UNIDAD 11: INTEGRALES INDEFINIDAS

CONTENIDO

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

En esta unidad vamos a aprender el proceso inverso de derivar, que se llama ***integrar***.

Definición: Una función F diremos que es una *primitiva* de otra función f dada, si la derivada de F es f, es decir:

F es primitiva de $f \Leftrightarrow F' = f$

Ejemplo: Dada $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$, la función $F(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$, es una primitiva de f, pues se puede verificar fácilmente que $F'(x) = 3x^2 + 6x - 2 = f(x)$

Ejemplo: Dada $f(x) = \frac{1}{x}$, una primitiva es $F_1(x) = \ln x$. Pero como se puede observar la primitiva no es única, pues basta sumar una constante (nº) y seguimos teniendo primitivas, como $F_2(x) = \ln x + 6$, ó $F_3(x) = \ln x - 14$. Todas las primitivas verifican que $F_k'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$

Como vemos una función puede tener infinitas primitivas, basta sumar una constante diferenciadora.

2. INTEGRAL INDEFINIDA. PROPIEDADES

Definición: Se llama *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y se representa por: $\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tal que } F \text{ es una primitiva de } f \text{ y } C \in R\}$. Abreviamos poniendo $\int f(x)dx = F(x) + C$

Se lee *integral de* $f(x)$ *diferencial de* x. A C se le llama constante de integración. A $f(x)$ se le llama *integrando*.

El símbolo $\int$ siempre ha de ir acompañado del factor dx (diferencial de x), cuyo significado es indicar la variable respecto a la cual se integra.

Ejemplo: Calcula $\int \cos x\, dx$. Es obvio que $\int \cos x\, dx = senx + C$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx$. Sabemos que $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, luego $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctgx + C$

Propiedades de la integral indefinida

a) La integral del producto de un nº real por una función es igual al nº real por la integral de la función:

$\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ (un factor numérico se puede extraer del signo integral)

b) La integral de la suma o diferencia de funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de dichas funciones:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Ejemplo: Calcular $\int (-6x^2 + e^x + 7senx)\, dx$

$\int (-6x^2 + e^x + 7senx)\, dx$ = (por la propiedad b) = $\int -6x^2 dx + \int e^x dx + \int 7senx\, dx$ = (por la propiedad a) = $-2\int 3x^2 dx + \int e^x dx + 7\int senx\, dx = -2x^3 + e^x + 7(-\cos x) + C = -2x^3 + e^x - 7\cos x + C$

3. INTEGRALES INMEDIATAS

Se llaman así porque se obtienen directamente del conocimiento de sus respectivas derivadas y para ello tenemos que memorizar la siguiente tabla.

El tipo se refiere a la función solución, no al integrando.

TIPO	**FUNCIÓN SIMPLE**	**FUNCIÓN COMPUESTA**	**EJEMPLO**
Constante	$\int k\ dx = k \cdot x + C$	$\int k \cdot f'(x)\ dx = k \cdot f(x) + C$	$\int 3\ dx = 3 \cdot x + C$
Potencial	$\int x^a\ dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$\int f^a \cdot f'\ dx = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C$	$\int (x^2+5)^3 \cdot 2x\ dx = \frac{(x^2+5)^4}{4} + C$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'}{f}\ dx = \ln\|f\| + C$	$\int \frac{7x^6+1}{x^7+x}\ dx = \ln\|x^7+x\| + C$
Exponencial	$\int e^x\ dx = e^x + C$ $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^f \cdot f'\ dx = e^f + C$ $\int a^f \cdot f'\ dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$	$\int 9^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = \frac{9^{\sqrt{x}}}{\ln 9} + C$
Seno	$\int \cos x\ dx = \text{sen}\, x + C$	$\int (\cos f) \cdot f'\ dx = \text{sen}\, f + C$	$\int (\cos x^3) \cdot 3x^2\ dx = \text{sen}\, x^3 + C$
Coseno	$\int \text{sen}\, x\ dx = -\cos x + C$	$\int (\text{sen}\, f) \cdot f'\ dx = -\cos f + C$	$\int (\text{sen}\, e^x) \cdot e^x\ dx = -\cos e^x + C$
Tangente	$\int (1+tg^2 x)\ dx = tgx + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = tgx + C$	$\int (1+tg^2 f) \cdot f'\ dx = tg\ f + C$ $\int \frac{f'}{\cos^2 f}\ dx = tg\ f + C$	$\int \frac{2}{\cos^2 2x}\ dx = tg\, 2x + C$
Cotangente	$\int (1+\text{cotg}^2 x)\ dx = -\text{cotg}\ x + C$ $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x}\ dx = -\text{cotg}\ x + C$	$\int (1+\text{cotg}^2 f) \cdot f'\ dx = -\text{cotg}\ f + C$ $\int \frac{f'}{\text{sen}^2 f}\ dx = -\text{cotg}\ f + C$	$\int \left(1+\text{cotg}^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) \cdot \frac{-1}{x^2}\ dx = -\text{cotg}\ \frac{1}{x} + C$
Arco seno o arco coseno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = arcsen\ x + C$ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -\text{arcos}\ x + C$	$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\ dx = arcsen\ f + C$ $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}\ dx = -\text{arcos}\ f + C$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx = arcsen\ e^x + C$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = arctg\ x + C$	$\int \frac{f'}{1+f^2}\ dx = arctg\ f + C$	$\int \frac{1/x}{1+\ln^2 x}\ dx = arctg\ (\ln x) + C$

NOTA: Es bueno, si hay tiempo, realizar la comprobación, es decir, derivar y ver que sale el integrando.

Ejemplo: Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $I = \int x^4 dx$ = (de tipo potencial) $\frac{x^5}{5} + C$

b) $I = \int \left(\sqrt{x} + 8\right) dx$ = $\int \sqrt{x}\, dx + \int 8\, dx$ = (la 2ª integral es de tipo constante y la 1ª la ponemos en forma potencial) $\int x^{\frac{1}{2}} dx$ + $8x$ = (aplicamos a la 1ª integral la fórmula de la potencial) $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ + $8x$ + C = (operamos y simplificamos) = $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ + $8x$ + C = $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$ + $8x$ + C . El resultado final lo dejamos con radicales pues el integrando así lo era. También se puede extraer factor del radical y la solución queda: $I = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$ + $8x$ + C

c) $I = \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx$ = (nos hemos de dar cuenta que en el numerador está la derivada del denominador y entonces es la función compuesta de la logarítmica $\int \frac{f'}{f} dx$) = $\ln\left|x^3+1\right|$ + C . Siempre hemos de poner el valor absoluto en las logarítmicas pues un logaritmo sólo tiene sentido cuando su argumento es positivo)

d) $I = \int x e^{x^2+6} dx$ = (preparamos un poco el integrando pues la derivada del exponente ($2x$) casi la tenemos multiplicando a la exponencial) = $\int e^{x^2+6} \cdot x\, dx$ = (por la propiedad a) de la integrales podemos jugar con los factores numéricos a nuestro gusto y como nos hace falta un 2, multiplicamos por 2 dentro de la integral y dividimos por 2 fuera, que nos deja sin variar la integral) = $\frac{1}{2}\int e^{x^2+6} \cdot 2x\, dx$ = (y ya podemos aplicar la compuesta de la exponencial $\int e^f f' = e^f$) = $\frac{1}{2} e^{x^2+6}$ + C

e) $I = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ = (nos damos cuenta de que casi tenemos la derivada de la raíz cuadrada para aplicar la compuesta trigonométrica, preparamos el integrando, separando y multiplicando y dividiendo por 2) = $2\int \cos\sqrt{x}\, \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ = (ya es del tipo $\int \cos f \cdot f' dx$) = $2 sen\sqrt{x}$ + C

f) $I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$ = $\int \frac{1/x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$ = (es del tipo arco seno compuesta) = $arcsen(\ln x)$ + C

g) $I = \int \frac{1}{\cos^2 9x} dx$ = (parece del tipo tangente compuesta, sólo nos falta la derivada de 9x, por eso multiplicamos y dividimos por 9) = $\frac{1}{9}\int \frac{9}{\cos^2 9x} dx$ = $\frac{1}{9} tg 9x$ + C

4. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Este método de integración se suele usar cuando el integrando tiene a dos funciones multiplicándose y estas funciones no tienen mucha relación entre sí, y una de ellas, por si sola, es relativamente fácil de integrar.

Se basa en la siguiente fórmula: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

A veces es necesario aplicar reiteradamente el método de integración por partes.

<u>Ejemplo</u>: Calcular $I = \int x \cdot \ln x \, dx$

Como vemos el integrando tiene a una función polinómica (x) multiplicándose por una función logarítmica ($\ln x$). Tenemos que elegir convenientemente u y dv, $\int x \cdot \ln x \, dx = \int u \cdot dv$. Como u se ha de elegir aquella fácil de derivar (elegimos $\ln x$), y como dv se ha de elegir una parte que sea fácil de integrar (elegimos x).

$u = \ln x \rightarrow$(derivamos en cada lado respecto a la variable correspondiente y añadimos el diferencial) $1 \cdot du = \frac{1}{x} dx$.

Así nos queda $u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$dv = x \cdot dx \rightarrow$ (aquí integramos respecto a la variable correspondiente) $\int dv = \int x \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$ (aquí no añadimos la constante de integración).

Ya sólo nos queda sustituir en la fórmula: $I = \int x \cdot \ln x \, dx$ = $\ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \rightarrow$ (operamos y simplificamos) I = $\frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \rightarrow I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \cdot dx \rightarrow$ (hacemos la integral inmediata que queda y añadimos ya la constante de integración) $I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C \rightarrow$

$$\boxed{I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

<u>Ejercicio</u>: Comprobar que $I' = x \cdot \ln x$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $I = \int x \cdot e^x \, dx$

En este caso elegimos diferente al anterior.

$$\begin{matrix} u = x \\ dv = e^x dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ \int dv = \int e^x dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \\ v = e^x \end{matrix}$$

Sustituimos I= $\int x \cdot e^x \, dx$ = $x \cdot e^x - \int e^x dx \rightarrow$

$$\boxed{I = x\cdot e^x - e^x + C}$$

Ejemplo: Calcular $I = \int arctgx\ dx$

En este caso por fuerza hay que elegir de esta manera:

$\begin{matrix} u = arctgx \\ dv = dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ \int dv = \int dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{matrix}$ Sustituimos:

I= $\int arctgx\,dx$ = $x\cdot arctgx - \int x\cdot\dfrac{1}{1+x^2}dx$ = $x\cdot arctgx - \int \dfrac{x}{1+x^2}dx$

Vamos a calcular aparte la integral que nos ha quedado y le damos nombre $J = \int \dfrac{x}{1+x^2}dx$

$J = \int \dfrac{x}{1+x^2}dx$ = (es inmediata de tipo logaritmo compuesto multiplicando y dividiendo por 2)→

$J = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2x}{1+x^2}dx$ → $J = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ (¿por qué no he puesto valor absoluto? $1+x^2$ siempre es positivo)

Volvemos a I y sustituimos lo que vale J, quedándonos resuelto el problema:

$$\boxed{I = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

Ejemplo: Calcular $I = \int e^x\cdot \text{senx}\ dx$

Elegimos esta opción:

$\begin{matrix} u = senx \\ dv = e^x\cdot dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = \cos x\cdot dx \\ \int dv = \int e^x\cdot dx \end{matrix} \rightarrow v = e^x$ Ahora sustituimos: $I = \int e^x\cdot \text{senx}\ dx = e^x senx$ - $\int e^x\cdot\cos x\cdot dx$ =

Nos sale otra integral similar pero con $cosx$: J = $J = \int e^x\cdot\cos x\cdot dx$, que la volvemos a hacer por partes eligiendo de igual manera que la primera vez (si elegimos diferente no sale):

$\begin{matrix} u = \cos x \\ dv = e^x\cdot dx \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} du = (-senx)\cdot dx \\ \int dv = \int e^x\cdot dx \end{matrix} \rightarrow v = e^x$ Ahora sustituimos: $J = \int e^x\cdot\cos x\ dx = e^x\cos x - \int e^x\cdot(-senx)\cdot dx$

Reduciendo tenemos $J = e^x\cos x + \int e^x\cdot senx\cdot dx$ ← Esta integral vuelve a ser I, parece que entramos en un bucle o ciclo, $J = e^x\cos x + I$, pero si sustituimos en la primera expresión de I tenemos:

$I = e^x senx - J$ = $e^x senx - \left(e^x \cos x \ + I\right) \to I = e^x senx - e^x \cos x - I \ \to \ 2I = e^x senx - e^x \cos x \ \to$

$I = \frac{1}{2}(e^x senx - e^x \cos x) \to$ Que lo podemos dejar sacando factor común y añadiendo la constante de integración como:

$$\boxed{I = \frac{e^x}{2}\left(senx - \cos x\right) + C}$$

5. MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Son de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

Sólo nos vamos a centrar, según las orientaciones de Selectividad, en fracciones racionales en cuyo polinomio denominador, $Q(x)$, sólo hay raíces reales.

Lo primero a tener en cuenta es que el grado del numerador $P(x)$ ha de ser menor que el grado del denominador $Q(x)$. Si no fuera así, efectuamos la división dándonos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$ y nos quedaría así $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = $C(x)$ + $\frac{R(x)}{Q(x)} \to \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ = $\int C(x)dx$ + $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$, descompuesta en dos integrales y la segunda es racional con el numerador ya de menor grado que el denominador.

De manera general, si $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ son las raíces del denominador y cada una con multiplicidad $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$, es decir, $Q(x)$ = $p \cdot (x-a_1)^{m_1} \cdot (x-a_2)^{m_2} \cdot \ \ldots\ldots (x-a_n)^{m_n}$, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_{m_1}^1}{(x-a_1)^{m_1}} + \frac{A_1^2}{x-a_2} + \frac{A_2^2}{(x-a_2)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_{m_2}^1}{(x-a_1)^{m_2}} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_1^n}{x-a_n} + \frac{A_2^n}{(x-a_n)^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_{m_n}^n}{(x-a_1)^{m_n}}$$

Veamos con ejemplos como se aplica esta *indigesta* fórmula y observaréis que es muy fácil.

<u>Ejemplo</u>: Calcular $I = \int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}dx$

Vemos que el numerador tiene grado 1 y el denominador tiene grado 2, luego no hemos de hacer la división. Pasamos a calcular las raíces del denominador, bien por Ruffini o bien por la fórmula de la ecuación de 2º grado

$x^2 - 5x + 6 = 0 \to \begin{matrix} x = 2 \\ x = 3 \end{matrix}$. Hay dos raíces distintas de multiplicidad 1.

Así tenemos que podemos descomponer de la siguiente forma el integrando $\frac{2x}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$.

Operamos en el miembro de la derecha haciendo común denominador y sumando para calcular A y B:

$\frac{2x}{x^2-5x+6} = \frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)} \rightarrow 2x = A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)$ Para calcular A y B damos valores a x convenientemente:

Para $x=2 \rightarrow 2\cdot 2 = A\cdot(2-3)+B\cdot(2-2) \rightarrow 4 = A\cdot(-1) \rightarrow A=-4$

Para $x=3 \rightarrow 2\cdot 3 = A\cdot(3-3)+B\cdot(3-2) \rightarrow B=6$

Con esto sustituimos en la integral:

$I=\int\frac{2x}{x^2-5x+6}dx = \int\frac{-4}{x-2}dx + \int\frac{6}{x-3}dx \rightarrow$Ya son integrales logarítmicas inmediatas

$$\boxed{I=-4\ln|x-2|+6\ln|x-3| + C}$$

Ejemplo: Calcular $I=\int\frac{2x^3-1}{x^2-x-2}dx$

Dado que el numerador tiene mayor grado que el denominador hemos de hacer la división de polinomios como sabemos:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & & & -1 & x^2-x-2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +2x^2 & +4x & & 2x+2 = C(x) \\ & +2x^2 & +4x & -1 & \\ & -2x^2 & +2x & +4 & \\ & & 6x & +3 & = R(x) \end{array}$$

Así tenemos que: $I=\int\frac{2x^3-1}{x^2-x-2}dx = \int\left[(2x+2)+\frac{6x+3}{x^2-x-2}\right]dx = \int(2x+2)dx + \int\frac{6x+3}{x^2-x-2}dx \rightarrow$

$I=x^2+2x + \int\frac{6x+3}{x^2-x-2}dx$. Esta última integral la notamos por $J=\int\frac{6x+3}{x^2-x-2}dx$ y ya podemos aplicar lo mismo que en el ejemplo anterior, pues ya tenemos el denominador con mayor grado:

$x^2-x-2=0 \rightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}$. Hay dos raíces distintas de multiplicidad 1.

Descomponemos en fracciones simples el integrando

$\frac{6x+3}{x^2-x-2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \rightarrow \frac{6x+3}{x^2-x-2} = \frac{A\cdot(x+1)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+1)} \rightarrow 6x+3 = A\cdot(x+1)+B\cdot(x-2)$

Damos valores convenientemente a x :

Para $x=-1$ → $-3=B\cdot(-3)$ → $B=1$

Para $x=2$ → $15=A\cdot 3$ → $A=5$

Sustituimos en J:

$$J=\int\frac{6x+3}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx=5\ln|x-2|+\ln|x+1|+C$$

Y volviendo a I :

$$\boxed{I=x^2+2x+5\ln|x-2|+\ln|x+1|+C}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular I = $\int\frac{2x-1}{x^3-3x+2}dx$

Calculamos las raíces del denominador (descomponemos en factores) mediante la Regla de Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	
-2		-2		
	1	0		

Luego tenemos que $x^3-3x+2=(x-1)^2\cdot(x+2)$, que nos dice que $x=1$ es una raíz de multiplicidad 2 y $x=-2$ es una raíz de multiplicidad 1. Pasamos a descomponer el integrando según la teoría:

$$\frac{2x-1}{x^3-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$ →Operamos sumando con común denominador

$$\frac{2x-1}{x^3-3x+2}=\frac{A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\rightarrow 2x-1=A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2$$

Ahora damos valores a x convenientemente:

Para $x=1 \rightarrow 1=A\cdot 0\cdot 3+B\cdot 3+C\cdot 0^2\rightarrow B=\frac{1}{3}$

Para $x=-2\rightarrow -5=A\cdot(-3)\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot(-3)^2\rightarrow C=\frac{-5}{9}$

Para $x=0$ $\rightarrow -1=A\cdot(-1)\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 2+\left(\frac{-5}{9}\right)\cdot(-1)^2\rightarrow -1=-2\cdot A+\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\rightarrow A=\frac{5}{9}$

Pasamos a sustituir en I :

$$I=\int\frac{2x-1}{x^3-3x+2}dx=\int\left(\frac{5/9}{x-1}+\frac{1/3}{(x-1)^2}+\frac{-5/9}{x+2}\right)dx=\frac{5}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx-\frac{5}{9}\int\frac{1}{x+2}dx\rightarrow$$

$$I=\frac{5}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\int(x-1)^{-2}\,dx-\frac{5}{9}\ln|x+2| \rightarrow I=\frac{5}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-\frac{5}{9}\ln|x+2|+\mathrm{C}\rightarrow$$

$$\boxed{I=\frac{5}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{5}{9}\ln|x+2|+C}$$

6. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE O SUSTITUCIÓN

Este método consiste en expresar la función integrando dada en función de otra variable de modo que la integral resultante sea más fácil. Una vez resuelta ésta, hay que deshacer el cambio para dejar la variable original.

Vamos a verlo mediante ejemplos, y mucha práctica es lo que hace falta para manejar esta forma de integración.

Ejemplo: Calcular $I=\int \cos x\sqrt{senx}\;dx$

Si nos fijamos la función seno está dentro de una raíz cuadrada, y además tenemos su derivada (que es el coseno) como un factor del integrando. (NOTA: la integral la podemos ver así $\int\sqrt{senx}\cdot\cos x\,dx$)

Normalmente el cambio de variable a realizar es tomar una función cuya derivada sea un factor del integrando.

En este caso hacemos: $t=senx$. De este cambio hemos de sacar los diferenciales, y eso se hace derivando en el cambio que hemos elegido: cada miembro respecto de su variable y poniendo su correspondiente diferencial

$$(t)'=(senx)'\rightarrow 1\cdot dt=\cos x\cdot dx\rightarrow dt=\cos x\cdot dx$$

Por tanto, tenemos: $\begin{cases} t=senx \\ dt=\cos x\cdot dx\end{cases}$

Sustituimos en I: $I=\int\sqrt{senx}\cdot\cos x\;dx=\int\sqrt{t}\;dt\rightarrow I=\int t^{\frac{1}{2}}dt\rightarrow I=\dfrac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\mathrm{C}\rightarrow I=\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\mathrm{C}\rightarrow I=\dfrac{2\cdot\sqrt{t^3}}{3}+C$

Ahora deshacemos el cambio $t=senx$ y nos queda: $\boxed{I=\dfrac{2\cdot\sqrt{sen^3x}}{3}+C}$

Ejemplo: Calcular $I=\int\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+2x}}dx$ Esta es una integral un poco complicada de resolver, pero si elegimos bien el cambio de variable resulta fácil. Hacemos el cambio $t^3=1+2x$. Vamos ahora a despejar la x en función de t→ $\dfrac{t^3-1}{2}=x$ Y ahora hacemos diferenciales→ $(\dfrac{t^3-1}{2})'=x'\rightarrow\dfrac{3t^2}{2}dt=dx$

Resumiendo: $t^3=1+2x$; $\dfrac{t^3-1}{2}=x$; $\dfrac{3t^2}{2}dt=dx$ que los usamos para la integral original

$I=\int\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+2x}}dx=\int\dfrac{\frac{t^3-1}{2}}{\sqrt[3]{t^3}}\cdot\dfrac{3t^2}{2}\cdot dt\rightarrow$(operamos un poco y agrupamos) $I=\int\dfrac{t^3-1}{2\cdot t}\cdot\dfrac{3t^2}{2}\cdot dt\rightarrow I=\int\dfrac{3t^5-3t^2}{4\cdot t}\cdot dt$

→ (simplificamos una t) $I=\int\frac{3t^4-3t}{4}\cdot dt$ → $I=\frac{3}{4}\int t^4\cdot dt-\frac{3}{4}\int t\cdot dt$ = $\frac{3}{4}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{t^2}{2}+C$ → $I=\frac{3t^5}{20}-\frac{3t^2}{8}+C$ (*)

Ahora hemos de deshacer el cambio, como $t^3=1+2x$ → $t=\sqrt[3]{1+2x}$ y sustituyendo en (*), nos queda:

$$\boxed{I=\frac{3\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5}{20}-\frac{3\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2}{8}+C}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $I=\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$ (examen de selectividad de 2010)

En el examen se recomienda hacer el cambio $t^2=e^{-x}$. Si de este cambio diferenciamos obtenemos $2\cdot t\cdot dt=e^{-x}\cdot(-1)\cdot dx$ que no aporta nada para la sustitución, luego esta diferenciación la desechamos.

Con $t^2=e^{-x}$, despejamos la x, tomando logaritmos neperianos→ $\ln t^2=\ln e^{-x}$ → $2\ln t=-x$ → $x=-2\ln t$ y aquí es donde diferenciamos→ $dx=-2\cdot\frac{1}{t}\cdot dt$

Resumiendo, tenemos: $t^2=e^{-x}$; $dx=\frac{-2}{t}\cdot dt$ y sustituimos en la integral principal:

$I=\int\frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}dx$ = $\int\frac{5}{1+\sqrt{t^2}}\cdot\frac{-2}{t}\cdot dt$ → I = $\int\frac{-10}{(1+t)\cdot t}dt$ Nos queda una integral racional con raíces de multiplicidad 1 que son $t=0$ y $t=-1$. Descomponemos en fracciones simples según el apartado 5):

$\frac{-10}{(1+t)\cdot t}=\frac{A}{1+t}+\frac{B}{t}$ → $\frac{-10}{(1+t)\cdot t}=\frac{A\cdot t+B\cdot(1+t)}{t\cdot(1+t)}$ → $-10=A\cdot t+B\cdot(1+t)$

Damos valores a t para obtener A y B

Para $t=0$ → $-10=B$

Para $t=-1$ → $-10=A\cdot(-1)$ → $A=10$

Así: → $I=\int\frac{-10}{(1+t)\cdot t}dt$ = $\int\left(\frac{10}{1+t}+\frac{-10}{t}\right)dt$ → $I=10\cdot\ln|1+t|-10\cdot\ln|t|+C$

Como $t^2=e^{-x}$ → $t=\sqrt{e^{-x}}$, deshacemos el cambio y nos queda:

$$\boxed{I=10\cdot\ln\left(1+\sqrt{e^{-x}}\right)-10\cdot\ln\sqrt{e^{-x}}+C}$$

Podemos operar un poco con las propiedades de los logaritmos y dar un resultado más simplificado:

$I=10\cdot\ln\frac{\left(1+\sqrt{e^{-x}}\right)}{\sqrt{e^{-x}}}+C$ → $I=10\cdot\ln\left(1+\sqrt{e^{-x}}\right)\cdot\sqrt{e^{x}}+C$ → $I=10\cdot\ln\left(\sqrt{e^{x}}+1\right)+C$ que es mucho más elegante.

<u>NOTA</u>: Es conveniente efectuar la comprobación derivando y así practicamos que falta nos hace.