ANEXO: **TEOREMAS ANÁLISIS**

CONTENIDO

1. TEOREMA DE BOLZANO

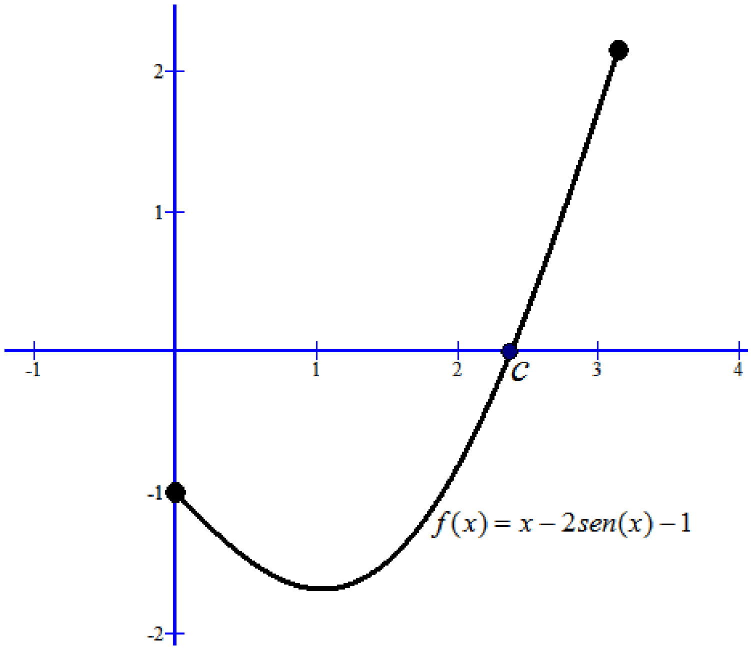
Teorema de Bolzano: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ tal que f toma valores de signos distintos en los extremos a y b del intervalo. Entonces $\exists\ c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Ejemplo: Vamos a demostrar que la ecuación $x-2sen(x)=1$ tiene al menos una solución.

Eso es lo mismo que demostrar que la ecuación $x-2sen(x)-1=0$ tiene una solución, o sea, que la función $f(x)=x-2sen(x)-1$ se anula alguna vez. Esta función, obviamente, es continua en todo $\mathbb{R}$

Tenemos que: $\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(\pi)=\pi-sen(\pi)-1=\pi-1>0 \end{cases}$ Si consideramos el intervalo cerrado $[0,\pi]$, tenemos que la función es continua en $[0,\pi]$ y que $signo(f(0)) \neq signo(f(\pi))$, luego por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0,\pi)$ tal que $f(c)=0 \Rightarrow c-2sen(c)-1=0 \Rightarrow c-2sen(c)=1$

Gráficamente se puede observar lo obtenido:



Corolario (Teorema de los valores intermedios): Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$

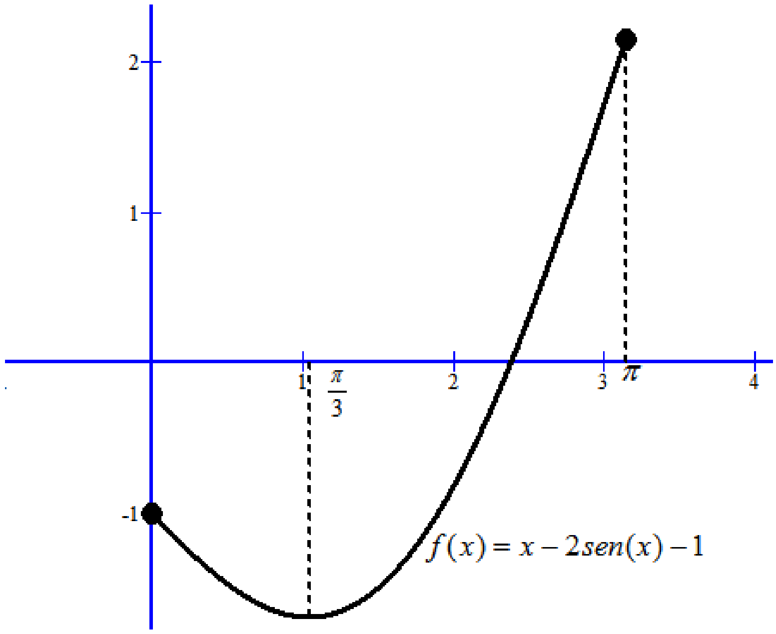
2. TEOREMA DE WEIERSTRASS

Teorema de Weierstrass: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f tiene máximo y mínimo absoluto en dicho intervalo.

Y por el corolario del apartado anterior, la función f toma todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo absolutos.

Si la función f es derivable en (a,b), entonces el máximo y el mínimo absoluto se encuentran en los puntos que anulan f' o bien en los extremos del intervalo.

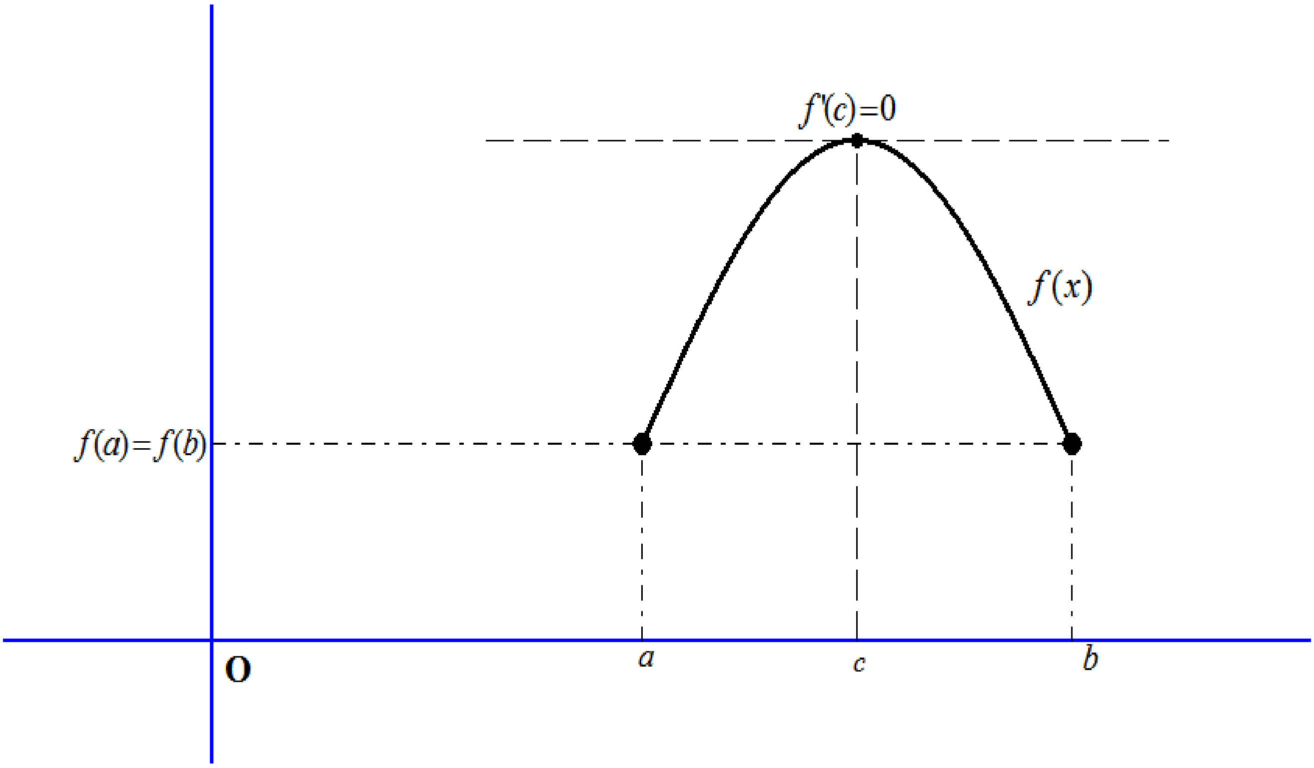
<u>Ejemplo gráfico</u>: En el ejemplo del apartado anterior vemos por la representación gráfica que la función $f(x) = x - 2sen(x) - 1$ en el intervalo $[0, \pi]$ tiene el mínimo absoluto en $x = \frac{\pi}{3}$ y el máximo absoluto en $x = \pi$



3. TEOREMA DE ROLLE

<u>Teorema de Rolle</u>: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Gráficamente, podemos observar lo que nos dice el teorema:



4. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

<u>Teorema del valor medio</u>: Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$, o bien, $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5. TEOREMA DE CAUCHY

<u>Teorema de Cauchy (o teorema del valor medio generalizado)</u>: Sean f y g funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $g'(c)\cdot(f(b)-f(a))=f'(c)\cdot(g(b)-g(a))$, o bien, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$