UNIDAD 11: FUNCIONES POLINÓMICAS, RACIONALES, EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS

CONTENIDO

1. FUNCIONES POLINÓMICAS

Una **función polinómica** es aquella función que tiene por expresión algebraica un polinomio, es decir, es de la forma $y = P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio.

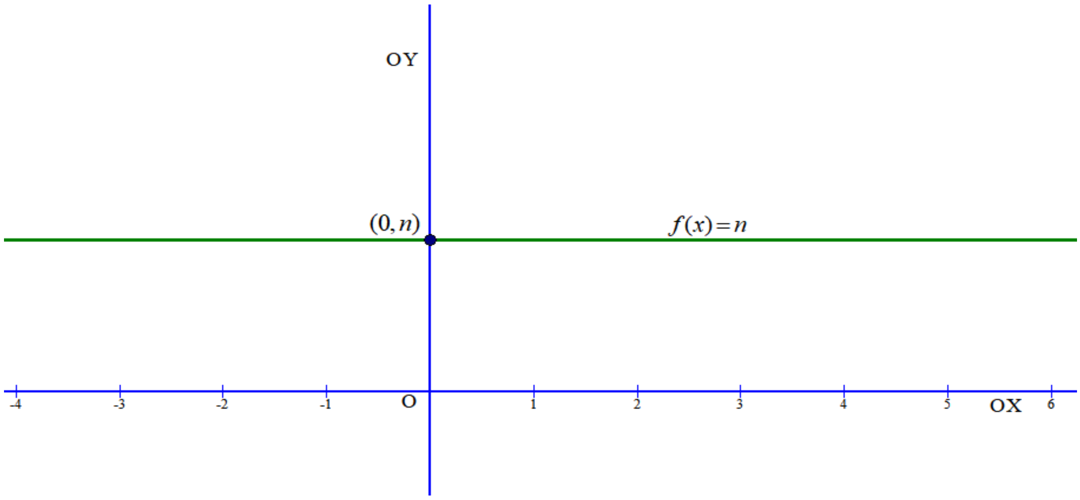
El dominio de las funciones polinómicas es todo $\mathbb{R}$, es decir, $Dom(y) = \mathbb{R}$

Como ejemplo de funciones polinómicas podemos dar:

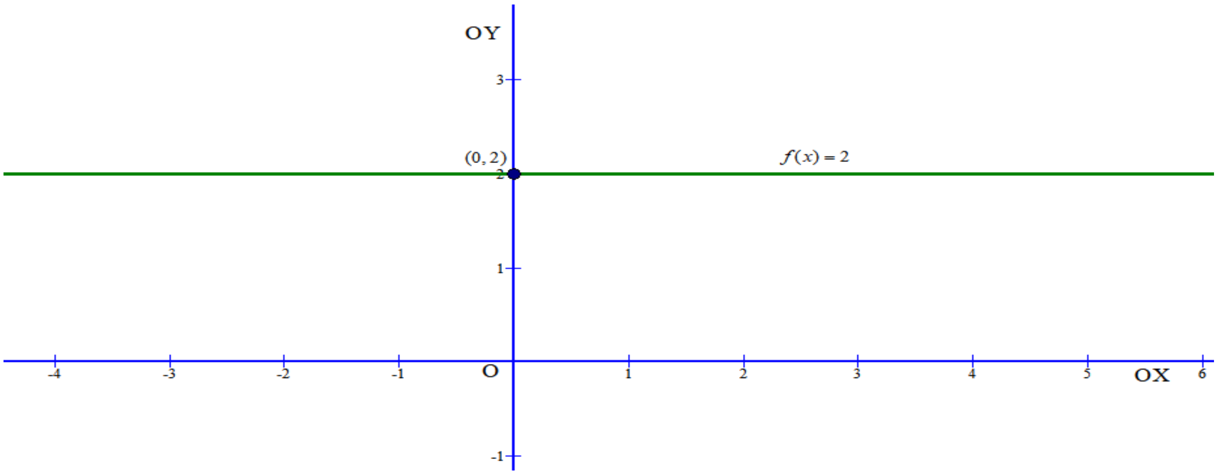
- $f(x) = 2$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 0
- $g(x) = 2x + 1$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 1
- $y = x^2 - 4x + 3$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 2
- $h(x) = x^3 - 8$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 3
- $y = x^4 - x^2$ es una función polinómica definida por un monomio de grado 4

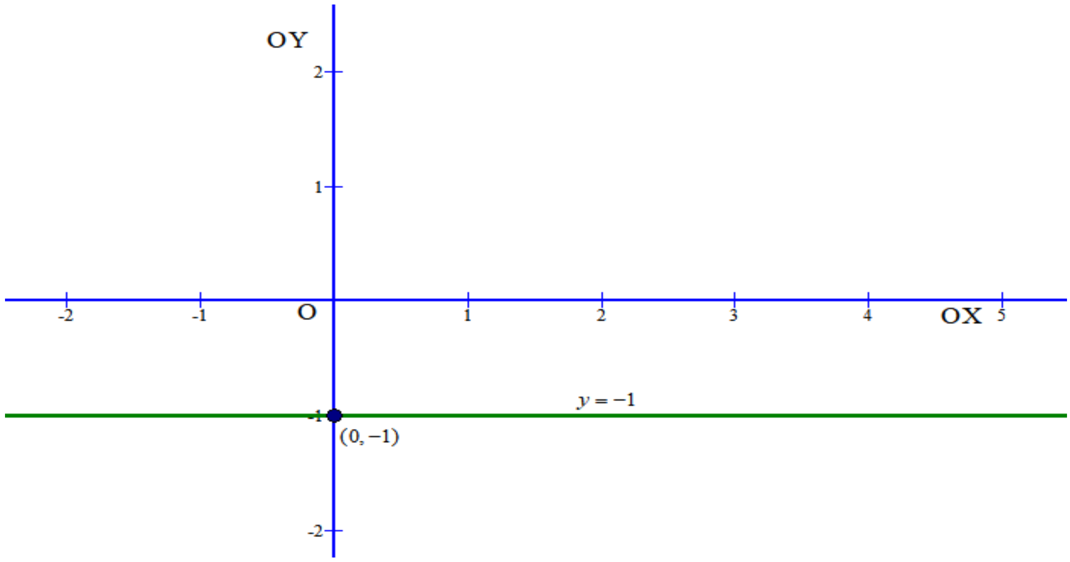
2. RECTAS: FUNCIONES POLINÓMICAS CONSTANTES Y DE PRIMER GRADO

Las **funciones constantes** son aquellas de la forma $f(x) = n$. Su gráfica es una **recta** paralela el eje OX que pasa por en punto $(0, n)$ como se puede ver en el gráfico adjunto

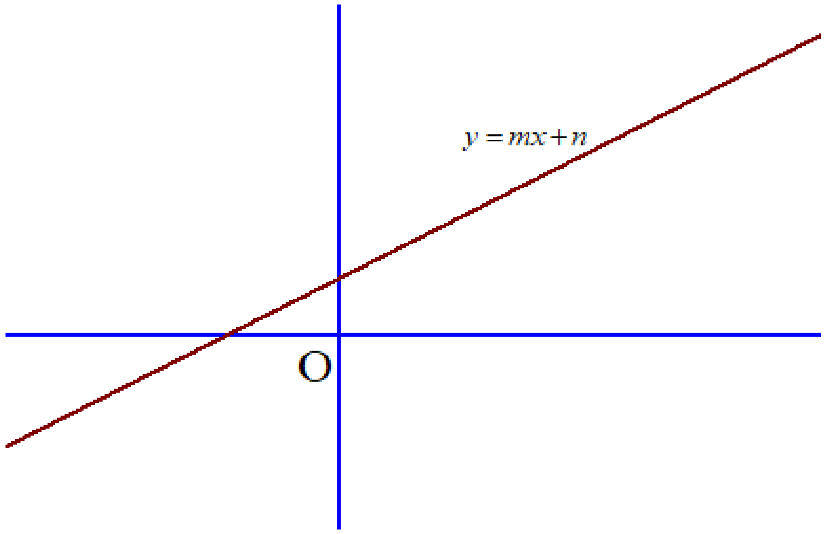


Ejemplo: Las funciones constantes $f(x) = 2$ y $y = -1$ tienen las siguientes gráficas:





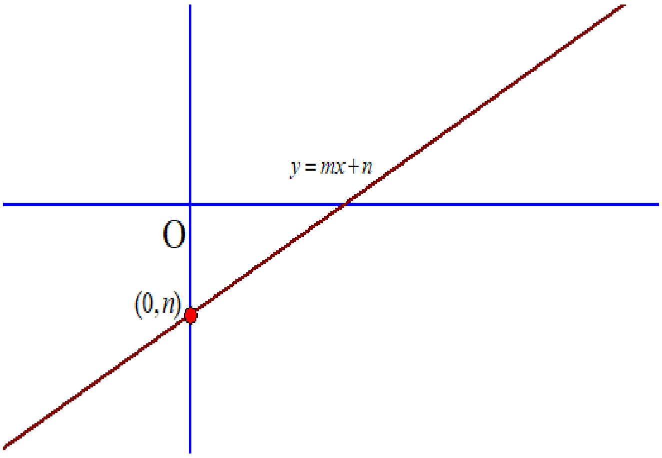
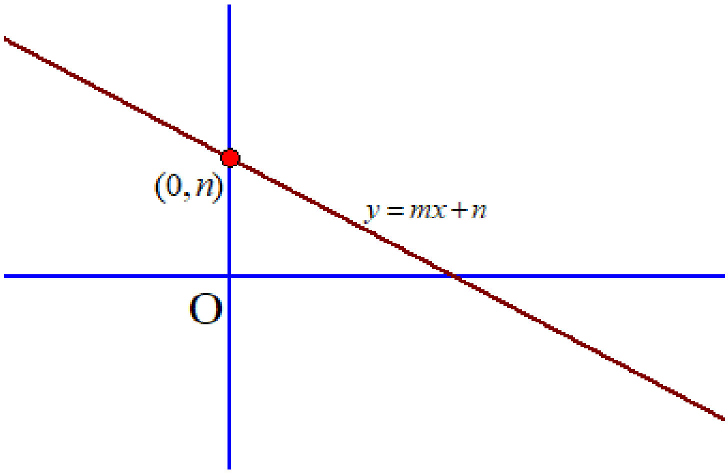
Las **funciones polinómicas de primer grado**, también llamadas **funciones afines**, son aquellas cuya ecuación es del tipo $f(x)=mx+n$. Su representación gráfica es una recta en el plano.



A m se le conoce como **pendiente** de la recta y a n como **ordenada en el origen**.

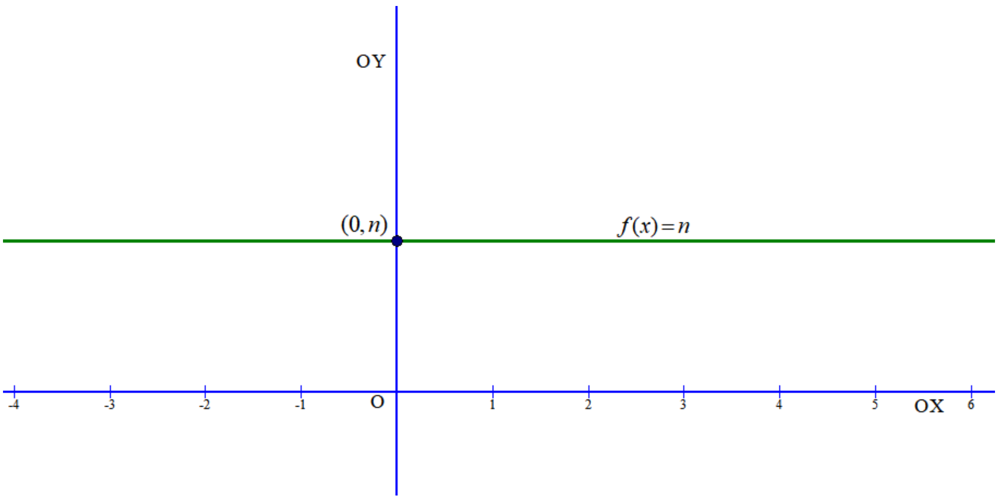
Como características tenemos:

- Su dominio es todo $\mathbb{R}$
- Pasa por el punto $(0,n)$
- Si $m>0$, es decir, la pendiente es positiva, la gráfica es creciente
- Si $m<0$, es decir, la pendiente es negativa, la gráfica es decreciente

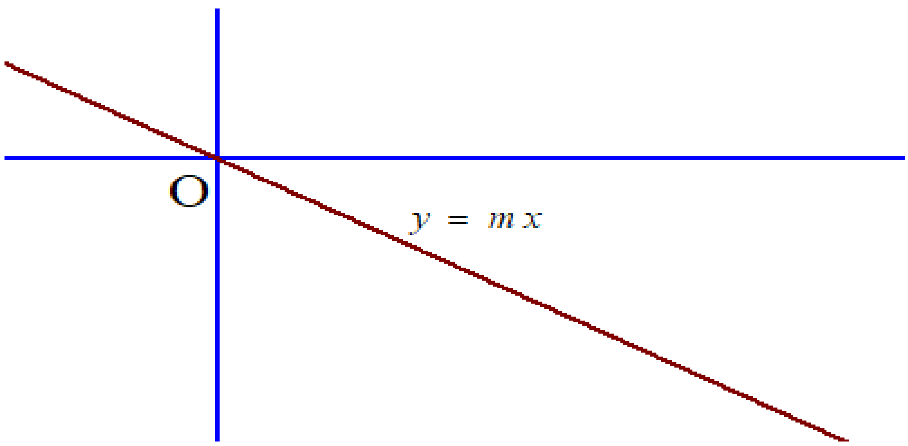
<table>
<tr>
<td>Si $m > 0$, es decir, positiva, la gráfica es creciente y es como sigue:

</td>
<td>Si $m < 0$, es decir, negativa, la gráfica es decreciente y es como sigue:

</td>
</tr>
</table>

Dentro de las funciones afines podemos distinguir dos casos especiales para una función afín $y = mx + n$

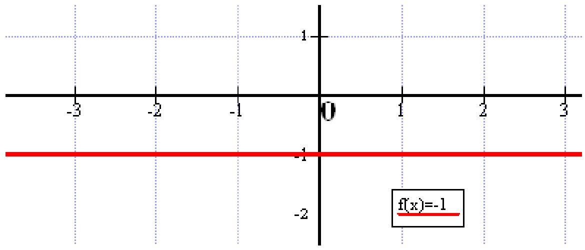
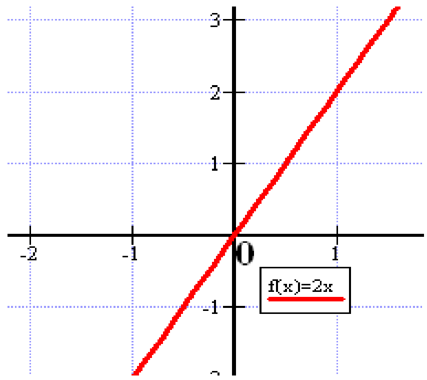
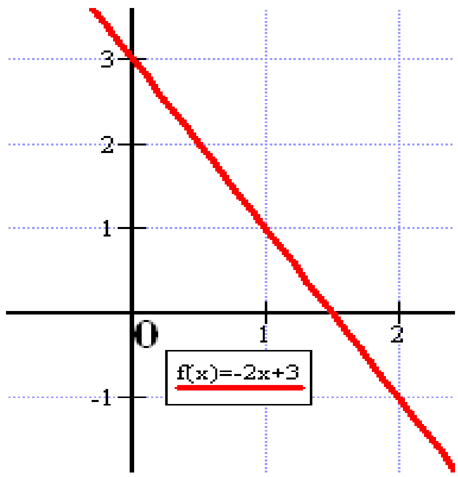
· Si $m = 0$, la función $y = n$ se denomina **función constante** como ya hemos visto anteriormente. Su gráfica es una recta paralela al eje OX , que pasa por el punto $(0, n)$.



· Si $n = 0$, la función $y = mx$ se denomina **función lineal** y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$



Resumiendo:

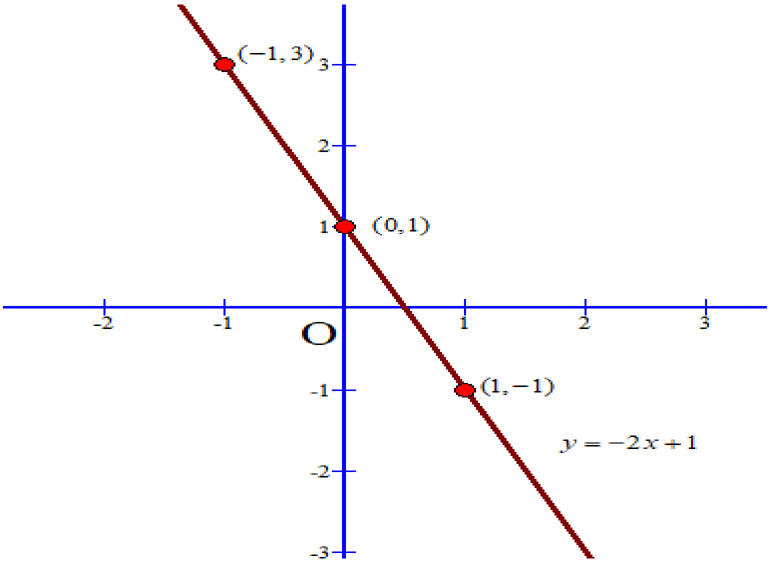
Tipo	**Ejemplo**	**Gráfica**
Constantes $f(x)=k$ Su gráfica es una recta horizontal La pendiente $m=0$	$y=-1$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ $Recorr(f)=\{-1\}$	
Lineales $f(x)=mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas O(0,0) La ordenada en el origen $n=0$	$f(x)=2x$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ $Recorr(f)=\mathbb{R}$	
Afines $f(x)=mx+n$ Su gráfica es una recta inclinada La pendiente y la ordenada en el origen no son nulas $m\neq 0$ y $n\neq 0$	$f(x)=-2x+3$ $Dom(f)=\mathbb{R}$ $Recorr(f)=\mathbb{R}$ La recta pasa por el punto (0,3)	

Para representar este tipo de funciones simplemente hemos de usar una tabla de valores para conocer distintos puntos por donde pasa.

<u>Ejemplo</u>: Vamos a representar gráficamente la función $y=-2x+1$, para ello hacemos una tabla de valores previamente. Ya sabemos que pasa por el punto $(0,1)$ y que es decreciente.

x	y
1	-1

-1	3
0	1



Ejemplo: Representa gráficamente las rectas:

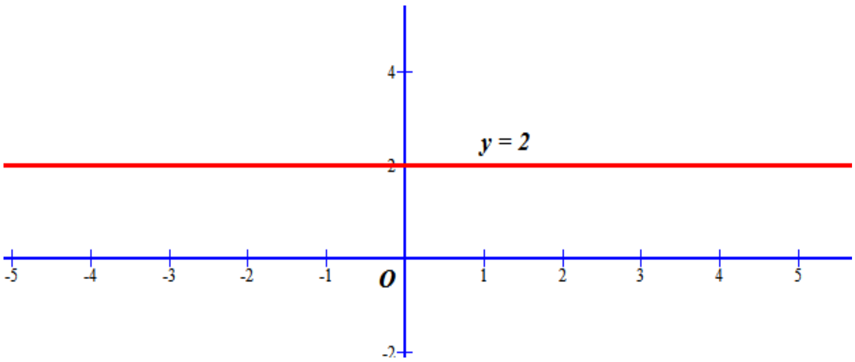
a)

$f(x) = 2$

Es una recta horizontal

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	2	2	2

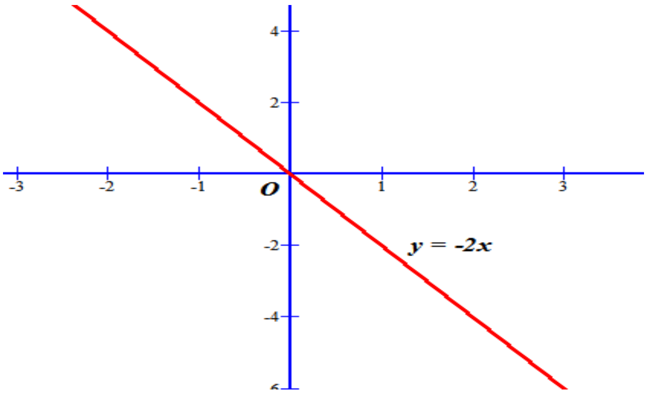


b)

$f(x) = -2x$

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	0	-2	2

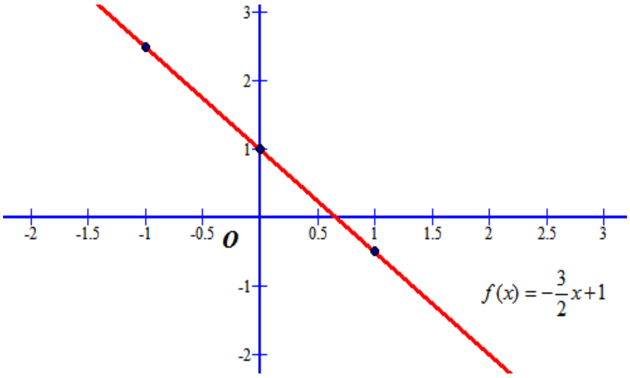


c)

$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 1$$

Tabla de valores

x	0	1	-1
y	1	-1/2	5/2

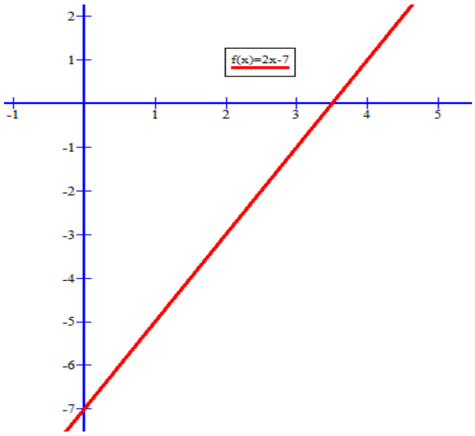


<u>Ejemplo</u>: Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-3)$ y tiene por pendiente 2 y representarla gráficamente.

La recta tiene que ser de la forma $y = mx + n$, de donde ya conocemos la pendiente $m = 2 \rightarrow y = 2x + n$

Como pasa por el punto $(2,-3)$, se ha de verificar la ecuación al sustituir la *x* por 2 y la *y* por 3 →

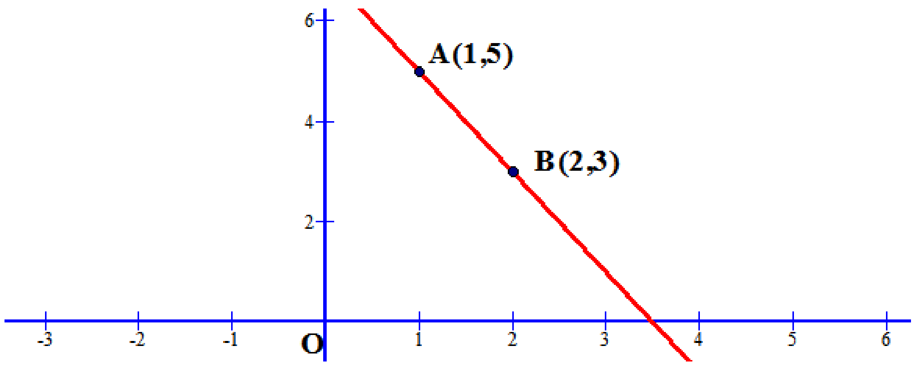
$-3 = 4 + n \rightarrow n = -7$. La recta es: $y = 2x - 7$ y su gráfica es la siguiente:



<u>Propiedad importante</u>: Si una recta pasa por los puntos $A(a,b)$ y $B(c,d)$, la pendiente de dicha recta es:

$$m = \frac{d-b}{c-a}$$

<u>Ejemplo</u>: Dada la recta cuya gráfica es la siguiente, calcular su ecuación o criterio.



1ª forma

La recta tiene que ser de la forma $y = mx + n$

La pendiente la calculamos por la fórmula dada en la propiedad $m = \dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{3-5}{2-1} = -2$

De donde ya conocemos la pendiente $m = -2 \rightarrow y = -2x + n$

Como pasa por el punto $(1,5)$, se ha de verificar la ecuación al sustituir la *x* por 1 y la *y* por 5 →

$5 = -2\cdot 1 + n \Rightarrow 5 = -2 + n \Rightarrow n = 7$. La recta es: $y = -2x + 7$

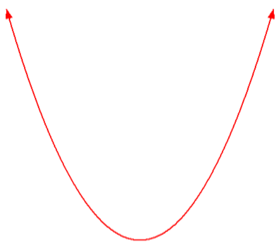
2ª forma

Al tratarse de una recta su ecuación o criterio será de la forma: $y = m\cdot x + n$. Como observamos pasa por los puntos $A(1,5)\ y\ B(2,3)$ y sustituimos en la ecuación y planteamos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para calcular m y n: $\begin{cases} 5 = m\cdot 1 + n \\ 3 = m\cdot 2 + n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m + n = 5 \\ 2m + n = 3 \end{cases}$ →(resolvemos por cualquier método)$\begin{cases} m = -2 \\ n = 7 \end{cases}$. Por tanto, se trata de la recta $f(x) == -2\cdot x + 7$

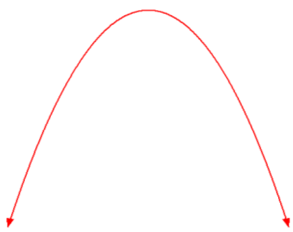
3. PARÁBOLAS: FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Son funciones en las cuales su criterio es un polinomio de 2º grado, es decir, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$

Su dominio es todo R y su gráfica es una parábola, que es una figura como la siguiente:



ó

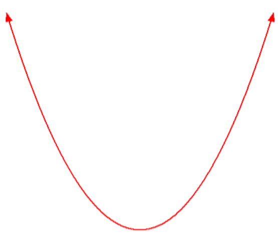


Para dibujarlas no es suficiente con una tabla de valores, sino que es necesario calcularle las siguientes propiedades, que las obtenemos a partir de su criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) *Estudio de la curvatura u orientación*

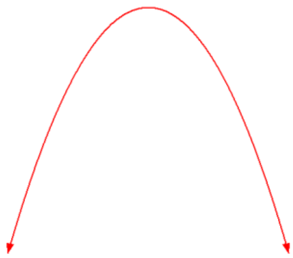
Lo calculamos a partir del signo del coeficiente a

$a > 0$



ó

$a < 0$



Se dice que la parábola es CONVEXA

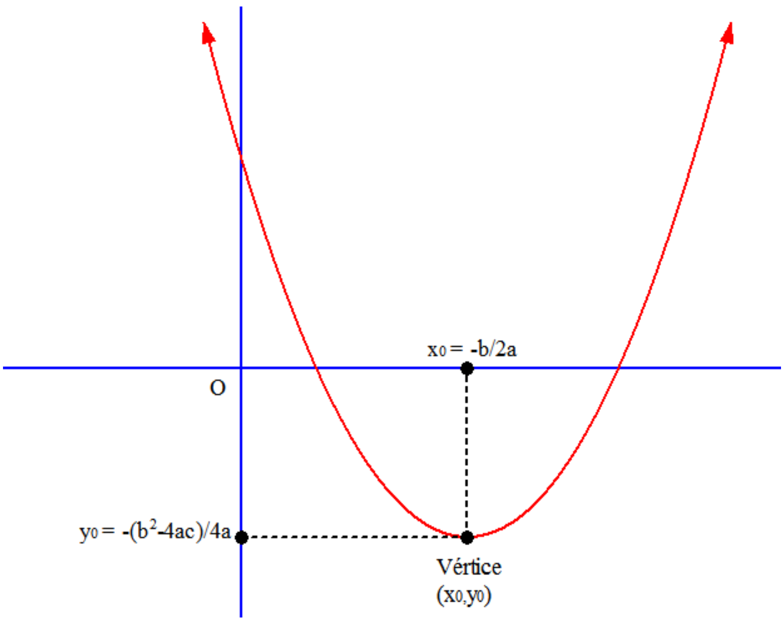
Se dice que la parábola es CÓNCAVA

b) *Cálculo del vértice*

El vértice es el punto máximo o mínimo de la función cuadrática (máximo cuando $a<0$ y mínimo cuando $a>0$)

El vértice V tiene por abscisa $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$, y su ordenada y_0 se obtiene de la ecuación, resultando, para quien quiera saberlo de memoria $V=\left(\dfrac{-b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

En la figura se representa el vértice de una parábola con $a>0$ (es un mínimo absoluto)



c) *Puntos de corte con eje OX*

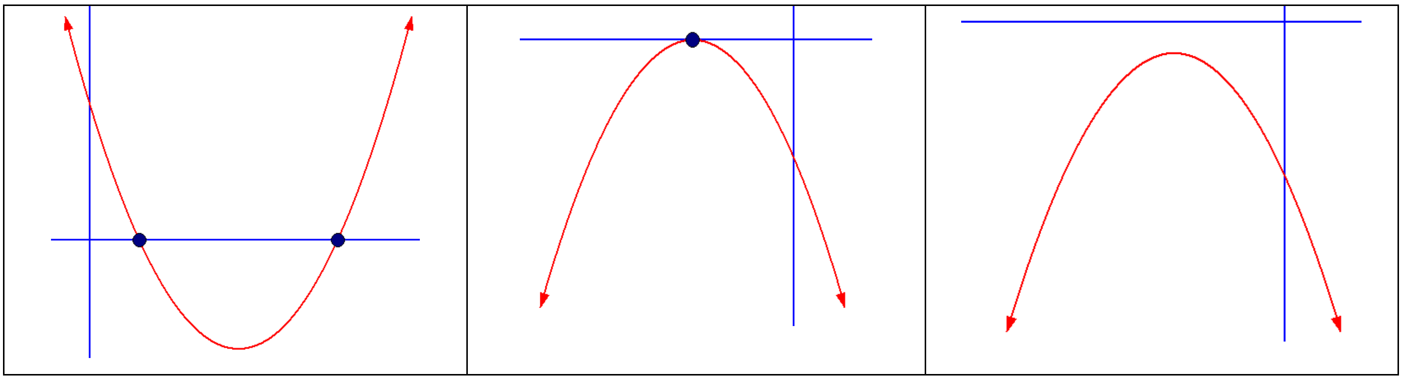
Se trata de calcular los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, por ello tenemos que resolver el sistema asociado:

$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}$, que nos lleva a la ecuación de 2º grado $ax^2+bx+c=0$, en la cual puede ocurrir que:

- *Tenga dos soluciones*: Hay dos puntos de corte con el eje OX
- *Tenga una única solución*: Hay un único punto de corte, la parábola es tangente al eje OX
- *No tenga ninguna solución*: No hay corte con el eje OX

Gráficamente, sería así:

Dos puntos de corte	Un punto de corte	Ningún punto de corte

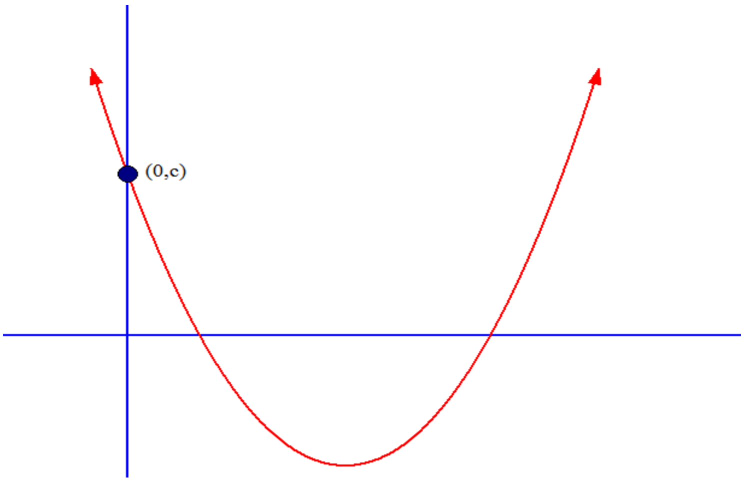


d) Punto de corte con eje OY

Se trata de calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que lo calculamos resolviendo el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$, que es trivial de resolver y nos resulta $\begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}$. Por tanto, siempre es el punto $(0, c)$

Gráficamente,



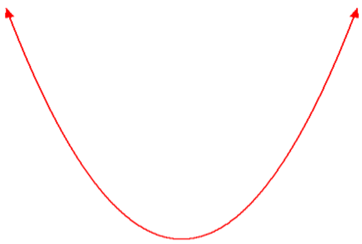
e) Tabla de valores

Poco que explicar en este punto, sólo que es conveniente darle valores próximos a la abscisa del vértice para que no nos salgan valores muy elevados

Ejemplo: Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 5x + 4$

Vamos a ir viendo paso a paso las características de la parábola

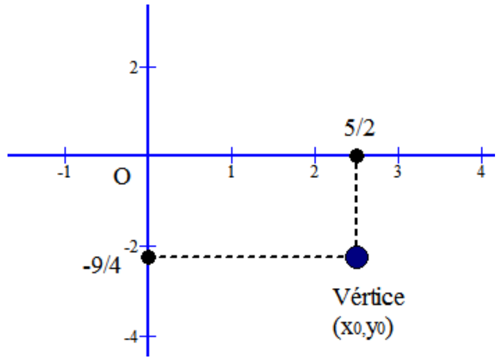
- Curvatura: En este caso tenemos que $a = 1$, luego la parábola es convexa



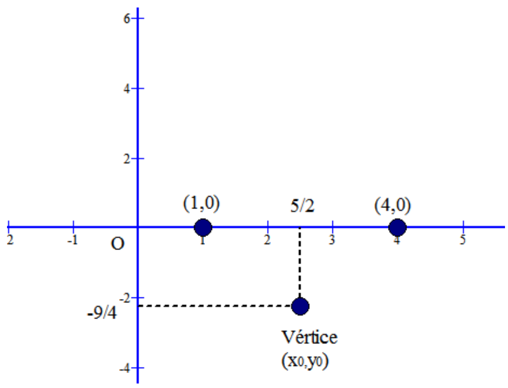
- Vértice: Lo calculamos con $V=\left(\frac{-b}{2a},-\frac{b^2-4\cdot a\cdot c}{4\cdot a}\right)$, teniendo en cuenta que $a=1,\ b=-5$ y $c=4$

$$V=\left(\frac{-(-5)}{2\cdot 1},-\frac{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}{4\cdot 1}\right)\Rightarrow V=\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$$

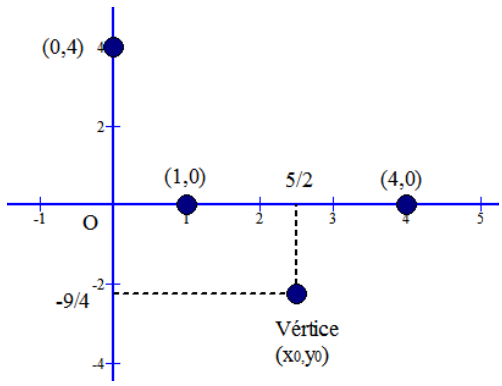
Ya tenemos un punto por donde pasa la parábola y es el vértice, que en este caso es el mínimo absoluto



- Cortes eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y=x^2-5x+4 \\ y=0 \end{cases}$ → $x^2-5x+4=0$ → $x=\begin{cases}1\\4\end{cases}$ Por tanto, los puntos de corte son: $(1,0)$ y $(4,0)$



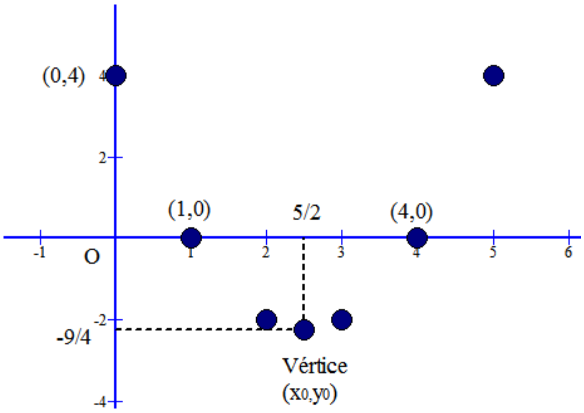
- Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c)=(0,4)$



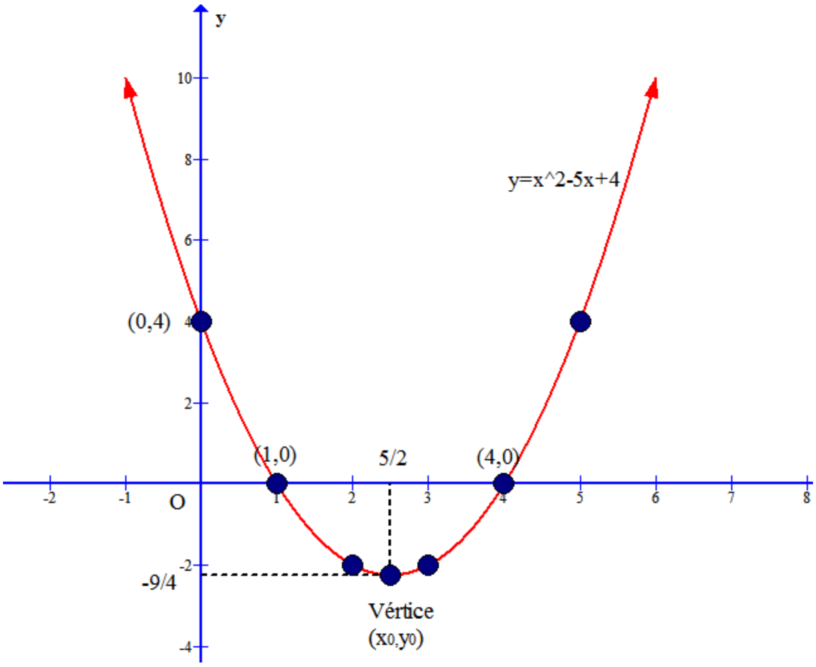
- Tabla de valores: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5

y	-2	-2	4



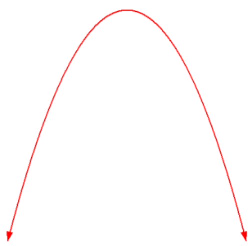
Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\text{Im}(f) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

Ejemplo: Representa gráficamente la parábola $y = -2x^2 - 1$

- Curvatura: En este caso tenemos que $a = -2$, luego la parábola es cóncava

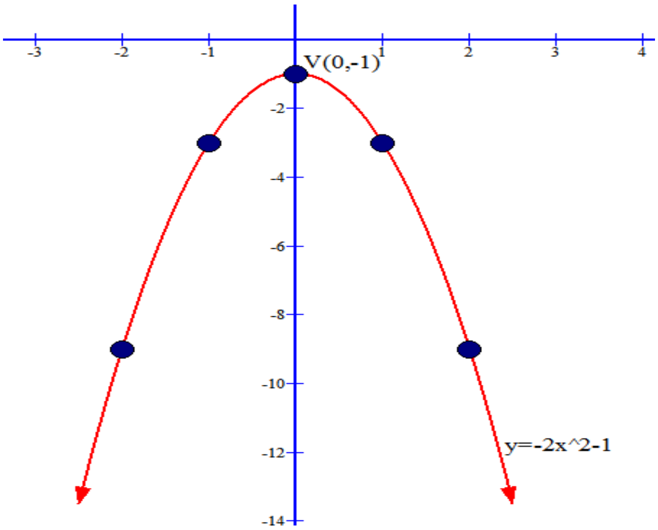


- Vértice: $x_0 = \frac{-0}{2\cdot(-2)} = 0$ → $y_0 = -1$. Luego $V(0,-1)$

- Corte eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases}$ → $-2x^2 - 1 = 0$ → No existen soluciones, no hay cortes
- Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0, c) = (0, -1)$. Coincide con el vértice
- Tabla de valores:

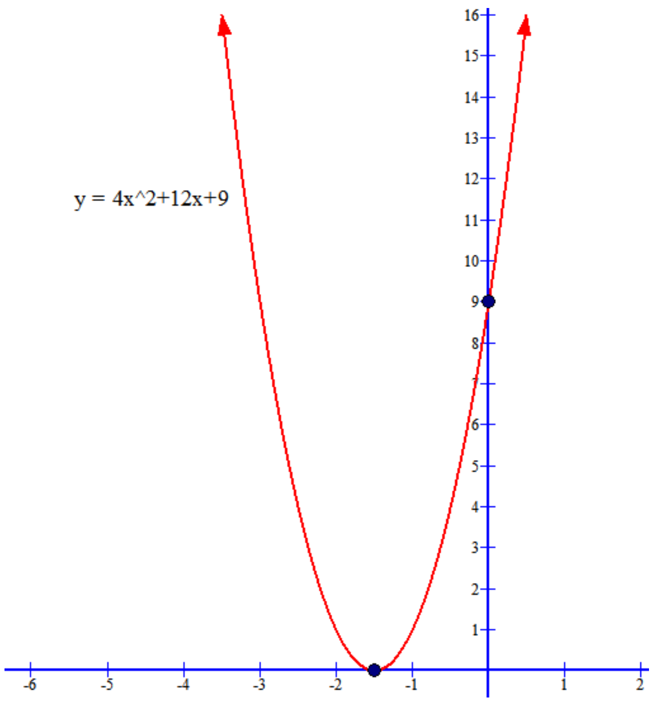
x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19

Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



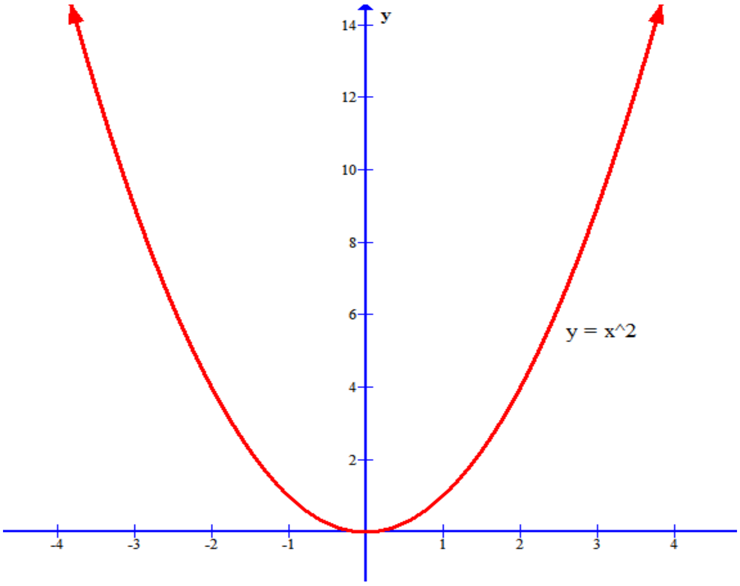
Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1]$

Ejemplo: Lo mismo para $y = 4x^2 + 12x + 9$

<table>
<tr>
<td>Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$, que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es $(0,9)$. La gráfica es:</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Además, como ya tenemos la gráfica: $\operatorname{Re} corr(f) = [0,+\infty)$

NOTA: Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es $f(x) = x^2$, que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:



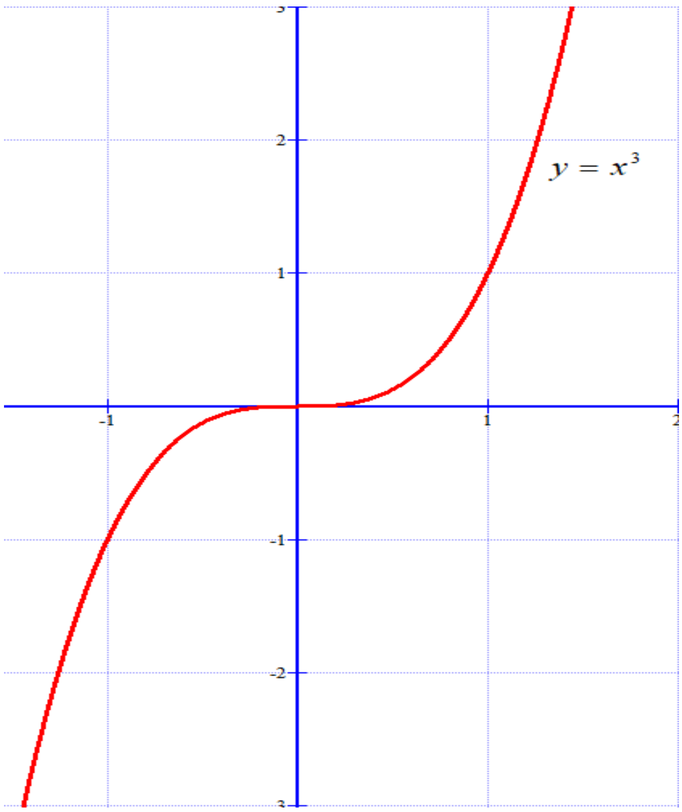
4. FUNCIONES POLÍNOMICAS DE TERCER GRADO

Son funciones de la forma $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ al ser polinómicas. No están acotadas y su imagen es todo $\mathbb{R}$.

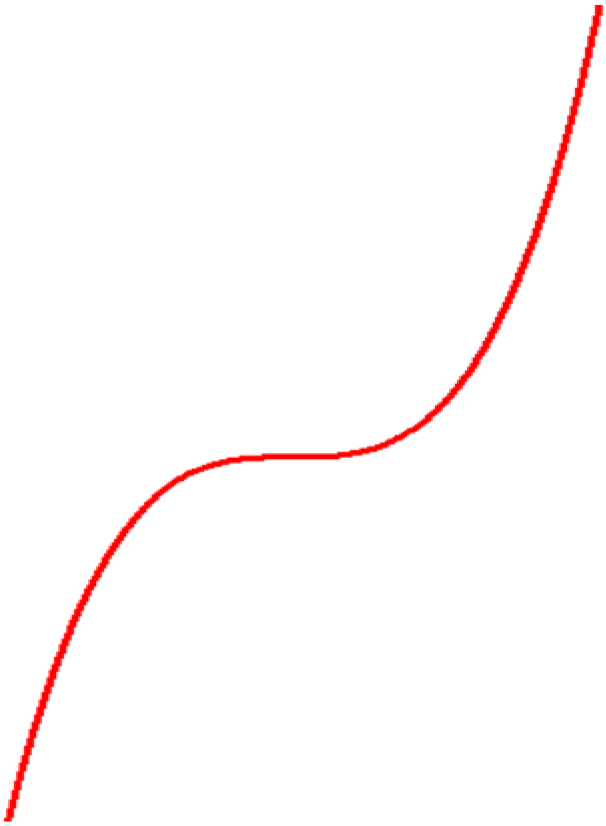
La más simple de todas ellas es $f(x) = x^3$ y su gráfica es fácil de recordar y de representar con una simple tabla de valores:

x	$y = x^3$
0	0
1	1
-1	-1
2	8
-2	-8

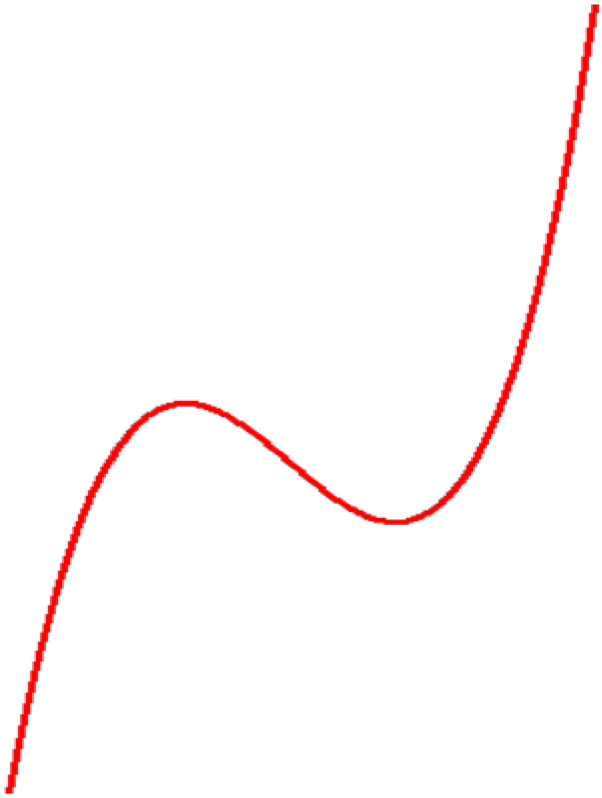


En temas posteriores, aprenderemos a representar estas funciones de manera general. Sirva como adelanto que sus gráficas serán similares a las siguientes:

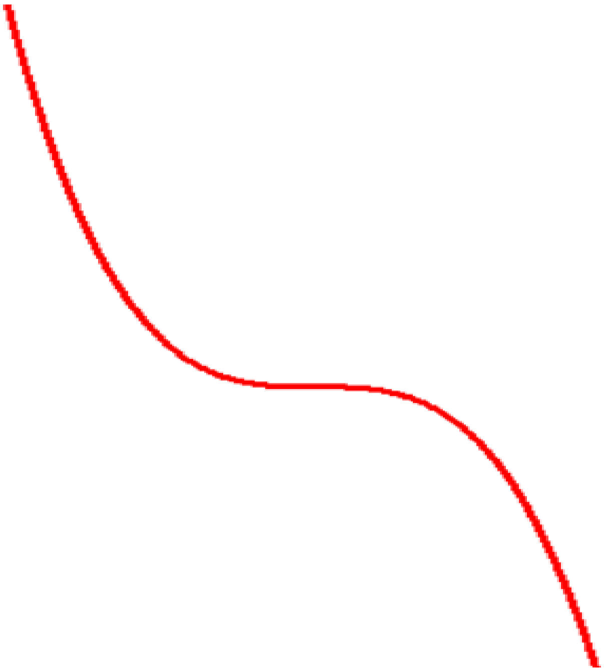
Si $a > 0$



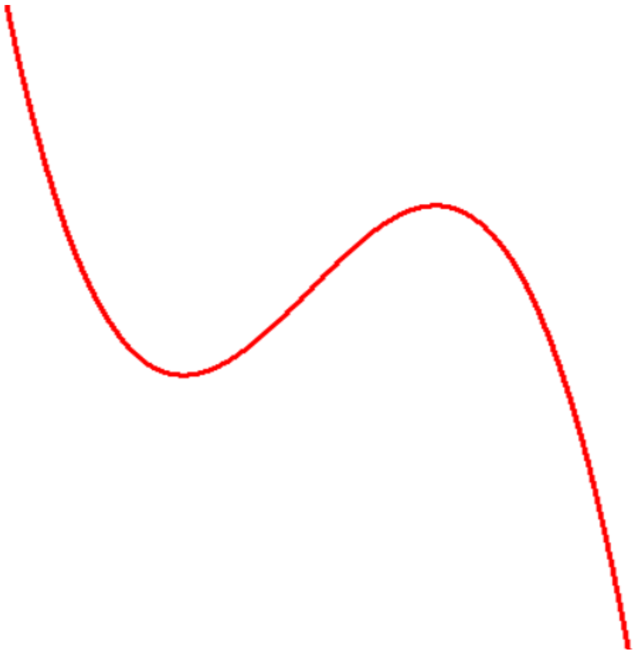
ó



Si $a < O$



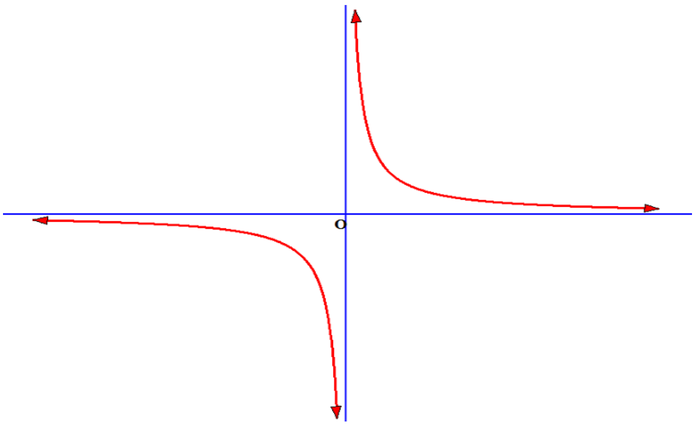
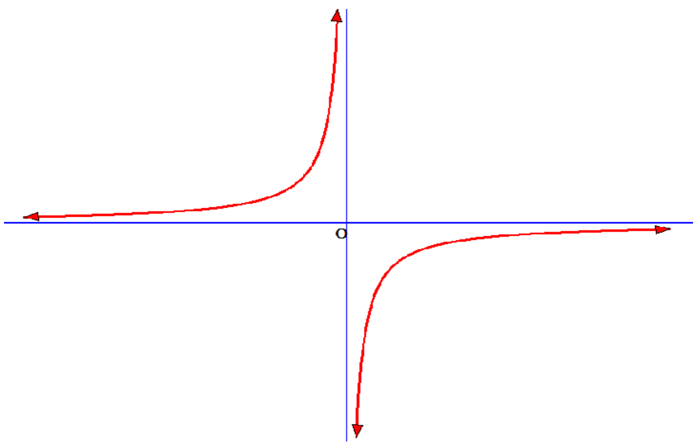
ó



5. FUNCIÓNES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Las ***funciones de proporcionalidad inversa*** son funciones cuya expresión es de la forma $f(x) = \dfrac{k}{x}$

Las gráficas de estas funciones son o se llaman *hipérbolas equiláteras* cuyas asíntotas son los ejes coordenados. Pueden ser de estas dos formas:

$k > 0$	$k < 0$
	

Propiedades: Estas funciones tienen las siguientes propiedades

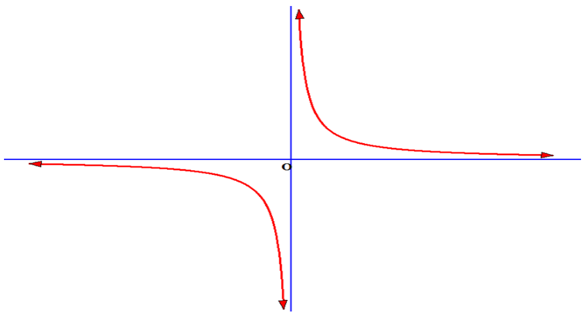
- *Dominio*: Se tiene que $Dom(f) = R - \{0\}$
- *Recorrido*: Se tiene que $\operatorname{Im}(f) = R - \{0\}$
- *Monotonía*: Se tiene que:
  - *Si* $k > 0$, la función es estrictamente decreciente en todo su dominio

  - *Si* $k < 0$, la función es estrictamente creciente en todo su dominio
- *Extremos relativos*: No tienen
- *Acotación*: No están acotadas ni superior ni inferiormente
- *Simetría*: Son funciones impares, es decir, presentan simetría respecto del origen de coordenadas
- *Asíntotas*: Se tiene que:
  - El eje OY (la recta $x = 0$) es asíntota vertical por la derecha a $+\infty$ y por la izquierda a $-\infty$ si $k > 0$. Al contrario, es asíntota vertical por la derecha a $-\infty$ y por la izquierda a $+\infty$ si $k < 0$
  - El eje OX (la recta $y = 0$) es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$

Representación gráfica: Para dibujar este tipo de funciones hay que tener en cuenta el signo de k y hacer una tabla de valores, teniendo en cuenta las propiedades anteriores. Veamos un par de ejemplos.

Ejemplo: Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{2}{x}$

En este caso tenemos que $k = 2 > 0$, luego será similar a la siguiente:

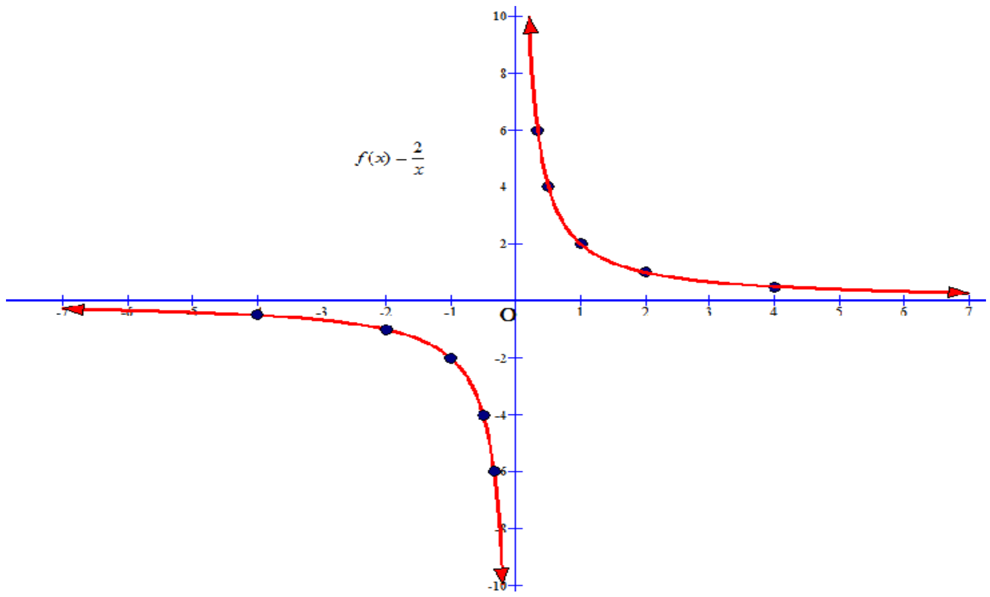


Realizamos una tabla de valores:

x	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y = \frac{2}{x}$	$\frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = -0{\acute{}}5$	$\frac{2}{-2} = -1$	$\frac{2}{-1} = -2$	$\frac{2}{-1/2} = -4$	$\frac{2}{-1/3} = -6$	$\frac{2}{1/3} = 6$	$\frac{2}{1/2} = 4$

x	1	2	4
$y = \frac{2}{x}$	2	1	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{\acute{}}5$

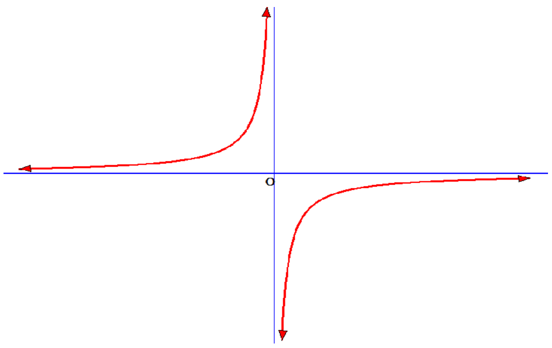
Y pasamos directamente a dibujarla:



Ejemplo: Representa gráficamente la función $y = \frac{-1}{2 \cdot x}$

Hemos de darnos cuenta de que la función se puede poner como $y = \frac{-1/2}{x}$

En este caso tenemos que $k = \frac{-1}{2} < 0$, luego será similar a la siguiente:

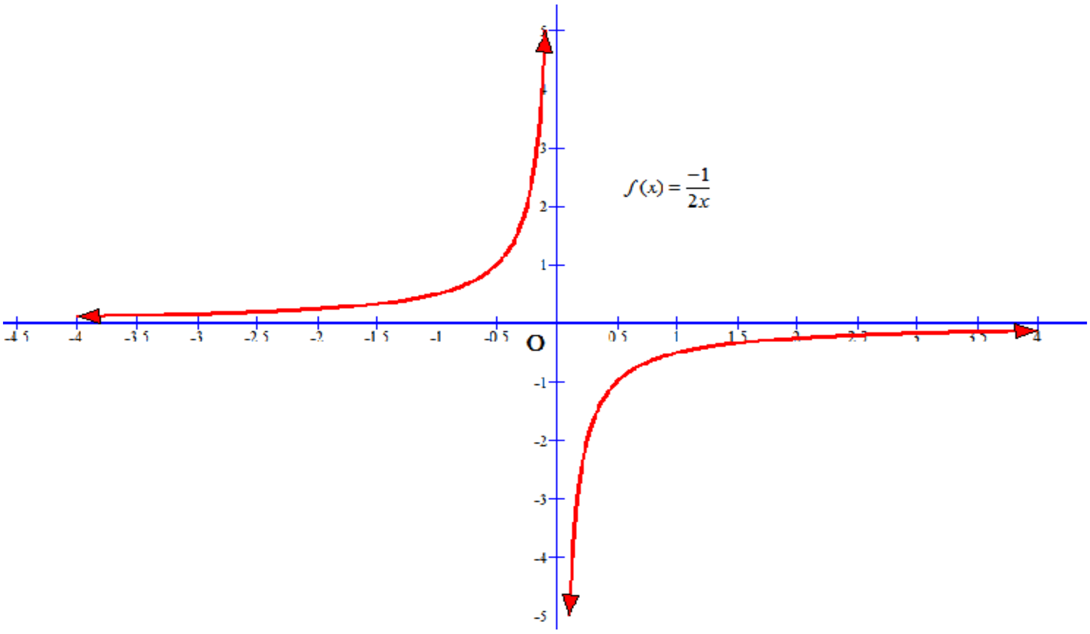


Realizamos una tabla de valores:

x	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{1}{8}=0´125$	$\frac{1}{4}=0`25$	$\frac{1}{2}=0`5$	1	$\frac{3}{2}=1`5$	$\frac{-3}{2}=-1`5$	-1

x	1	2	4
$y=\frac{2}{x}$	$\frac{-1}{2}=-0`5$	$\frac{-1}{4}=-0`25$	$\frac{-1}{8}=-0´125$

Y pasamos directamente a dibujarla:



6. FUNCIONES RACIONALES SIMPLES

Vamos a estudiar funciones racionales cuyo numerador y denominador como mucho son polinomios de primer grado, es decir, del tipo $f(x)=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$.

Las gráficas de las funciones del tipo $y=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$ son también hipérbolas equiláteras.

En estos casos, las asíntotas que tiene son las siguientes:

- Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: la recta de ecuación $\boxed{y=\dfrac{a}{c}}$
- Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: la recta de ecuación $\boxed{x=-\dfrac{d}{c}}$

__Ejemplo__: Representar gráficamente la función $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$

Por lo anterior tenemos que:

Asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$: $y=\dfrac{2}{1}\Rightarrow y=2$

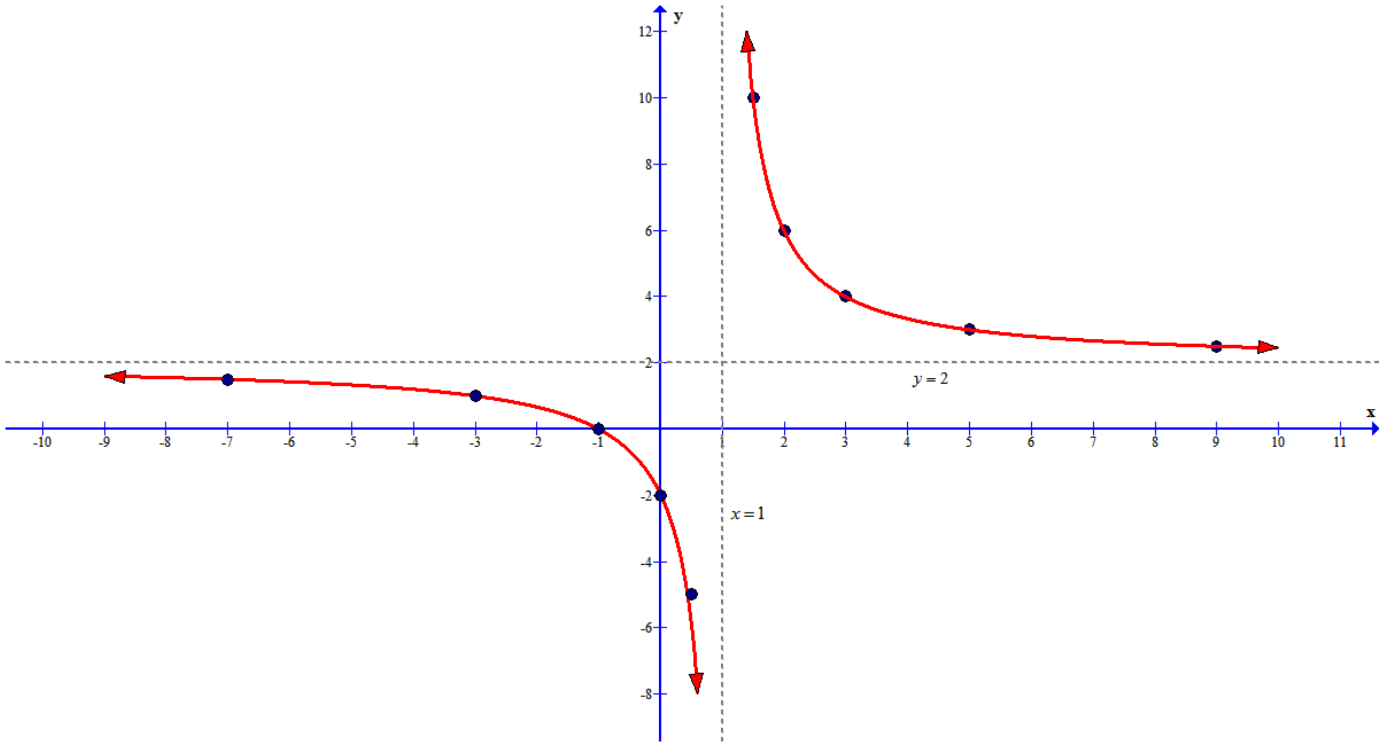
Asíntota vertical por la derecha y por la izquierda: $x=-\dfrac{-1}{1}\Rightarrow x=1$

Construimos una tabla de valores para conocer por donde se representa la hipérbola equilátera.

x	-7	-3	-1	0	0,5	1,5	2
$y=\dfrac{2x+2}{x-1}$	1,5	1	0	-2	-5	10	6

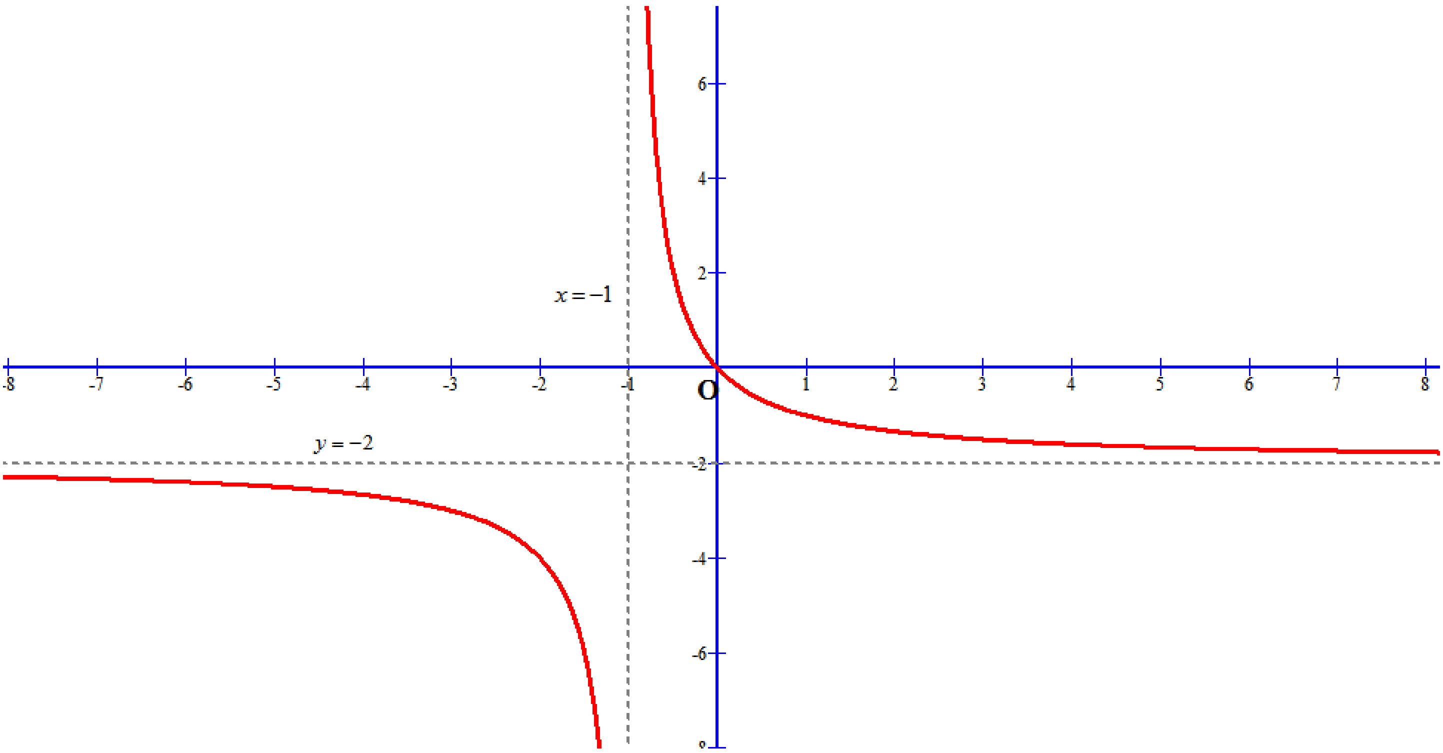
x	3	5	9
$y=\dfrac{2x+2}{x-1}$	4	3	2,5

Pasamos a dibujarla teniendo en cuenta todo lo obtenido:



<u>Ejemplo</u>: Representar gráficamente la función $y=\dfrac{-6x}{3x+3}$

Os dejo a vosotros hacerlo, pero el resultado tiene que ser similar a esto:



Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{400x+400}{x+18}$ nos da el número de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear un ordenador en función del número de clases particulares, de una hora, a las que asiste.

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto da al comienzo de las clases y cuántas dará al cabo de 3, 5 y 20 clases recibidas?
b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?
c) Representa la gráfica de la función.
d) A la vista de la gráfica, responde a las siguientes cuestiones:
   1. ¿A partir de qué número de clases alcanza más de 300 pulsaciones por minuto?
   2. ¿Qué nº de clases debe recibir para alcanzar las 500 pulsaciones por minuto?
   3. ¿Qué nº máximo de pulsaciones por minuto puede llegar a alcanzar?

a) Al comienzo de las clases, como $x=0$ horas, resultan $f(0)=\dfrac{400\cdot 0+400}{0+18}=22.2$ pulsaciones por minuto.

Para 3 clases tenemos $f(3)=\dfrac{400\cdot 3+400}{3+18}=76{,}2$ pulsaciones por minuto. Para 5 clases nos da $f(5)=\dfrac{400\cdot 5+400}{5+18}=104{,}3$ pulsaciones por minuto y para 20 clases nos resulta $f(20)=\dfrac{400\cdot 20+400}{20+18}=221{,}1$ pulsaciones por minuto.

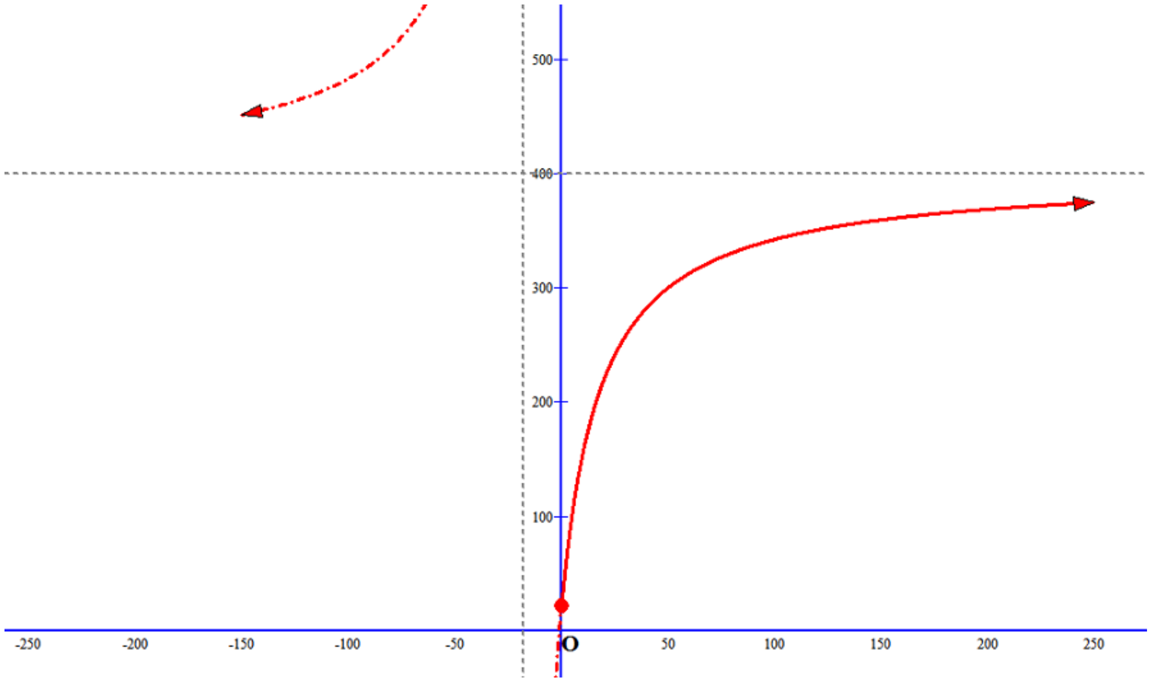
b) Para alcanzar las 300 pulsaciones por minuto debe practicar *x* horas, de modo que resolvemos la ecuación: $\dfrac{400\cdot x+400}{x+18}=300 \rightarrow 300\cdot(x+18)=400\cdot x+400 \rightarrow x=50$ horas

c) Vamos a representarla gráficamente con los puntos obtenidos anteriormente y con sus asíntotas

Asíntota horizontal: $y=400$

Asíntota vertical: $x=-18$

En trazo discontinuo la parte de la hipérbola que no interesa para el problema. Sólo nos interesa a partir de $x = 0$ horas.



d) Tenemos que:

1. Alcanza más de 300 pulsaciones/min al recibir más de 50 clases.
2. Observando la gráfica vemos que nunca alcanzará las 500 pulsaciones/min.
3. El nº máximo de pulsaciones por minuto que puede llegar a alcanzar se acerca a 400 que es su asíntota horizontal

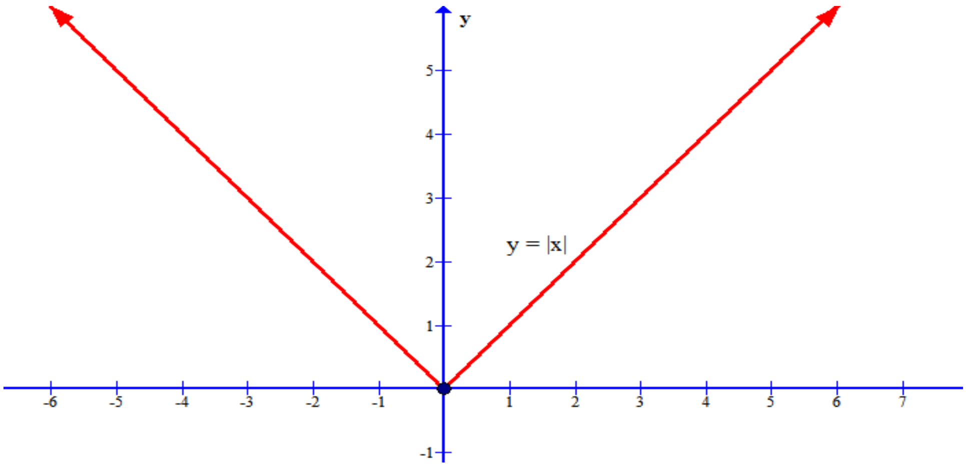
7. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

La función valor absoluto se define por partes de la siguiente forma: $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$. Es decir, es la función que toma un nº real y devuelve el nº positivo correspondiente.

<u>*Ejemplos*</u>: $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$, $\left|\dfrac{-6}{7}\right| = \dfrac{6}{7}$

Tenemos que su dominio es todo $\mathbb{R}$.

Su gráfica es la siguiente:



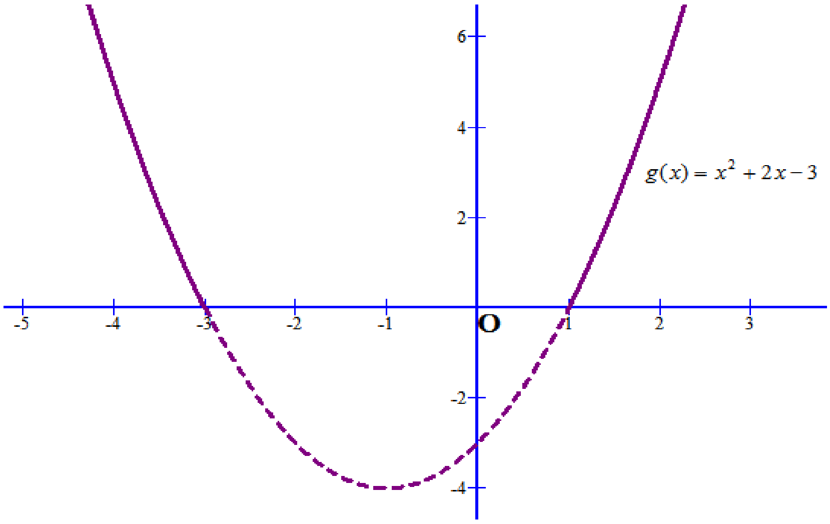
Y como vemos su imagen es $\mathrm{Im}(|x|) = [0,+\infty)$

Está acotada inferiormente pero no superiormente, teniendo un mínimo absoluto en $O(0,0)$.

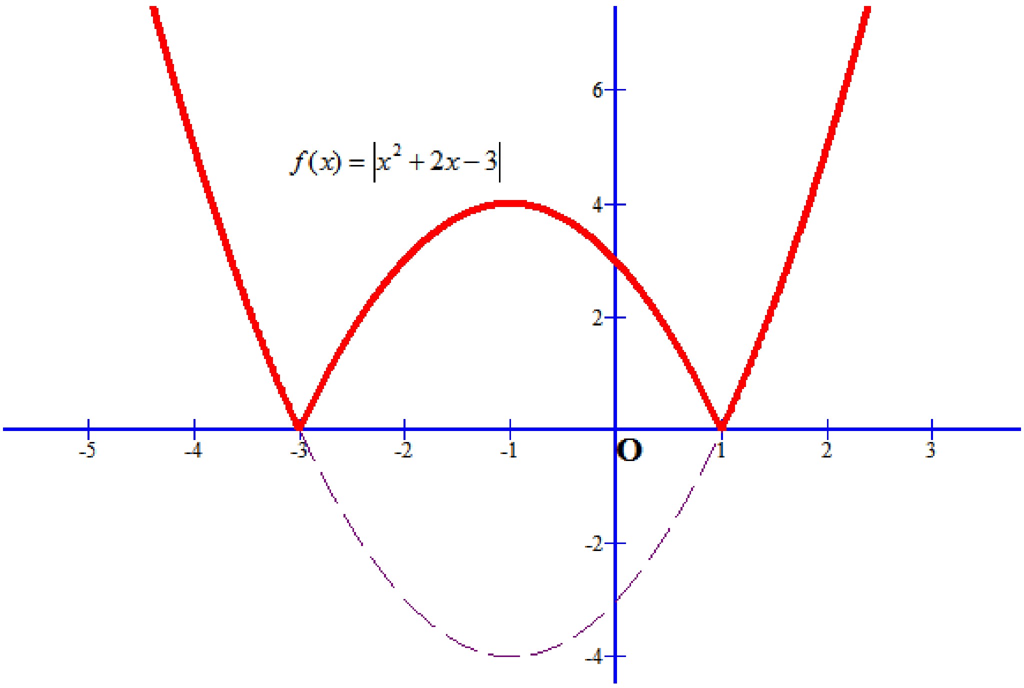
NOTA IMPORTANTE: Una vez conocido lo anterior, podemos dibujar o representar funciones de la forma $y = |f(x)|$, conociendo la gráfica de la función $y = f(x)$, simplemente transformando las imágenes negativas en positivas, como vemos en el ejemplo siguiente:

Ejemplo: Representar gráficamente la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$

Para ello representamos primero la función cuadrática $g(x) = x^2 + 2x - 3$ como ya sabemos:



Y lo único que hemos de hacer ahora es la parte discontinua de la gráfica anterior (que es la negativa) convertirla en positiva y con eso tendremos dibujada la función pedida



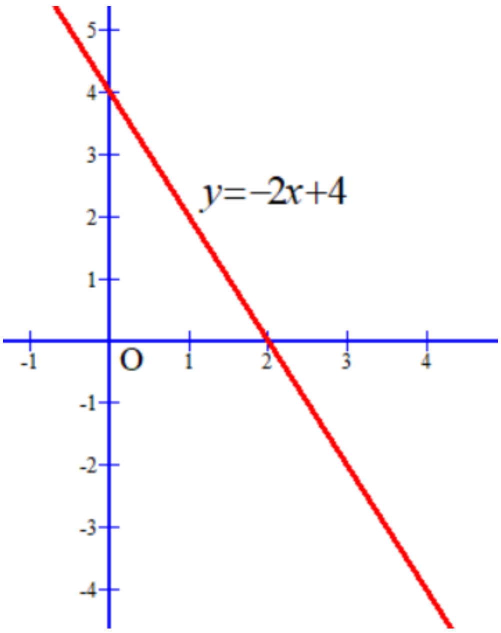
Ejemplo: Sea la función $f(x)=|-2x+4|$, veamos su representación gráfica:

Dibujamos la recta $y=-2x+4$ mediante una tabla de valores y calculando los puntos de corte con los ejes:

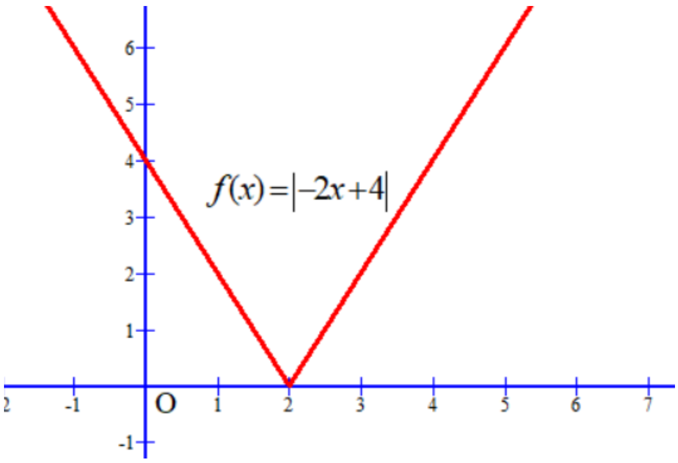
Corte eje OX: $y=0 \Rightarrow -2x+4=0 \Rightarrow x=2$. El punto es $(2,0)$

Corte eje OY: $x=0 \Rightarrow y=-2\cdot 0+4 \Rightarrow y=4$. El punto es $(0,4)$

Con esto podemos dibujar la recta $y=-2x+4$:



Y ahora la parte negativa, la ponemos positiva, y nos queda:



8. FUNCIÓNES EXPONENCIALES

Son funciones de la forma $f(x)=a^x$ donde $a>0$ y $a\neq 1$.

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y van a estar acotadas inferiormente por 0, que es su ínfimo.

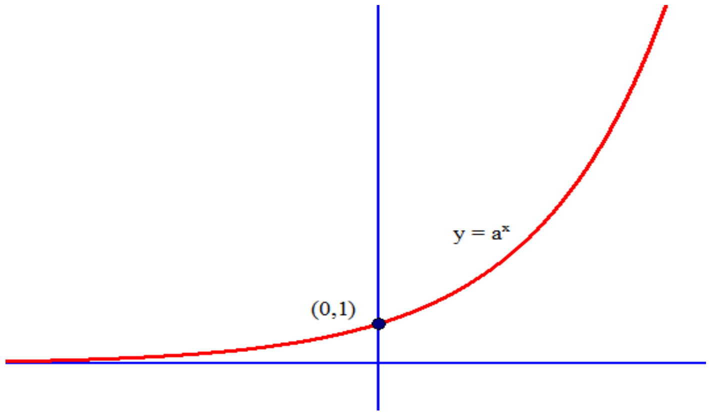
Todas pasan por el punto $(0,1)$

Su imagen es $\mathrm{Im}(a^x)=(0,+\infty)$

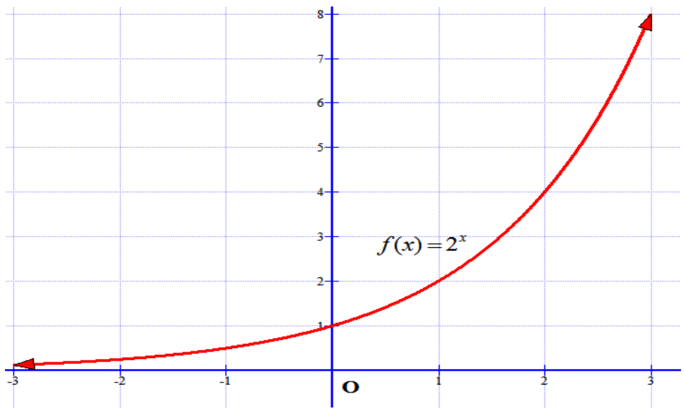
Vamos a distinguir dos casos:

a) <u>La base</u> a <u>mayor que 1</u> $(a>1)$

En este caso son funciones *<u>crecientes</u>* y su gráfica es como sigue:

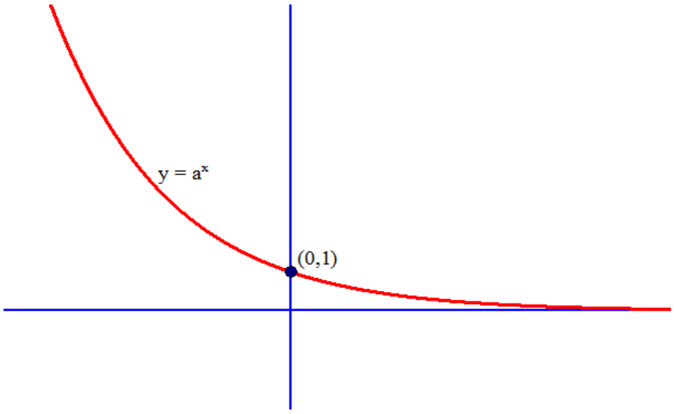


<u>Ejemplo</u>: Representamos gráficamente la función $f(x)=2^x$

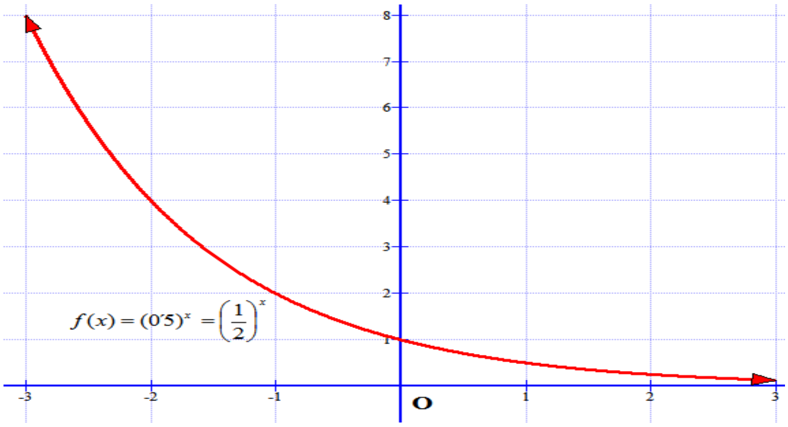


b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones *decrecientes* y su gráfica es como sigue:



Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x) = (0'5)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



9. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

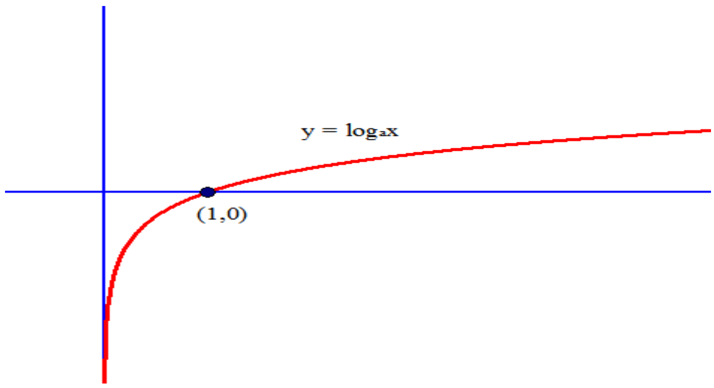
Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Como sabemos el argumento ha de ser estrictamente positivo, por tanto $Dom(\log_a) = (0, +\infty)$

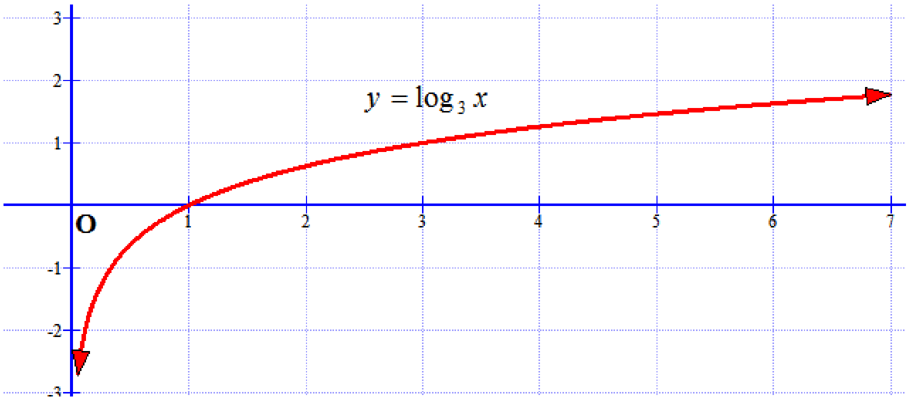
Todas pasan por el punto $(1,0)$. Su imagen es todo $\mathbb{R}$.

Vamos a distinguir dos casos:

a) La base a mayor que 1 $(a > 1)$

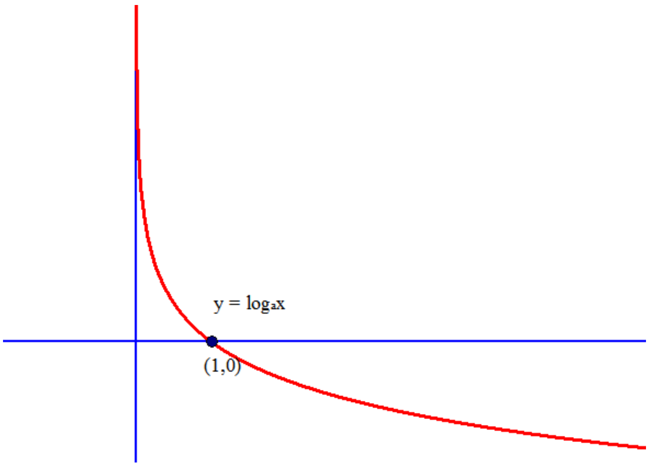
En este caso son funciones *crecientes* y su gráfica es como sigue:	

Ejemplo: Representamos gráficamente la función $y = \log_3 x$

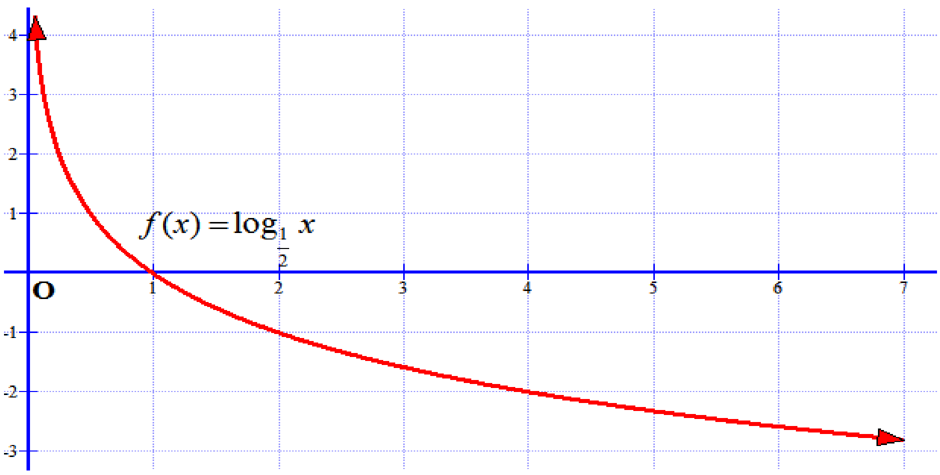


b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Ejemplo: Representamos gráficamente la función $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



10. FUNCIONES DEFINIDAS POR PARTES O A TROZOS

Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente "*x*" pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: Sea la función $f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\le -1 \\ x^2-4x & si \quad x>0 \end{cases}$ Vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su recorrido

Está función también se puede expresar con intervalos de esta manera: $f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x\in(-\infty,-1] \\ x^2-4x & si \quad x\in(0,+\infty) \end{cases}$

Dominio

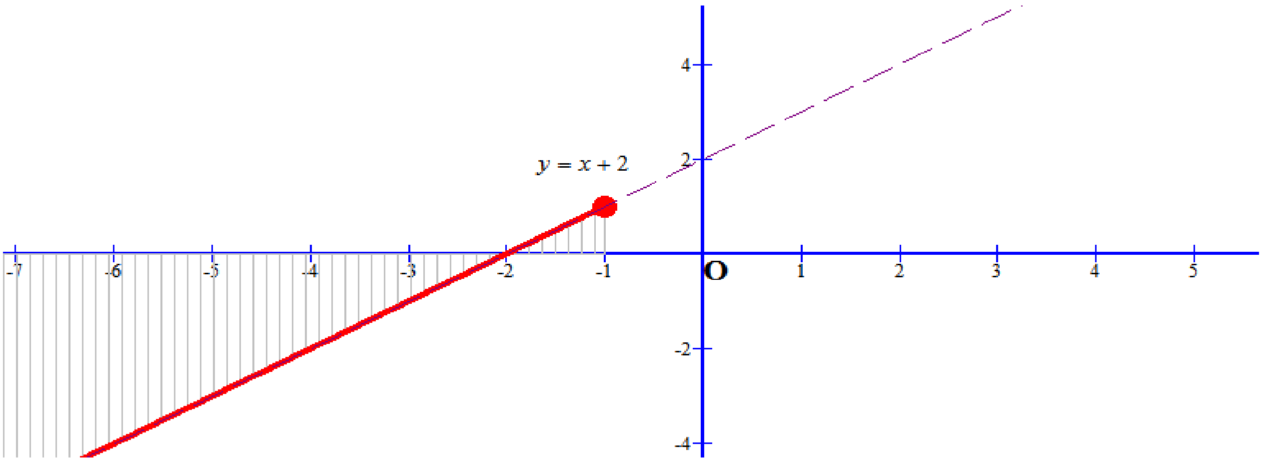
Si $x\le 1$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de primer grado (afín), luego el intervalo $(-\infty,1]$ es una parte del dominio.

Si $x>0$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de segundo grado (cuadrática), luego el intervalo $(0,+\infty)$ es una parte del dominio.

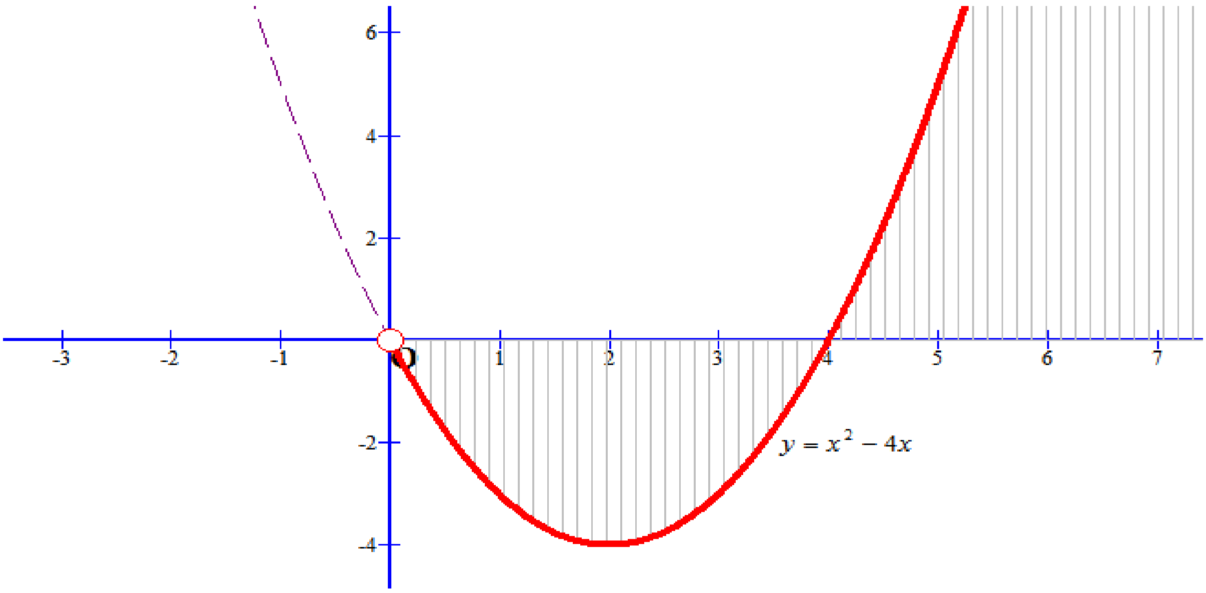
Podemos concluir que el dominio es: $Dom(f)=(-\infty,1]\cup(0,+\infty)$

Representación gráfica

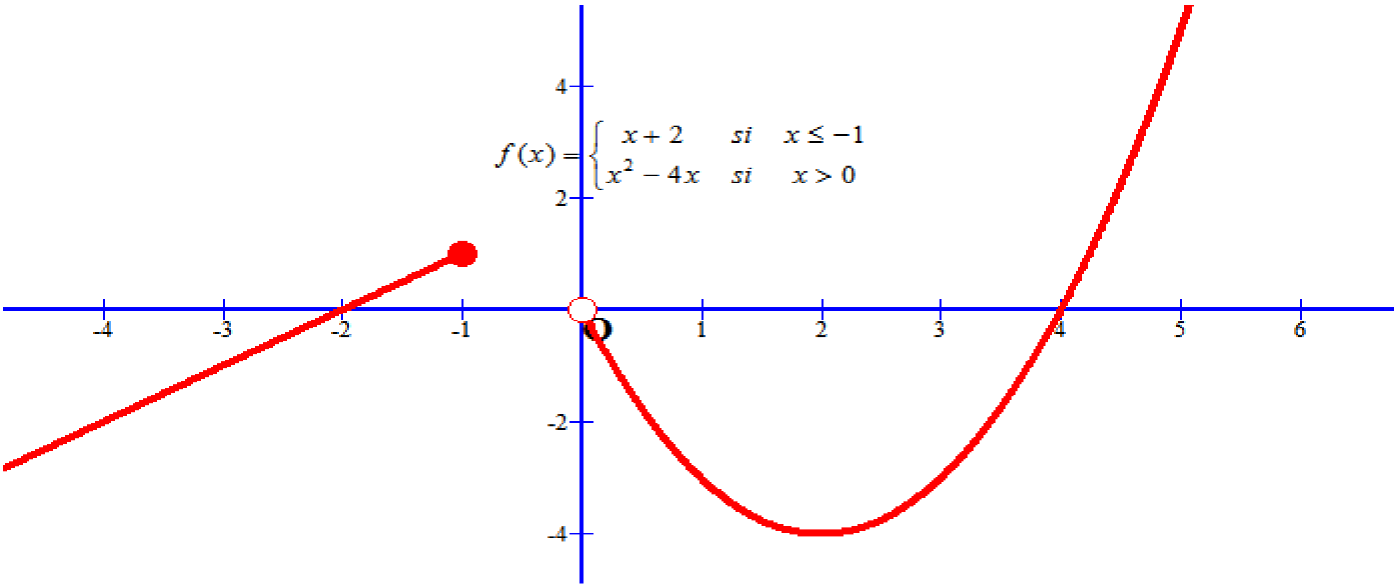
Si $x\le 1$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de primer grado (afín), $y=x+2$, dibujamos por tanto la recta y nos quedamos con la parte correspondiente al intervalo $(-\infty,1]$



Si $x>0$, observamos que la función viene definida como una función polinómica de segundo grado (cuadrática), $y=x^2-4x$, dibujamos por tanto la parábola (vértice, puntos de corte, etc.) y nos quedamos con la parte correspondiente al intervalo $(0,+\infty)$.



Ahora, nos queda sólo fusionar las dos gráficas y tendremos la representación gráfica de $f(x)$



Recorrido

Observando la gráfica podemos decir que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & si \quad x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad 1 \le x < 3 \\ \dfrac{3}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$ Vamos a estudiar su dominio, su representación gráfica y su imagen. Esta función también se podía poner así usando intervalos $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & si \quad x \in (-\infty, 1) \\ 2x - 1 & si \quad x \in [1, 3) \\ \dfrac{3}{x} & si \quad x \in (3 + \infty) \end{cases}$ Podéis usar la que más os guste, es totalmente indiferente.

Como vemos tiene 3 partes:

- Si $x<1$ (o bien, $x\in(-\infty,1)$), está definida por un polinomio de grado 2, que siempre tiene sentido, en particular en la restricción $x<1$. Tendremos un trozo de parábola

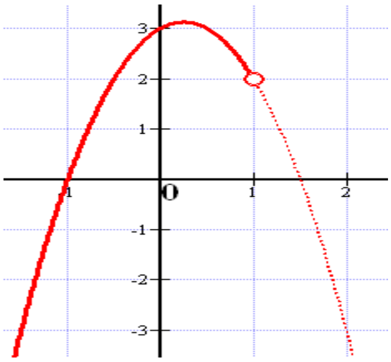
- Si $1\le x<3$, está definida por un polinomio de grado 1 (función afín), que siempre tiene sentido, y su gráfica será una recta. Tendremos un trozo de recta (una semirrecta o un segmento)

- Si $x>3$, está definida por una función de proporcionalidad inversa que tiene sentido pues el denominador nunca se anula al ser $x>3$. Como x > 3, no hay problema y tiene sentido.

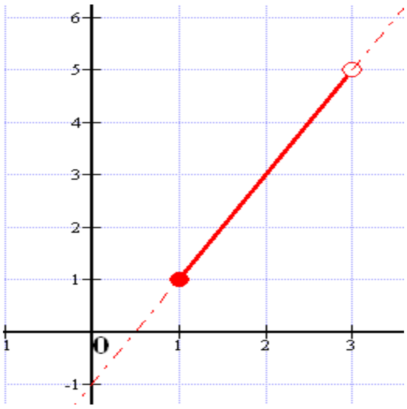
Pero hay un valor dónde la función no está definida, en x = 3. Por tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Pasamos a representarla gráficamente, para ello dibujamos cada parte por separado y en línea discontinua se representa la parte que habrá que borrar en el gráfico final

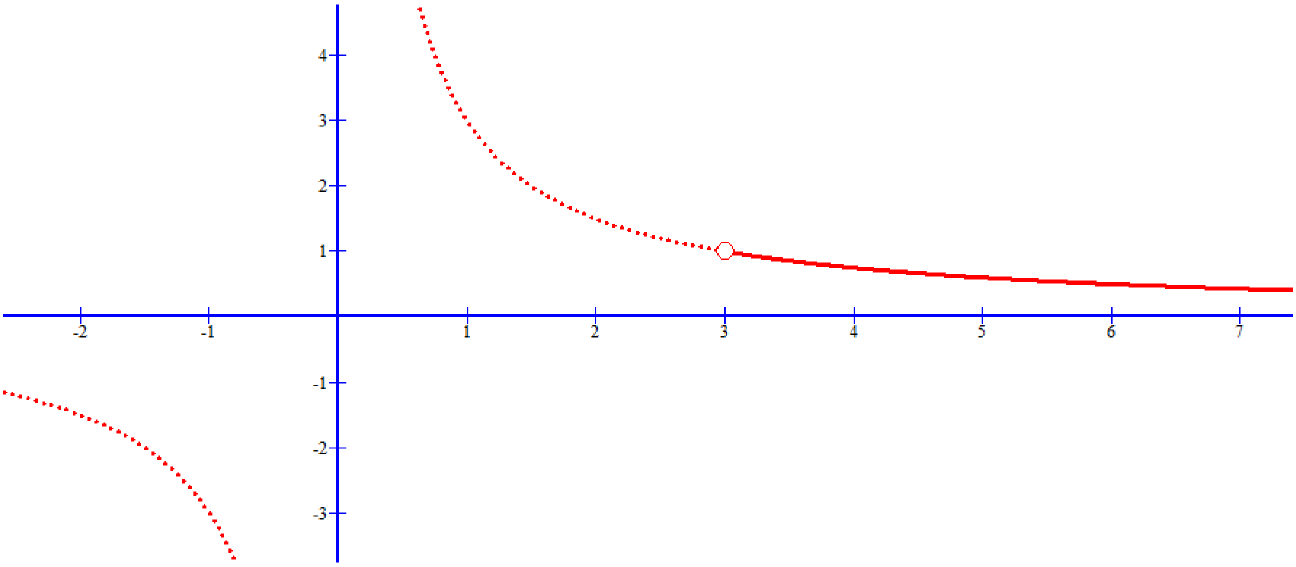
La parábola sería así (vosotros lo hacéis como siempre: vértice, cortes, etc.)



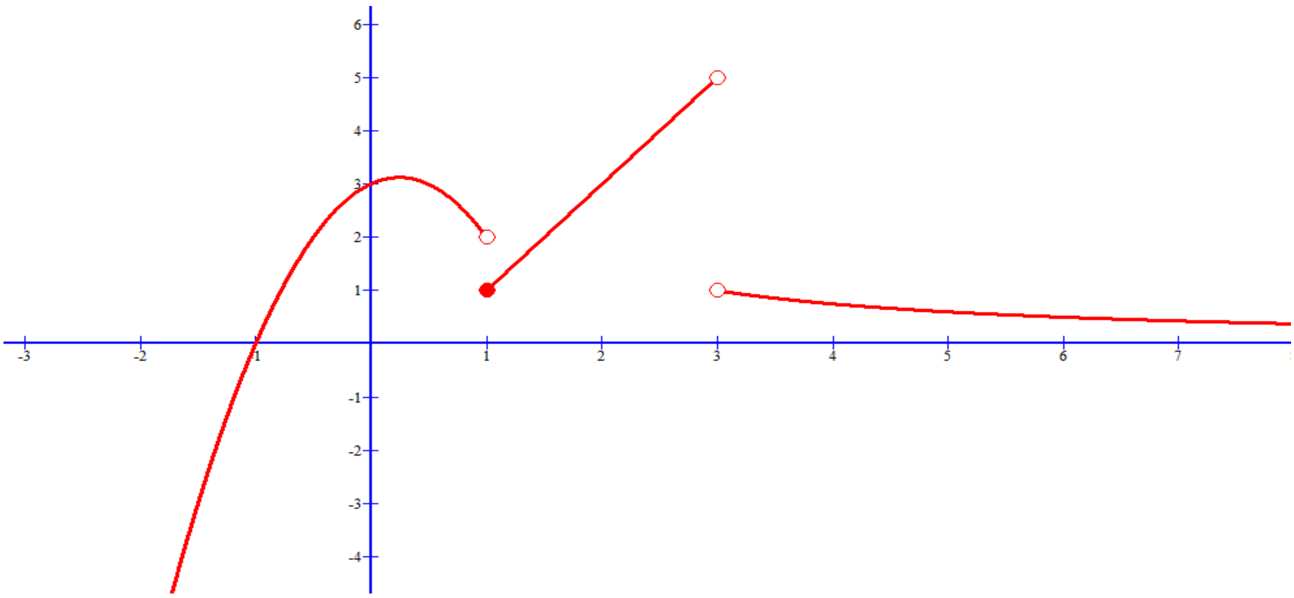
La recta



Y la función de proporcionalidad inversa:



Y todo unido y quitando las líneas punteadas, nos queda la gráfica de $f(x)$



Y tenemos que $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,5)$

11. FUNCIONES CON VALOR ABSOLUTO DEFINIDAS POR PARTES

Las funciones que tiene valor absoluto se pueden descomponer y expresar como funciones a trozos o por partes. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: Poner como función a trozos la función $f(x)=|-2x+4|$

Lo primero que vamos a hacer es estudiar el signo del argumento del valor absoluto que en este caso sería la función $y=-2x+4$.

Para ello vemos primero dónde se anula y después construimos una tabla de signos.

Se anula si: $-2x+4=0 \Rightarrow x=2$

Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$-2x+4$	Probamos con $x=0$ y resulta +4, que es positivo **+**	Probamos con $x=10$ y resulta -16, que es negativo **-**

Esto nos permite poner la función inicial por partes:

$$f(x)=|-2x+4|=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x<2\\ 0 & si \quad x=2\\ -(-2x+4) & si \quad x>2\end{cases} \Rightarrow f(x)=|-2x+4|=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x<2\\ 0 & si \quad x=2\\ 2x-4 & si \quad x>2\end{cases}$$

También el valor $x=2$ se puede incluir en cualquiera de las dos expresiones que se obtienen, pues el valor sigue siendo 0.

Las siguientes expresiones son igualmente válidas:

$f(x)=\left|-2x+4\right|=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x\le 2\\ 2x-4 & si \quad x>2\end{cases}$ o bien $f(x)=\left|-2x+4\right|=\begin{cases}-2x+4 & si \quad x< 2\\ 2x-4 & si \quad x\ge 2\end{cases}$

Ejemplo: Poner como función a trozos la función $f(x)=\left|x^2-2x-3\right|$

Hacemos lo mismo, vemos dónde se anula el argumento del valor absoluto:

$x^2-2x-3=0 \Rightarrow \begin{matrix} x=-1\\ x=3\end{matrix}$ por la ecuación de 2º grado.

Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
x^2-2x-3	Probamos con $x=-2$ y resulta +5, que es positivo **+**	Probamos con $x=0$ y resulta -3, que es negativo **-**	Probamos con $x=4$ y resulta +5, que es positivo **+**

Con esto ya podemos poner las partes de la función:

$$f(x)=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & si & x<-1\\ 0 & si & x=-1\\ -\left(x^2-2x-3\right) & si & -1<x<3\\ 0 & si & x=3\\ x^2-2x-3 & si & 3<x\end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x)=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & si & x<-1\\ 0 & si & x=-1\\ -x^2+2x+3 & si & -1<x<3\\ 0 & si & x=3\\ x^2-2x-3 & si & 3<x\end{cases}}$$

Y análogamente al ejemplo anterior, los puntos $x=-1$ y $x=3$ los podemos incluir en las desigualdades adyacentes:

$$\boxed{f(x)=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & si & x<-1\\ -x^2+2x+3 & si & -1\le x\le 3\\ x^2-2x-3 & si & 3<x\end{cases}}$$ o bien como

$$\boxed{f(/x)=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & si & x\le -1\\ -x^2+2x+3 & si & -1< x< 3\\ x^2-2x-3 & si & 3\le x\end{cases}}$$