \equiv \begin{cases} A_s(0,1,0) \\ \vec{v}=(2,1,3) \end{cases}$

a) El plano pedido ha de pasar por $A_s(0,1,0)$ y vectores directores $\vec{v}=(2,1,3)$ y $\vec{u}=(1,1,-1)$, luego:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x+3y-3+2z-z-3x+2y-2=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -4x+5y+z-5=0}$$

b) Como la recta r es paralela a $\pi \Rightarrow d(r,\pi) = d(A_r,\pi) = \dfrac{|-4\cdot 0+5\cdot(-1)+2-5|}{\sqrt{(-4)^2+5^2+1^2}} \Rightarrow \boxed{d(r,\pi)=\dfrac{8}{\sqrt{42}}}$

Ejercicio 11: Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

11) $d(r,s)$

$r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases}$ $\quad s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ $\quad z=\lambda$

$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -9x+3y=-6 \end{cases}$

$-7x=-7$

$x=1$

$y=2-3x$

$y=-1$

$s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{cases}$ $\quad \left.\begin{array}{l} A(6,1,5) \\ \vec{u}(1,-2,-7) \end{array}\right\} r$

$\vec{v}(0,0,1)$

$B(1,-1,0)$

$\overrightarrow{AB}(-5,-2,-5)$

$\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = 2$

$\text{rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = 3$

Las rectas se cruzan

$$d(r,s) = \frac{[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{|12|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}\,u$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i}-\vec{j}+0\vec{k}$$

$(-2,-1,0)$

$$[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}] = \begin{vmatrix} -5 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \otimes$$

$\otimes = 10+0+0-0-0+2 = 12$

Ejercicio 12: Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos $y+z=1$ e $y-3z+3=0$, y que sus otros dos vértices son $A(2,0,1)$ y $B(0,-3,0)$. Halla C y el área del triángulo ABC.

SOLUCIÓN:

Sabemos que C es un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} y+z=1 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$. Vamos a pasarla a paramétricas, y la única opción es hacer $x=\lambda$, pues con las ecuaciones implícitas calculamos y y z. $\begin{cases} y+z=1 \\ y-3z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=0 \end{cases}$

Luego $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$ y C será de la forma $C(\lambda,0,1)$.

Ahora los vectores $\overrightarrow{AC}=(\lambda-2,0,0)$ y $\overrightarrow{BC}=(\lambda,3,1)$ han de ser ortogonales, es decir,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\lambda-2,0,0)\cdot(\lambda,3,1)=0 \Rightarrow \lambda\cdot(\lambda-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \lambda=2 \end{cases}$ por tanto tenemos dos casos:

<u>CASO 1</u>: $\lambda=0 \Rightarrow C(0,0,1) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(-2,0,0)$ y $\overrightarrow{BC}=(0,3,1)$ y el área del triángulo ABC es:

$Área(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|$. Calculamos $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(0,2,-6)$, luego

$Área(\overset{\Delta}{ABC})=\frac{1}{2}\left|(0,-2,6)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{40}=\sqrt{10}\ u^2$

<u>CASO 2</u>: $\lambda=2 \Rightarrow C(2,0,1) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(-0,0,0)$ y esto no es válido pues $A=C$ y no tenemos un triángulo.

Ejercicio 13: Halla la perpendicular común a las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=\beta-1 \\ z=-1 \end{cases}$

<u>SOLUCIÓN</u>:

La recta perpendicular común a dos rectas que se cruzan es una recta que se corta a cada una de las dos rectas y además es perpendicular a ellas. Los dos puntos donde corta a esas rectas son los que están a mínima distancia de las dos rectas y nos permiten calcular también calcular la distancia entre ellas sin tener que usar ninguna fórmula. Tomemos un punto genérico de cada una de las dos rectas: $P(1,1,\alpha)$ y $Q(\beta,\beta-1,-1)$, y de ellos tenemos el vector director de la perpendicular común, $\overrightarrow{PQ}=(\beta-1,\beta-2,-1-\alpha)$. Imponemos que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea ortogonal a los vectores directores de las rectas que son: $\vec{u}=(0,0,1)$ y $\vec{v}=(1,1,0)$

$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}=0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-\alpha=0 \\ \beta-1+\beta-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=\frac{3}{2} \end{cases}$. Con esto tenemos $P(1,1,-1)$, $Q\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)$ y $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2},0\right)$, que por comodidad tomamos el vector $\vec{w}=2\overrightarrow{PQ}=(1,-1,0)$. La perpendicular común es: $p \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1 \end{cases}$

Ejercicio 14: Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x=y \\ z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ z=3 \end{cases}$. Halla la ecuación de una recta que corte a r y s y sea perpendicular al plano $z=0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Pasemos las rectas a ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1-\mu \\ y=\mu \\ z=3 \end{cases}$ y de ellas obtenemos sus puntos genéricos correspondientes, $P(\lambda,\lambda,2)$ y $Q(1-\mu,\mu,3)$. La recta que pase por $P(\lambda,\lambda,2)$ y $Q(1-\mu,\mu,3)$ tiene por vector director $\overrightarrow{PQ}=(1-\mu-\lambda,\mu-\lambda,1)$. Como nos dice el ejercicio, esa recta ha de ser perpendicular al plano $\pi \equiv z=0$, que tiene por vector normal $\vec{n}=(0,0,1)$, por lo que los vectores $\overrightarrow{PQ}=(1-\mu-\lambda,\mu-\lambda,1)$ y $\vec{n}=(0,0,1)$ han de ser proporcionales $\Rightarrow rango\left(\overrightarrow{PQ},\vec{n}\right)=1 \Rightarrow rango\begin{pmatrix} 1-\mu-\lambda & \mu-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}1-\mu-\lambda & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0\\ \begin{vmatrix}\mu-\lambda & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}1-\mu-\lambda=0\\ \mu-\lambda=0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu=\frac{1}{2}\\ \lambda=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$. Ya tenemos dos puntos por donde pasa la recta pedida

$P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2\right)\in r$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)\in s$ y el vector director $\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)$, luego se trata de la recta: $t\equiv\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\omega\end{array}\right.$

<u>NOTA</u>: También podíamos haber hecho el ejercicio calculando las ecuaciones paramétricas del plano $\pi\equiv z=0$ y con ellas obtenemos dos vectores directores del plano, e imponemos que estos vectores fueran ortogonales al vector $\overrightarrow{PQ}$

<u>Ejercicio 15</u>: Las rectas $r\equiv\left\{\begin{array}{l}x+y-2=0\\ 2x+2y+z-4=0\end{array}\right.$ y $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x+y-6=0\\ x+y-z-6=0\end{array}\right.$ contienen dos lados de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado.
b) Halla la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

<u>Sol</u>:
Pasemos las rectas a paramétricas:

En r hacemos $y=\lambda$ y nos queda: $\left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ 2x+2\lambda+z-4=0\Rightarrow z=4-2\lambda-2(2-\lambda)\Rightarrow z=0\end{array}\right.$, así, $r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right.\Rightarrow$

$r\equiv\left\{\begin{array}{l}A_r(2,0,0)\\ \vec{u}=(-1,1,0)\end{array}\right.$

En s hacemos $y=\mu$ y nos queda: $\left\{\begin{array}{l}x=6-\mu\\ x+\mu+z-6=0\Rightarrow z=6-\mu+6+\mu\Rightarrow z=0\end{array}\right.$, así, $s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=6-\mu\\ y=\mu\\ z=0\end{array}\right.\Rightarrow$

$s\equiv\left\{\begin{array}{l}A_s(6,0,0)\\ \vec{v}=(-1,1,0)\end{array}\right.$

Observamos que ambos vectores directores son iguales, $\vec{v}=\vec{u}$, luego las rectas o son paralelas o coincidentes. Como el vector $\overrightarrow{A_rA_s}=(4,0,0)$ es linealmente independiente respecto a los directores pues $rang(\overrightarrow{A_rA_s},\vec{u},\vec{v})=2$, las dos rectas son paralelas y distintas. Con lo cual, el lado del cuadrado es la distancia entre las dos rectas.

a) Aplicamos la fórmula para la distancia entre dos rectas: $lado=d(r,s)=\dfrac{\left|\vec{v}\times\overrightarrow{A_sA_r}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$

$$\vec{v}\times\overrightarrow{A_sA_r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0\end{vmatrix}=-4\vec{k}=(0,0,-4)\Rightarrow lado=d(r,s)=\frac{\sqrt{0^2+0^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\acute{A}rea=lado^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\ \mathrm{u}^2$$

b) El plano que contiene al cuadrado es el plano que contiene a las rectas r y s. Como vectores directores tenemos a $\overrightarrow{A_rA_s}=(4,0,0)$ y a $\vec{u}=(-1,1,0)$, y como punto podemos tomar $A_r(2,0,0)$, luego:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv z = 0}$$

Ejercicio 16: Dados los vectores $\vec{u} = (2,1,0)$ y $\vec{v} = (-1,0,1)$, halla un vector unitario $\vec{w}$ que sea coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

Sol:

Sea $\vec{w} = (a,b,c)$

Si $\vec{w}$ es coplanario con $\vec{u} = (2,1,0)$ y $\vec{v} = (-1,0,1) \Rightarrow rang(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a - 2b + c = 0}$

Si $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (a,b,c)\cdot(-1,0,1) = 0 \Rightarrow \boxed{-a + c = 0}$

Si $\vec{w} = (a,b,c)$ es unitario $\Rightarrow |\vec{w}| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 1}$

Resolvemos el sistema dado por esas tres ecuaciones: $\begin{cases} a - 2b + c = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b \\ -a + c = 0 \Rightarrow a = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hay dos soluciones:

$\vec{w_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\qquad$ $\vec{w_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

Ejercicio 17: Sabiendo que las rectas $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$ se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

Sol:

Pasamos las rectas a paramétricas:

$r \equiv x = y = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} A_r(0,0,0) \\ \vec{d_r} = (1,1,1) \end{cases}$ Un punto genérico de r es $P(\lambda,\lambda,\lambda)$

$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} A_s(1,3,0) \\ \vec{d_s} = (1,1,-1) \end{cases}$ Un punto genérico de s es $Q(1+\mu, 3+\mu, -\mu)$

Si P y Q están a mínima distancia, entonces son los puntos por donde pasa la perpendicular común, y por tanto el vector $\overrightarrow{PQ}$ ha de ser ortogonal a $\vec{d_r} = (1,1,1)$ y a $\vec{d_s} = (1,1,-1)$.

Tenemos que $\overrightarrow{PQ} = (1+\mu-\lambda, 3+\mu-\lambda, -\mu-\lambda)$ y hacemos los productos escalares e igualamos a 0:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{d_r} = 1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda-\mu-\lambda = \mu - 3\lambda + 4 = 0 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{d_s} = 1+\mu-\lambda+3+\mu-\lambda+\mu+\lambda = 3\mu - \lambda + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu - 3\lambda = -4 \\ 3\mu - \lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Luego, los puntos que se encuentran a mínima distancia son: $P(1,1,1)$ y $Q(0,2,1)$

Ejercicio 18: Se sabe que el plano π corta a los semiejes positivos de coordenadas en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades, donde O es el origen de coordenadas.

a) Halla la ecuación del plano π.
b) Calcula el área del triángulo ABC.

c) Obtén un plano paralelo al plano π que diste 4 unidades del origen de coordenadas.

SOLUCIÓN:

a) Con los datos del problema tenemos que los puntos son $A(4,0,0), B(0,4,0)$ y $C(0,0,4)$ de los cuales obtenemos los vectores directores del plano $\overrightarrow{AB}=(-4,4,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,0,4)$, que por comodidad usaremos $\vec{u}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+z-4=0}$$

b) Sabemos que $\text{Área}\left(A\hat{B}C\right)=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Calculemos $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}=(16,16,16)$

$$\text{Área}\left(A\hat{B}C\right)=\frac{1}{2}\left|(16,16,16)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+16^2} \Rightarrow \boxed{\text{Área}\left(A\hat{B}C\right)=8\sqrt{3}\ u^2}$$

c) Al ser paralelo a π tiene que ser de la forma $\pi' = x+y+z+D=0$. Considerando el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, e imponiendo que $d(O,\pi)=4$, tenemos que:

$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=4 \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{3}}=4 \Rightarrow |D|=4\sqrt{3} \Rightarrow D=\begin{cases} 4\sqrt{3} \\ \text{ó} \\ -4\sqrt{3} \end{cases}$$

Tenemos por tanto dos soluciones o planos: $\pi_1' = x+y+z+4\sqrt{3}=0$ y $\pi_2' = x+y+z-4\sqrt{3}=0$

Ejercicio 19: Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,2)$

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A, B y C.

SOLUCIÓN:

a) Por la fórmula sabemos que $Volumen=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$. Y como $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)$ y $\overrightarrow{AD}=(1,-2,1)$, y $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-5$. Por tanto: $Volumen=\frac{5}{6}u^3$

b) Calculemos el plano que pasa por los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$ y $C(-1,0,2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -2x-y-5z+8=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y+5z-8=0$$

. De esta ecuación podemos obtener el vector normal del plano, $\vec{n}=(2,1,5)$, que es el vector director de la recta pedida y como sabemos ha de pasar por $D(2,-1,2)$. Así las ecuaciones paramétricas son: $\boxed{r \equiv \begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2+5\lambda \end{cases}}$