HOJA 2 DE EJERCICIOS RESUELTOS

UNIDAD 7: **FUNCIONES REALES. LÍMITES Y CONTINUIDAD**

Ejercicio 1:

Estudia la continuidad de las funciones en $x = 3$, y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.

a) $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x-15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

a) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x+3) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

Como $f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función es continua en $x = 3$.

b) $f(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x-1} = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-2) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x) \text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto finito.

d) $f(3) = -12$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-15) = -12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \to 3} f(x) \text{, y la función no es continua en } x = 3.$$

Se trata de un punto de discontinuidad inevitable de salto infinito.

e) $f(3) = -2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

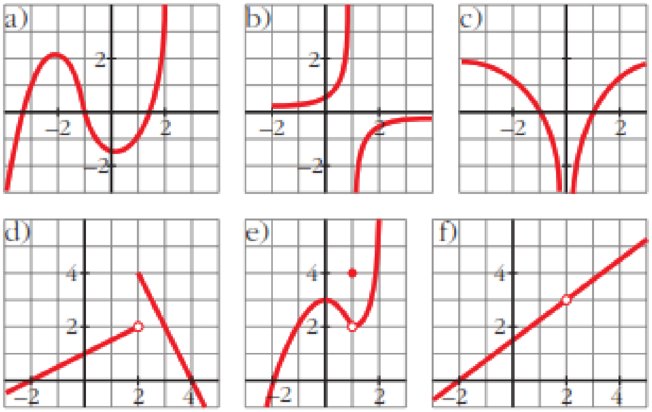
Como $f(3) \neq \lim\limits_{x \to 3} f(x)$, la función no es continua en $x = 3$.

Se trata de un punto de discontinuidad evitable.

Ejercicio 2:

a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

Ejercicio 3:

Comprueba si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **es continua en** $x = 0$.

Recuerda que para que f sea continua en $x = 0$, debe verificarse que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

Ejercicio 4:

Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

Ejercicio 5:

Calcula, en cada caso, el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \displaystyle\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} 5 = 3 + k \;\to\; k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} 5 = 4 + 2k \;\to\; k = 1/2$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \;\to\; k = 1$

Ejercicio 6:

Calcula a para que las siguientes funciones sean continuas en $x = 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 4 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{si } x \ne 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \;\to\; a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

Ejercicio 7:

Calcula el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{si } x \ne 1 \text{ y } x \ne 2 \\ 2k + 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Debe ocurrir que $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2k + 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-2} = -2 \Rightarrow 2k + 1 = -2,\ k = -\frac{3}{2}$$

Ejercicio 8:

Halla los puntos de discontinuidad de la función $y = \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{12}{x^2-9}$ y di si en alguno de ellos la discontinuidad es evitable.

$$y = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2(x+3)-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+6-12}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x-6}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

La función es discontinua en $x = 3$ y en $x = -3$; pues no está definida para esos valores.

- En $x = -3$: $\displaystyle \lim_{x \to -3^-} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = -\infty; \quad \lim_{x \to -3^+} \frac{2}{(x+3)} = +\infty$

  Hay una asíntota vertical en $x = -3$, la discontinuidad no es evitable.

- En $x = 3$: $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{2}{(x+3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

  Luego, en $x = 3$, la discontinuidad es evitable.

Ejercicio 9:

Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3+x^2+x+1)(x-1)}{(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3+x^2+x+1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = \dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 10:

Calcula el valor que debe tener k para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ k - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • Si $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (k - x) = k - 2 \\ &f(2) = 2 + 1 = 3 \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $k - 2 = 3 \rightarrow k = 5$

b) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

• En x = 0:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + k) = k \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ &f(0) = 0 + k = k \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $k = -1$

Ejercicio 11:

Estudia la continuidad de cada una de las siguientes funciones para los distintos valores del parámetro a:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ a - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \le 0 \\ x + 2a & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • En $x \neq 2$, la función es continua.

• En $x = 2$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (a - x^2) = a - 4 \\ &f(2) = 4 + 2a \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $4 + 2a = a - 4 \rightarrow a = -8$

Por tanto, la función es continua si $a = -8$, y es discontinua (en $x = 2$) si $a \neq -8$.

b) • En $x \neq 0$, la función es continua.

• En $x = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{ax} = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 2a) = 2a \\ &f(0) = 1 \end{aligned}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser: $1 = 2a \rightarrow a = \frac{1}{2}$

Por tanto, la función es continua si $a = \frac{1}{2}$, y es discontinua (en $x = 0$) si $a \neq \frac{1}{2}$.

Ejercicio 12:

Estudia la continuidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ la función es continua.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} |x+2| = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 = 1 \\ f(-1) = 1 \end{array}\right\} \text{La función es continua en } x = -1.$$

- Si $x = 1$ $\rightarrow$ No es continua, pues no está definida en $x = 1$; no existe $f(1)$.
  Además:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x+1) = 3 \end{array}\right\} \text{La discontinuidad es de salto (finito).}$$

Ejercicio 13:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$**:**

a) Estudia su continuidad.

b) Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**.**

a) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 - 0 = 1 \end{array}\right\} \text{También es continua en } x = 0.$$

Por tanto, $f(x)$ es continua.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$$

Ejercicio 14:

Se define la función f del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 1 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a y b para que la función sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.

- Para que la gráfica de $f(x)$ pase por el origen de coordenadas, ha de ser $f(0) = 0$, es decir: $f(0) = b = 0$
- Para que la función sea continua (para $x \ne 1$, es una función continua), tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x^2 + ax) = 2 + a \\[2ex] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (\ln x - 1) = -1 \\[2ex] f(1) = 2 + a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Han de ser iguales, es decir:} \\ 2 + a = -1 \quad \to \quad a = -3 \end{array}$$

Por tanto, si $a = -3$ y $b = 0$, la función es continua; y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Ejercicio 15:

Estudia la continuidad en $x = 0$ de la función: $y = 2x + \dfrac{|x|}{x}$

¿Qué tipo de discontinuidad tiene?

En $x = 0$, la función no está definida, luego es discontinua. Como:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad \text{entonces:}$$

$$\lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1; \qquad \lim_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

Ejercicio 16:

Considera la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Determina su dominio. Dibuja su gráfica y razona si se puede asignar un valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, no podemos asignar ningún valor a $f(0)$ para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$ (pues en $x = 0$ no lo es).

Gráfica: