HOJA 1 DE EJERCICIOS RESUELTOS

UNIDAD 10: **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES**

Ejercicio 1:

Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$ **b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$ **c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) $D = \mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

Ejercicio 2:

Halla el dominio de:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow D = \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$

Ejercicio 3:

Halla las posibles simetrías y periodicidades, di dónde son continuas y dónde derivables:

a) $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ **e)** $y = sen\ x + 1/2\ (sen\ 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje Y.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al centro de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje Y ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* $= \mathbb{R}$

$$f(-x) = sen\ (-x) + \frac{1}{2}\left(sen\ (-2x)\right) = -sen\ x - \frac{1}{2}\left(sen\ (2x)\right) = -f(x)$$

Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

Es periódica de periodo 2π.

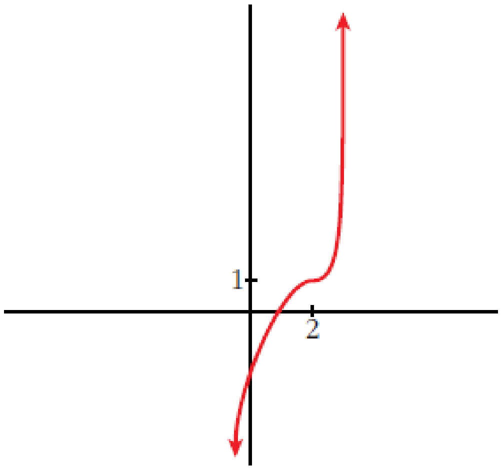
Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4:

Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ **para cualquier** x.



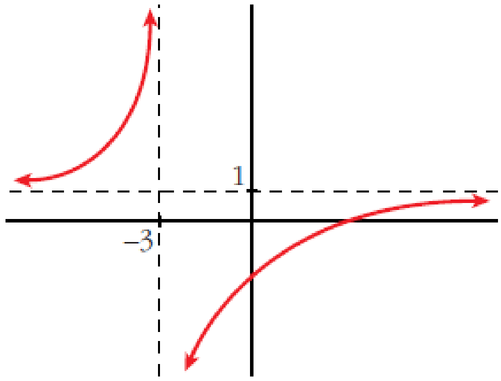
Ejercicio 5:

Representa una función que no esté definida en $x = -3$ y tal que:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \ f(x) < 1 \\ \text{si } x \to -\infty, \ f(x) > 1 \end{cases}$$

No tiene puntos singulares y es creciente.



Ejercicio 6:

De una función $y = f(x)$ tenemos esta información:

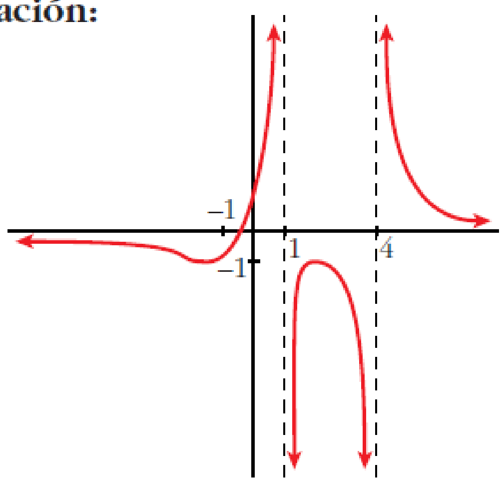
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

Represéntala.



Ejercicio 7:

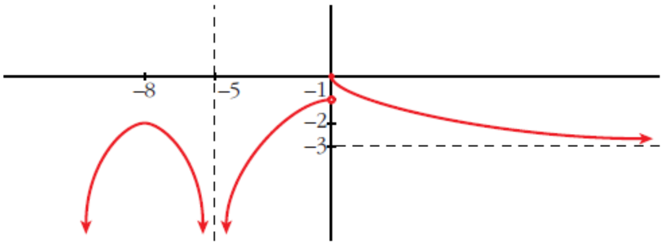
Dibuja la gráfica de una función que cumpla las siguientes propiedades:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -3, \quad \lim_{x \to -5} f(x) = -\infty$$

$f(-8) = -2$, $f(0) = 0$ es el único punto donde $f(x)$ se anula.

$f'(-8) = 0$ y la derivada no se anula en ningún otro punto. Además, $f'(x) < 0$ para todo x positivo.

La función es continua en toda la recta real, salvo en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.



Ejercicio 8:

Dada la función $y = x^3 - 3x + 1$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Extremos relativos.

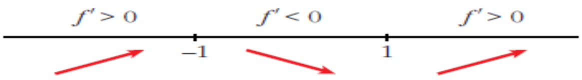
b) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

c) Dibuja la gráfica a partir de los resultados anteriores.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

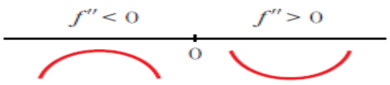
es decreciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, -1)$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f''(x)$:

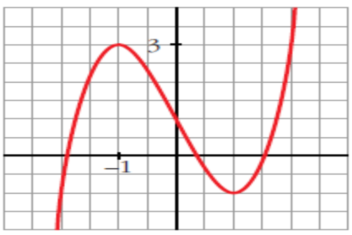


$f(x)$ es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$

c)



Ejercicio 9:

En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

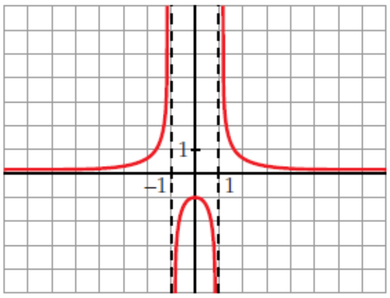
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

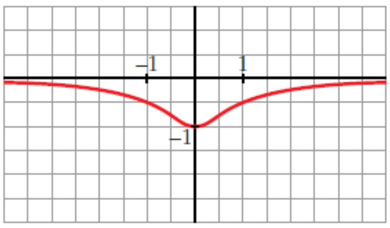
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

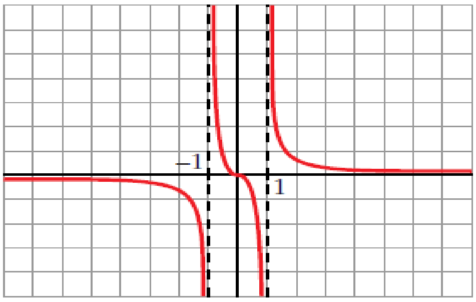
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

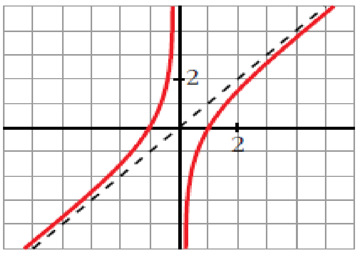
- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

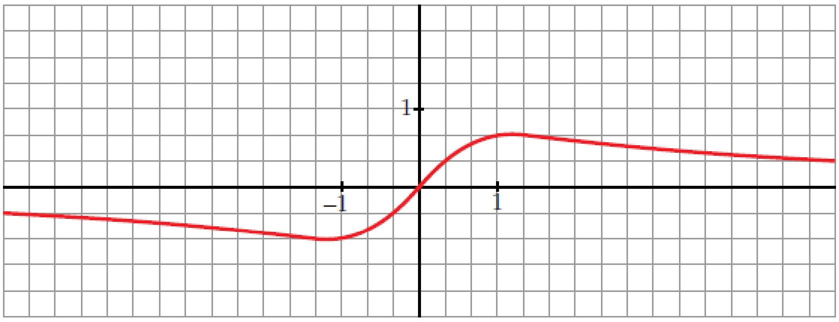
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \quad \to \quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \quad \to$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

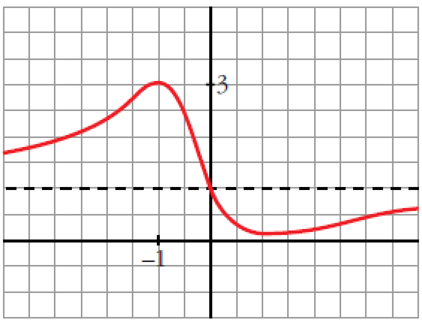
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Gráfica:**



Ejercicio 10:

Representa las siguientes funciones estudiando previamente:

— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto d

— Intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y extremos relativo:

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

d) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

e) $y = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

h) $y = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

i) $y = \dfrac{x^2+4}{x}$

j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

l) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

m) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$

n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

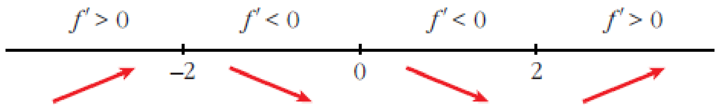
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{2x^2-8}{x^2} = 0 \quad \to \quad x^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Signo de la derivada:



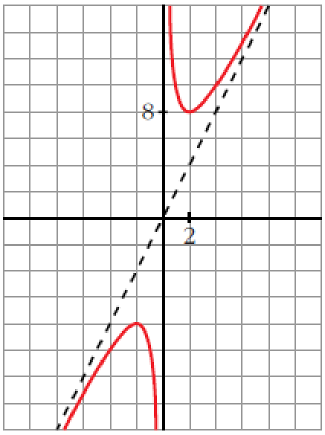
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -8)$

tiene un mínimo en $(2, 8)$

• **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

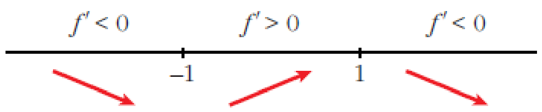
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:

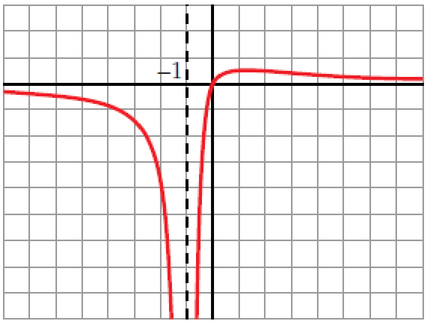


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es creciente en $(-1, 1)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(x^2 - 12) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} f' > 0 & & f' < 0 & & f' < 0 & & f' < 0 & & f' < 0 & & f' > 0 \\ \hline \nearrow & -\sqrt{12} & \searrow & -2 & \searrow & 0 & \searrow & 2 & \searrow & \sqrt{12} & \nearrow \end{array}$$

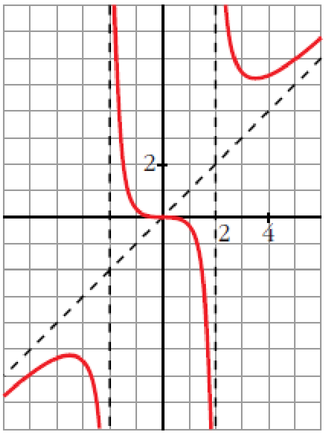
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$

• **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

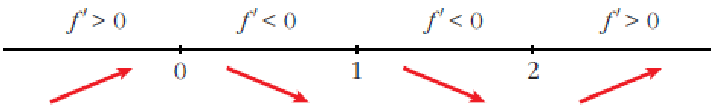
• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



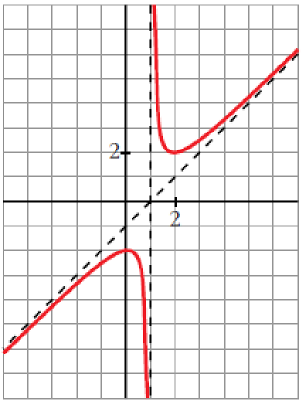
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -2)$

tiene un mínimo en $(2, 2)$

• **Gráfica:**



e) $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota oblicua.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

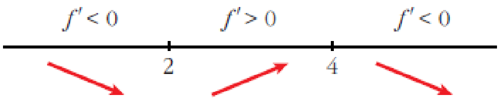
• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x-2)^2 - (4x-12) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-2) - 2(4x-12)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x-2)^3} = \frac{-4x+16}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -4x + 16 = 0 \quad \to \quad x = 4$

Signo de $f'(x)$:

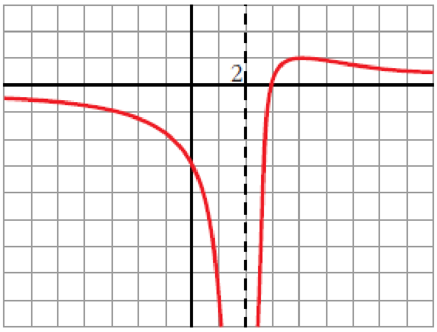


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

es creciente en $(2, 4)$

tiene un máximo en $(4, 1)$

• **Gráfica:**



f) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

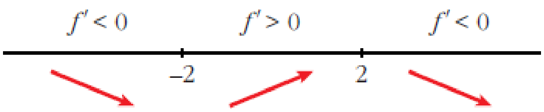
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -x - 2 = 0 \quad \to \quad x = -2$

Signo de $f'(x)$:

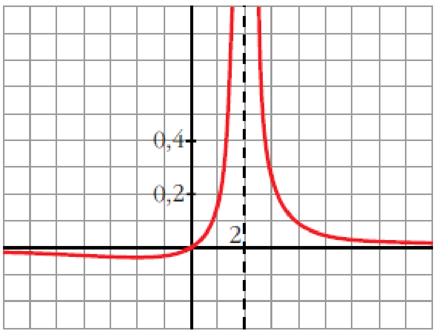


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(-2, 2)$

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$

• **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x - 2 - \dfrac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

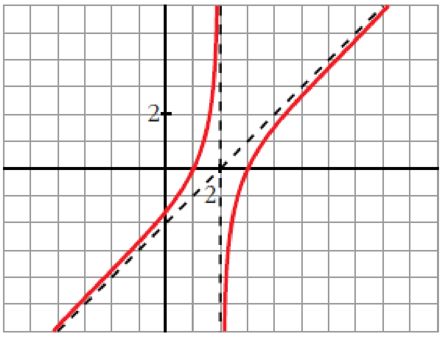
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-2)^2 + 1 = 0 \quad \to \quad$ no tiene solución

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**



h) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical}$$

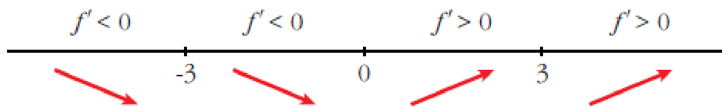
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 18x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

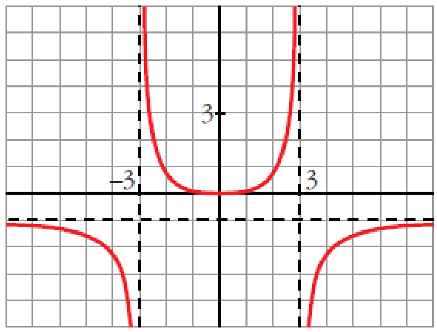


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

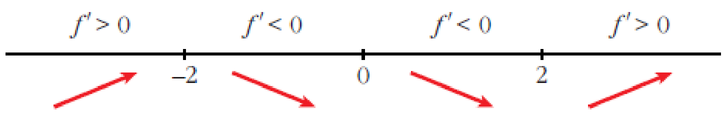
(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



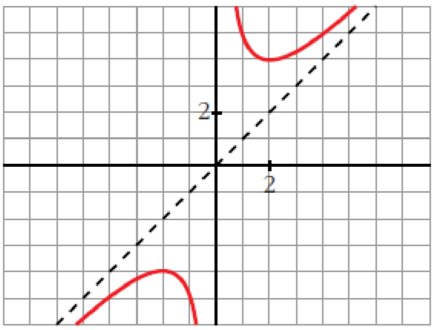
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

tiene un máximo en $(-2, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 4)$

• **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical}$$

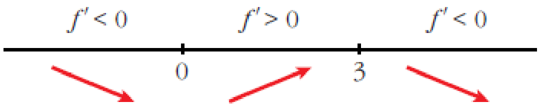
• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

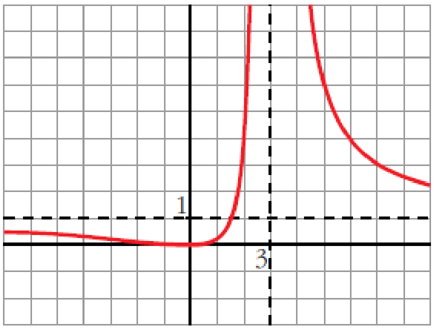


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

es creciente en $(0, 3)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

• **Gráfica:**



k) $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

• **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2 + 1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

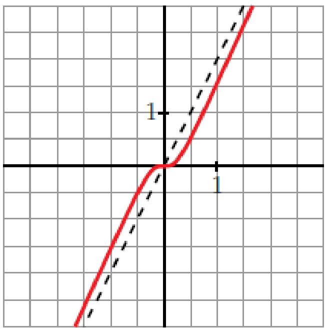
$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2(x^2 + 3) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$

$f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

• **Gráfica:**



l) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \ \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2-8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 2x^3(x^2-8) = 0 \ \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$		$f' > 0$		$f' > 0$		$f' < 0$		$f' < 0$		$f' > 0$
↘	$-\sqrt{8}$	↗	-2	↗	0	↘	2	↘	$\sqrt{8}$	↗

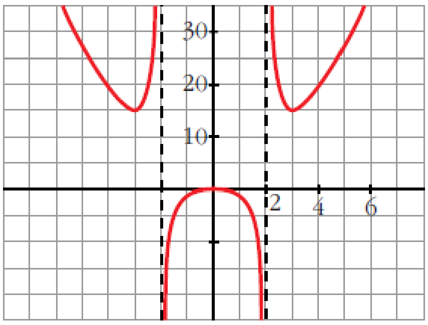
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$

tiene un máximo en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



m) $y = \dfrac{x^3}{x+2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \ \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+2) - x^3}{(x+2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2(x+3) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -3 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:

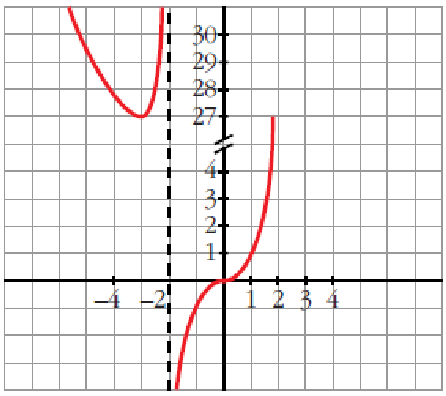
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-3, 27)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

- **Gráfica:**



n) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

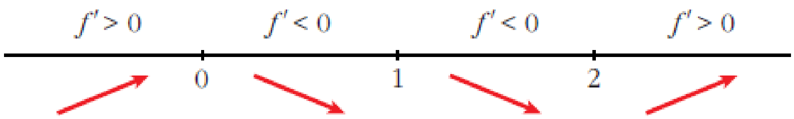
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



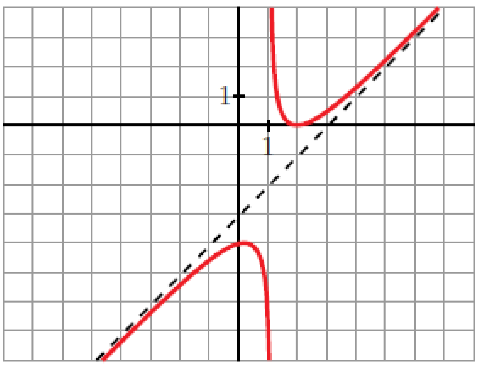
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

tiene un máximo en $(0, -4)$

tiene un mínimo en $(2, 0)$

- **Gráfica:**



Ejercicio 11:

Dadas las siguientes funciones, halla sus asíntotas, estudia el crecimiento y la existencia de máximos y mínimos. Dibuja su gráfica:

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1}$

c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$ **d)** $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -\sqrt{3} \;\; \text{es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = \sqrt{3} \;\; \text{es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 3} = 0 \quad \to \quad y = 0 \;\; \text{es asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$

$$(f(x) > 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3) - e^x \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

$f' > 0$	$-\sqrt{3}$	$f' > 0$	-1	$f' < 0$	$\sqrt{3}$	$f' < 0$	3	$f' > 0$
↗		↗		↘		↘		↗

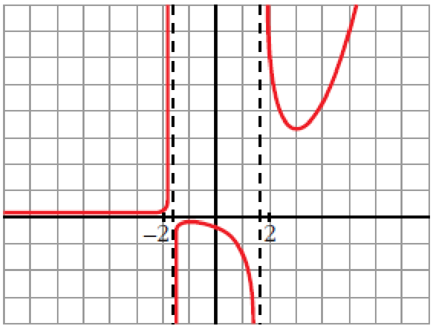
$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, -1\right) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $\left(-1, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, 3\right)$

tiene un máximo en $\left(-1, \dfrac{-1}{2e}\right)$

tiene un mínimo en $\left(3, \dfrac{e^3}{6}\right)$

• **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{x^3}{4x^2 + 1} = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{(1/4)x}{4x^2 + 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$y = \dfrac{1}{4}x$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) > \dfrac{1}{4}x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < \dfrac{1}{4}x$)

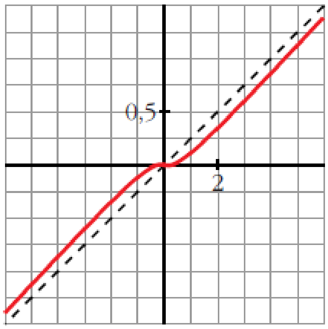
• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2 + 1) - x^3 \cdot 8x}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{12x^4 + 3x^2 - 8x^4}{(4x^2 + 1)^2} = \frac{4x^4 + 3x^2}{(4x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(4x^2 + 3) = 0 \;\to\; x = 0 \;\to\; (0, 0)$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 0 \;\to\; f(x)$ es creciente $\big($tiene un punto de inflexión en $(0, 0)\big)$

• **Gráfica:**



c) $y = x + \dfrac{4}{(x - 1)^2}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

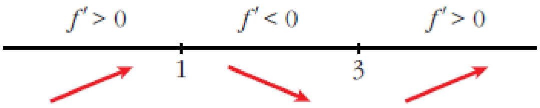
(Si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad (x-1)^3 = 8 \quad \to \quad x - 1 = 2 \quad \to \quad x = 3$$

Signo de $f'(x)$:

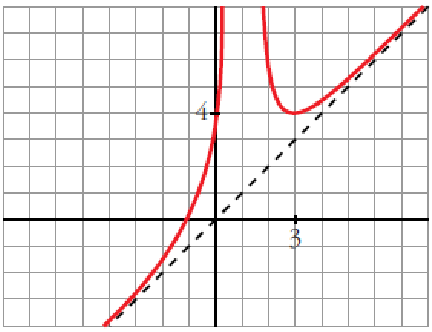


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(1, 3)$

tiene un mínimo en $(3, 4)$

- **Gráfica:**



d) $y = \sqrt{x^2 - 4} - x - 2$

- **Dominio:** $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2\right] = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4} + x - 2}{-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} + x - 2 - 2x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2 - 4} - (x + 2)\right]\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]}{\left[\sqrt{x^2 - 4} + (x + 2)\right]} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x - 8}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$y = -2x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$.

$(f(x) < -2x - 2)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 4} - x - 2\right] = -2$$

$y = -2$ es asíntota horizontal.

$(f(x) < -2)$

• **Crecimiento, máximos y mínimos:**

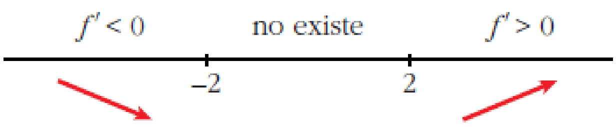
$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$.

$f'(x) = 0 \;\to\; x - \sqrt{x^2 - 4} = 0 \;\to\; x = \sqrt{x^2 - 4} \;\to\; x = x^2 - 4 \;\to$

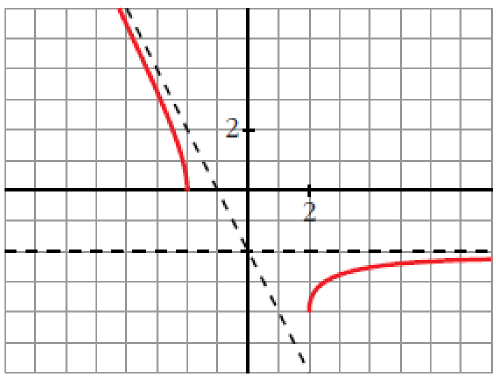
$\to$ no tiene solución $\to$ no hay puntos singulares

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y es creciente en $(2, +\infty)$.

• **Gráfica:**



Ejercicio 12:

Estudia los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ e^x + e^{-x} = 0 \ \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$

  $\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

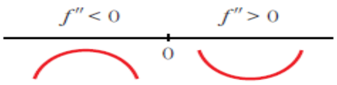
  $f'(x) > 0$ para todo $x \ \rightarrow\ f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \ \rightarrow\ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow\ e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \ \rightarrow\ e^{2x} - 1 = 0$

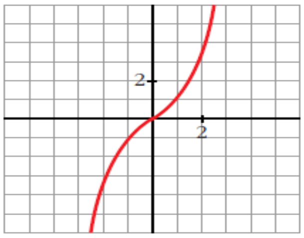
  $e^{2x} = 1 \ \rightarrow\ 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0 \ \rightarrow\ y = 0$

  Signo de $f''(x)$:



  Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**

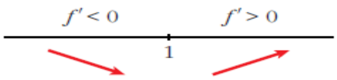


b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de x.

- $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow\ x = 0 \ \rightarrow\ y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

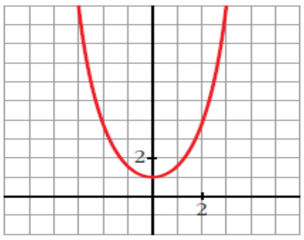


  Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \ \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$ no hay puntos de inflexión

- **Gráfica:**



Ejercicio 13:

Representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{\ln x}{x}$

c) $y = x \ln x$ **d)** $y = (x - 1)\,e^x$

e) $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = x^2 e^{-x}$

g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$ **h)** $y = \ln(x^2 - 1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

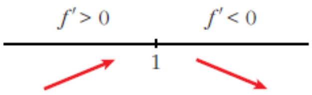
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1 - x)}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$$

Signo de $f'(x)$



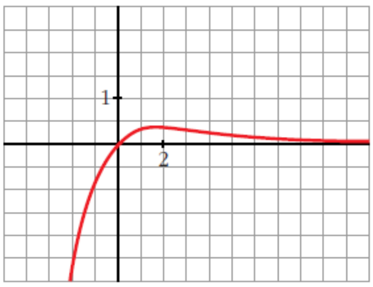
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$

es decreciente en $(1, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{x} = 0$$

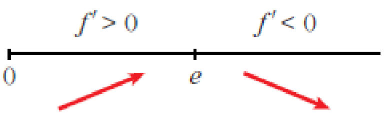
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \ln x = 1 \;\to\; x = e$$

Signo de $f'(x)$:



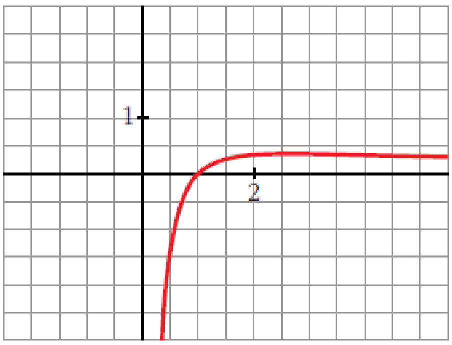
$f(x)$ es creciente en $(0, e)$

es decreciente en $(e, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

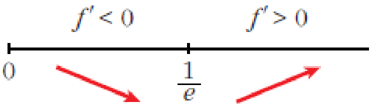
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\; \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \ln x = -1 \quad \rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



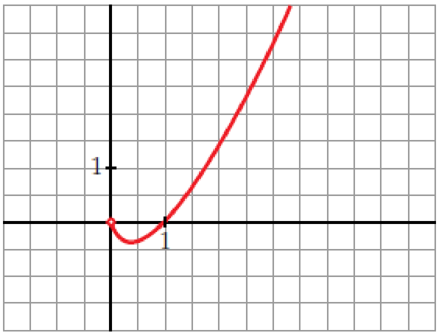
$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$

es creciente en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

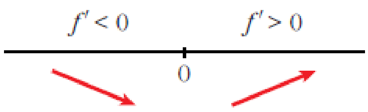
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \rightarrow \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$

es creciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, -1)$

- Corta al eje X en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

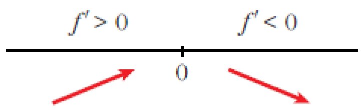
$y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo x).

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ -2x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$

Signo de $f'(x)$:

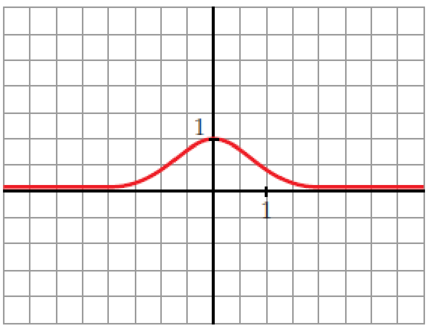


$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

es decreciente en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 1)$

- **Gráfica:**



f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

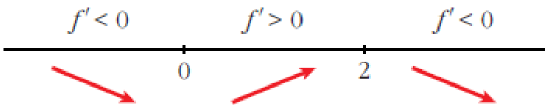
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^{2x}} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2 - x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



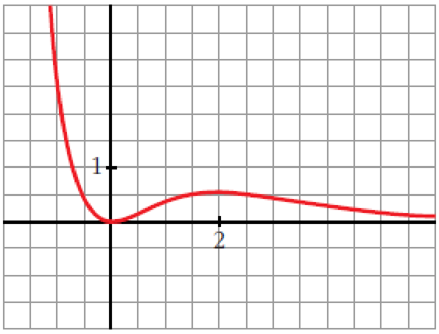
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

es creciente en $(0, 2)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

tiene un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$

- **Gráfica:**



g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

- **Dominio:**

$\ln x = 0 \quad \to \quad x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

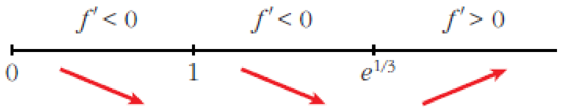
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \cdot (1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2} = \frac{x^2(3 \ln x - 1)}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(3\ln x - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \quad (\text{no vale}) \\ \ln x = 1/3 \quad \to \quad x = e^{1/3} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

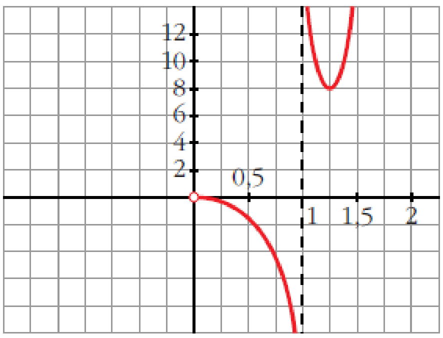


$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$

• **Gráfica:**



h) $y = \ln(x^2 - 1)$

• **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

• **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

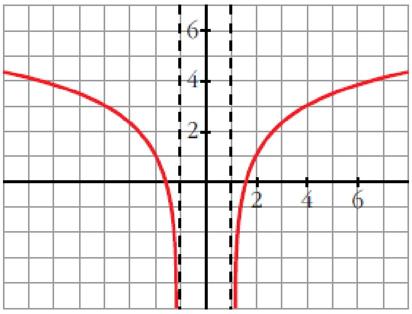
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje X:**

$ln(x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 1 \quad \to \quad x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Puntos: $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

- **Gráfica:**



Ejercicio 14:

Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

a) $y = \sqrt[3]{4 - x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

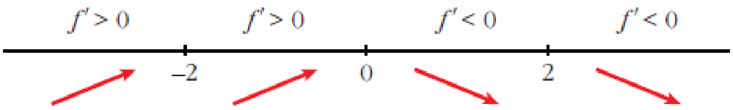
$$\left.\begin{array}{ll}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{-2x}{3\sqrt[3]{(4 - x^2)^2}} \quad \to \quad f(x)$ NO es derivable en $x = -2$ ni en $x = 2$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$



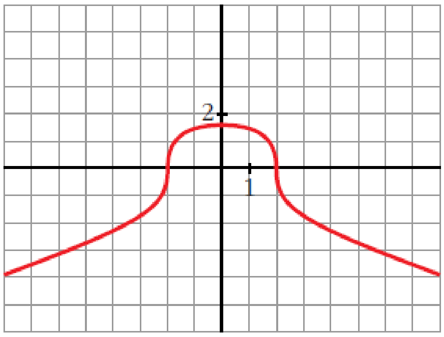
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$

es decreciente en $(0, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \sqrt[3]{4}\right)$

- Corta al eje X en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \dfrac{1}{2}\right)$.

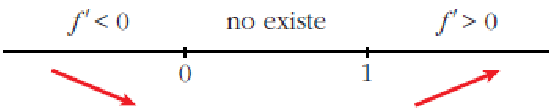
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - 1 = 0 \;\to\; x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares $\left(\text{en } x = \dfrac{1}{2} \text{ no está definida } f(x)\right)$.

Signo de $f'(x)$:

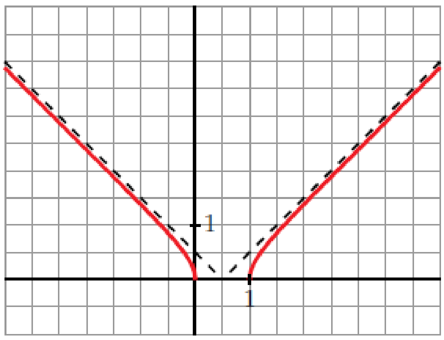


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$

es creciente en $[1, +\infty)$

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

- **Dominio:**

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \;\to\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \;\to\; \text{no tiene solución}$$

$f(x) > 0$ para todo x

$D = \mathbb{R}$

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 5}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{4}{2} = 2$$

$y = -x + 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x + 2)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - x)(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)}{(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + x} =$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

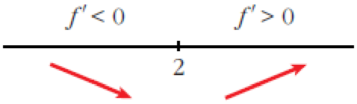
$y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) > x - 2\right)$.

• **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x - 2 = 0 \quad \to \quad x = 2$

Signo de $f'(x)$

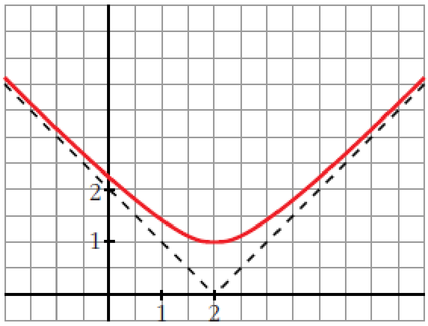


$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2)$

es creciente en $(2, +\infty)$

tiene un mínimo en $(2, 1)$

- **Gráfica:**



d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:** $f(-x) = f(x) \ \to \ f(x)$ es par: simétrica respecto al eje Y.

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \ \to \ x = -1$ es asíntota vertical

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \ \to \ x = 1$ es asíntota vertical

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - 1)}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2 - 1}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x(x^2 - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2 - 1} + x^3 - x} = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 1$$

Como $f(x)$ es par, la recta $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x^2 - 1} - x^2 \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(x^2 - 1)} = \frac{2x(x^2 - 1) - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{2x^3 - 2x - x^3}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x^2 - 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale)} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$

$f' < 0$	$-\sqrt{2}$	$f' > 0$	-1	no existe	0	no existe	1	$f' < 0$	$\sqrt{2}$	$f' > 0$
$\searrow$		$\nearrow$						$\searrow$		$\nearrow$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (1, \sqrt{2})$

es creciente en $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-\sqrt{2}, 2)$ y otro en $(\sqrt{2}, 2)$

- **Gráfica:**