UNIDAD 14: **APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.**

CONTENIDO

1. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Propiedad: Si una función es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0. Lo contrario no es cierto, es decir, hay funciones continuas en un punto x_0 que no son derivables en ese punto x_0

Resumiendo:
$$\text{Derivable} \Rightarrow \text{Continua}$$
$$\text{Continua} \nRightarrow \text{Derivable o no derivable}$$

Propiedad: Si una función es continua en x_0, la derivada existe si y sólo si existen las derivadas laterales y estas coinciden.

Esta propiedad la utilizaremos para calcular la derivada en puntos donde la función cambia de definición.

Ejemplo: Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x\le 0 \\ x^2-1 & si \quad 0<x<2 \\ 4x-5 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$, estudiar si es derivable en $x_0=0$ y en $x_0=2$

Veamos en $x_0=0$

Primero por ser una función por partes vamos a estudiar la continuidad en $x_0=0$, como ya sabemos

a) Límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1$ Como podemos apreciar son distintos, luego la función presenta una discontinuidad no evitable de salto finito y amplitud 2. Por tanto, según la propiedad al no ser continua sabemos que no es derivable $x_0=0$, y no hace falta calcular las derivadas laterales.

Veamos ahora en $x_0=2$

Vamos primero a estudiar la continuidad en $x_0=2$

a) Límites laterales

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-1)=3$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(4x-5)=3$ Como los límites laterales coinciden, entonces $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

b) $\exists f(2)=4\cdot 2-5=3$

c) Como $\lim_{x\to 2} f(x)=3=f(2)$, entonces la función es continua en $x_0=2$

Con esto no sabemos si es derivable o no, pero puede que lo sea.

Estudiemos pues la derivabilidad en $x_0=2$. Derivemos la función:

$f'(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad 0<x<2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$, y vemos que hemos quitado los signo = de las desigualdades, pues es en los puntos donde cambia de definición donde puede presentar problemas de derivabilidad.

Calculamos las derivadas laterales en $x_0=2$ y veamos si coinciden o no:

Derivada lateral derecha: $f'(2^+) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 4 = 4$

Derivada lateral izquierda: $f'(2^-) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x = 4$

Como vemos: $f'(2^+) = f'(2^-) = 4$, luego f es derivable en $x_0 = 2$ y $f'(2) = 4$

Podemos poner ahora que, $f'(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad 0<x\le 2 \\ 4 & si \quad x>2 \end{cases}$ o bien $f'(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad 0<x<2 \\ 4 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

<u>*NOTA*</u>: Como vemos, en los puntos x_0 donde la función cambia de definición, hemos de estudiar primero la continuidad y si nos sale continua realizar después el estudio con derivadas laterales.

<u>Ejemplo</u>: Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 6x-3 & si \quad x\le 1 \\ ax^2+bx+2 & si \quad x>1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determina los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

Como observamos, esta función tiene dos partes y ambas son polinómicas:

Si $x<1$, $f(x)=6x-3$ es polinómica de primer grado y siempre tiene sentido, y además es continua y derivable como sabemos en $(-\infty,1)$.

Si $x=1$, la función está definida y toma el valor $f(1)=6-3=3$, por tanto, es del dominio, pero tendremos que estudiar la continuidad y derivabilidad pues es un punto donde cambia de definición.

Si $x>1$, $f(x)=ax^2+bx+2$ es polinómica de 2º grado, por tanto, siempre tiene sentido y además será continua y derivable en $(1,+\infty)$

Veamos el caso $x=1$ imponiendo que sea continua y derivable para calcular a y b.

<u>Continuidad en $x=1$</u>

- Límites laterales

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(6x-3) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(ax^2+bx+2) = a+b+2$$

- $\exists f(1)=3$

Para que la función sea continua los límites laterales y el valor que tome la función deben coincidir, luego:

$a+b+2=3 \Leftrightarrow a+b=1$, que nos proporciona una primera ecuación.

<u>Derivabilidad en $x=1$</u>

Derivamos en la expresión de la función, quitando el "="

$f'(x) = \begin{cases} 6 & si \quad x<1 \\ 2ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$, y ahora hacemos las derivadas laterales e igualamos:

Derivada lateral derecha: $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2ax+b) = 2a+b$

Derivada lateral izquierda: $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 6 = 6$

Para que sea derivable en $x=1$, igualamos las derivadas laterales: $2a+b=6$, y ya tenemos otra ecuación.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=6 \end{cases} \overset{E_2-E_1}{\Rightarrow} \begin{cases} a+b=1 \\ a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5+b=1 \Rightarrow b=-4 \\ a=5 \end{cases}$$

2. RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN

La derivada de una función en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$

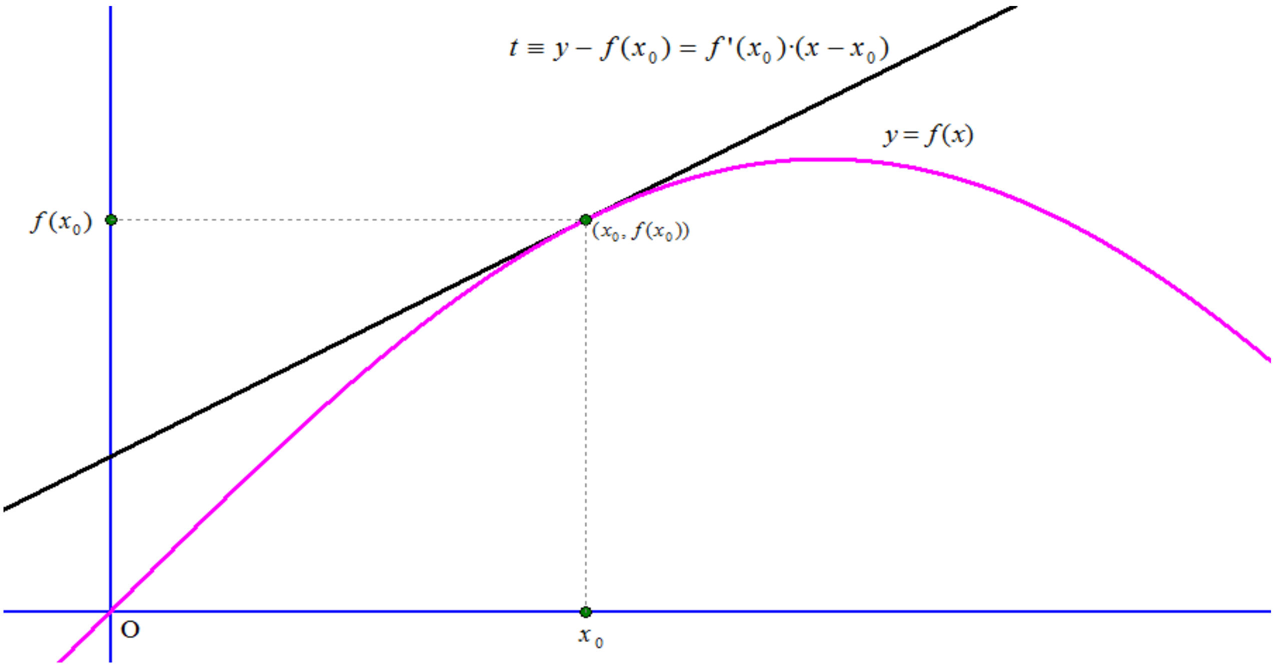
$D[f(x_0)] = f'(x_0) = m_{\text{recta tangente}}$ en x_0.

Con esto podemos obtener la ecuación de la recta tangente a la función en x_0 en el punto $(x_0, f(x_0))$

(*NOTA*: Del año pasado sabemos que la ecuación de una recta dada su pendiente m y un punto por donde pasa (a,b) es así: $r \equiv y-b = m\cdot(x-a)$)

Aplicando la ecuación de la nota anterior tenemos la **ecuación de la recta tangente**:

$$t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$



También podemos usar la expresión para la tangente: $t \equiv y = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

Ejemplo: Calcular las ecuaciones de la recta tangente a la función $y = x^2 - x$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$

Calculamos la función derivada: $y' = 2x-1$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente es: $m = y'(3) = 2\cdot3-1 = 5$

Nos falta conocer $y(3) = 3^2 - 3 = 6$ y ya sólo sustituir en la ecuación de la recta tangente:

$t \equiv y = y'(x_0)\cdot(x - x_0) + y(x_0)$

Recta tangente: $t \equiv y = 5\cdot(x-3)+6 \Rightarrow t \equiv y = 5x - 15 + 6 \Rightarrow \; t \equiv y = 5x - 9$

Ejemplo: Se considera la función $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$, obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta $y = -3x + 1$

NOTA: Para que dos rectas sean paralelas han de tener la misma pendiente, que nos indica la inclinación de la recta sobre el eje OX.

La recta $y = -3x + 1$ tiene por pendiente $m = -3$, y esta pendiente ha de coincidir con la pendiente de la recta tangente, que es la derivada de la función.

Derivamos: $f'(x) = 9x^2 - 12x$ e igualamos a la pendiente, y resolvemos:

$f'(x) = 9x^2 - 12x = -3 \Rightarrow 9x^2 - 12x + 3 = 0 \text{ (dividimos por 3)} \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

Resolvemos la ecuación de 2º grado: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \dfrac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \dfrac{6}{6} = 1 \\ \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

Pues tenemos entonces dos rectas tangentes que son paralelas a la recta dada $y = -3x + 1$

Caso 1: $x_o = 1$, y calculamos $\begin{cases} f(1) = 3\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 5 = 2 \\ f'(1) = -3 \text{ (como ya sabemos)} \end{cases}$

Así, la recta tangente correspondiente es: $t_1 \equiv y = -3\cdot(x-1) + 2 \Rightarrow t \equiv y = -3x + 5$

Caso 1: $x_o = \dfrac{1}{3}$, y calculamos $\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 - 6\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + 5 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{6}{9} + 5 = \dfrac{40}{9} \\ f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = -3 \text{ (como ya sabemos)} \end{cases}$

Así, la recta tangente correspondiente es: $t_1 \equiv y = -3\cdot(x - \dfrac{1}{3}) + \dfrac{40}{9} \Rightarrow t \equiv y = -3x + \dfrac{49}{9}$

3. MONOTONÍA (CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO) DE UNA FUNCIÓN

Estudiando el signo de la derivada primera podemos saber cuándo una función es creciente o decreciente. Esto se llama también el estudio de la **monotonía** de la función.

Propiedad:

- Si $f'(x) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente en x
- Si $f'(x) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente en x

Ejemplo: Estudiar la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 1$

Lo primero es fijarnos que su dominio es todo $\mathbb{R}$, $Dom(f) = \mathbb{R}$

Calculamos su función derivada, que resulta $f'(x) = -2x + 5$. Que como vemos también tiene sentido en todo $\mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, su **dominio de derivabilidad** es todo $\mathbb{R}$

Vamos a estudiar ahora el signo de f'. Primero veamos dónde se anula.

$f'(x)=0 \rightarrow -2x+5=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$. Con este punto construimos una tabla de signos para f'

	$(-\infty,\frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2},+\infty)$
$f'(x)=-2x+5$	**+**	**-**
	$\uparrow$	$\downarrow$

Los signos los obtenemos de igual forma a como hacíamos en los dominios (sustituyendo por un valor del intervalo)

De la tabla de signos podemos concluir que:

f es creciente en $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$

f es decreciente en $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$

<u>Ejemplo</u>: Estudiar la monotonía de $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

Tenemos que $Dom(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

Calculamos la función derivada, $f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Como vemos, la función es derivable (ó tiene por dominio de derivabilidad) en $\mathbb{R}-\{1\}$

Vemos ahora dónde se anulan el numerador y el denominador, para poder construir la tabla de signos de la derivada.

Del numerador: $x^2-2x=0 \rightarrow x\cdot(x-2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Del denominador: $(x-1)^2=0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1$

Ya pasamos a construir la tabla de signos:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x^2-2x	**+**	**-**	**-**	**+**
	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

<u>*NOTA*</u>: Como podéis observar en la tabla no hemos puesto el factor del denominador pues al ser $(x-1)^2$, éste siempre será positivo demos el valor que le demos y por tanto no influye en el signo de f'. Si el exponente hubiese sido impar, entonces si teníamos que haberlo puesto.

Podemos concluir que:

f es creciente en $(-\infty,0)$

f es decreciente en $(0,1)$

f es decreciente en $(1,2)$

f es creciente en $(2,+\infty)$

<u>Ejemplo</u>: Dada la función $f(x)=\left|-x^2+2x+3\right|$

a) Estudia la continuidad y derivabilidad en su dominio.
b) Estudia la monotonía (crecimiento y decrecimiento) en su dominio.

a) Al ser el valor absoluto de un polinomio, $Dom(f)=\mathbb{R}$

Como vemos se trata de una función que tiene un valor absoluto de un polinomio, por ello vamos a intentar expresarla como una función a trozos:

Vemos dónde se anula el argumento del valor absoluto: $-x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2+12}}{-2} \Rightarrow$

$x=\dfrac{-2\pm 4}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$. Con estos valores vamos construir una tabla de signos para conocer dónde f es positiva o negativa:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$-x^2+2x+3$	**-**	**+**	**-**

Con esto, podemos poner la función como sigue:

$$f(x)=\left|-x^2+2x+3\right|=\begin{cases} -(-x^2+2x+3) & si & x<-1 \\ -x^2+2x+3 & si & -1\le x\le 3 \\ -(-x^2+2x+3) & si & x>3 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3 & si & x<-1 \\ -x^2+2x+3 & si & -1\le x\le 3 \\ x^2-2x-3 & si & x>3 \end{cases}$$

<u>Continuidad</u>: Lo hacemos de forma rápida, pues sólo en $x=-1$ y $x=3$ puede presentar problemas de continuidad, que son los puntos donde cambia de definición:

En $x=-1$: tenemos que: $\begin{cases} f(-1)=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^-}\left(x^2-2x-3\right)=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\left(-x^2+2x+3\right)=0 \end{cases}$, luego es continua en $x=-1$

En $x=3$: tenemos que: $\begin{cases} f(3)=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^+}\left(x^2-2x-3\right)=0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 3^-}\left(-x^2+2x+3\right)=0 \end{cases}$, luego es continua en $x=3$

<u>Derivabilidad</u>: Derivemos la función por partes: $f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & si & x<-1 \\ -2x+2 & si & -1<x<3 \\ 2x-2 & si & x>3 \end{cases}$

Puede presentar problemas de derivabilidad en los puntos $x=-1$ y $x=3$

En $x=-1$: tenemos que: $\begin{cases} f'(-1^-)=2\cdot(-1)-2=-4 \\ f'(-1^+)=-2\cdot(-1)+2=4 \end{cases}$, no es derivable pues las derivadas laterales no coinciden

En $x=3$: tenemos que: $\begin{cases} f'(3^-)=-2\cdot 3+2=-4 \\ f'(3^+)=2\cdot 3-2=4 \end{cases}$, no es derivable pues las derivadas laterales no coinciden

b) Estudiemos el crecimiento, usando $f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & si & x<-1 \\ -2x+2 & si & -1<x<3 \\ 2x-2 & si & x>3 \end{cases}$, y vemos dónde se anulan sus partes: $\begin{matrix} 2x-2=0 \Rightarrow x=1 \\ -2x+2=0 \Rightarrow x=1 \end{matrix}$

Construimos una tabla de signos, teniendo en cuenta los puntos, $x=-1$, $x=1$ y $x=3$.

NOTA: En sombreado gris, la parte de la derivada que no se puede aplicar en ese intervalo)

$f'(x)$	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$2x-2$	-			+
$-2x+2$		+	-	
	-	+	-	+
	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

La función $f(x)=\left|-x^2+2x+3\right|$ es creciente en $(-1,1)$ y en $(3,+\infty)$

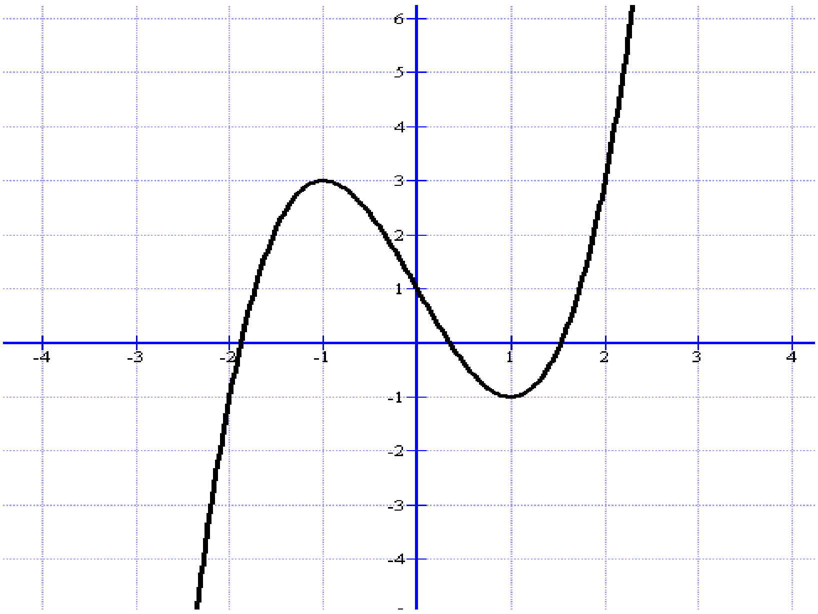
La función $f(x)=\left|-x^2+2x+3\right|$ es decreciente en $(-\infty,-1)$ y en $(1,3)$

4. EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS

Una función $y=f(x)$ tiene un **<u>máximo relativo</u>** en un punto de abscisa x_0 (o en el punto $(x_0, f(x_0))$) si $f(x_0)$ es el mayor valor que alcanza f en un entorno de x_0.

Una función $y=f(x)$ tiene un **<u>mínimo relativo</u>** en un punto de abscisa x_0 (o en el punto $(x_0, f(x_0))$) si $f(x_0)$ es el menor valor que alcanza f en un entorno de x_0.

<u>Ejemplo</u>: Tenemos la función $y=f(x)$ cuya gráfica es la siguiente:



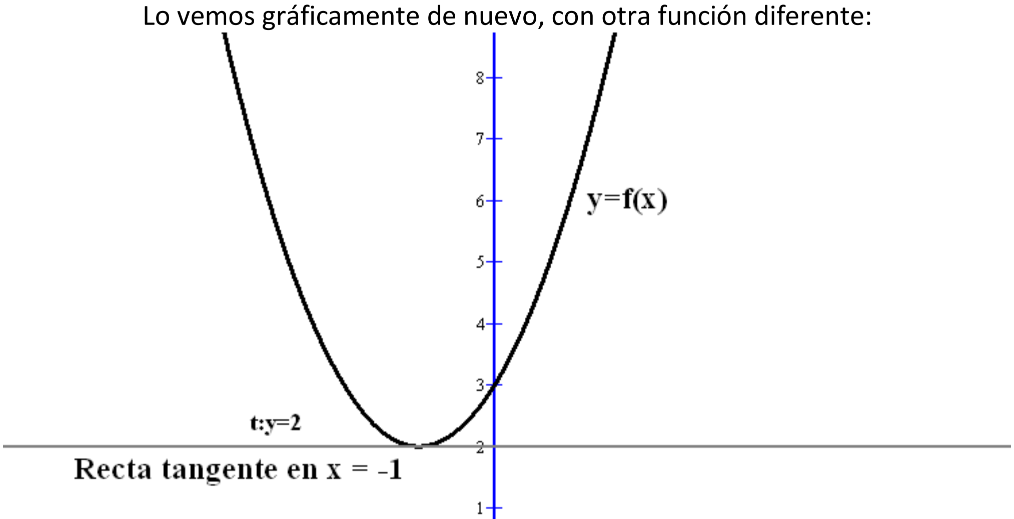
Podemos observar que en el punto de abscisa $x_0 = -1$, la función tiene un máximo relativo y el valor que alcanza es 3, que como vemos no es absoluto. También se suele decir que la función tiene un máximo relativo en $(-1,3)$.

Podemos observar que en el punto de abscisa $x_0 = 1$, la función tiene un mínimo relativo y el valor que alcanza es -1, que como vemos no es absoluto. También se suele decir que la función tiene un mínimo relativo en $(1,-1)$.

¿Cómo calcular los extremos relativos de una función dada por su criterio o fórmula? Si observamos la gráfica del ejemplo anterior nos damos cuenta que las rectas tangentes tanto en el máximo como en el mínimo relativo son horizontales. Esto quiere decir que su pendiente es 0, o sea, $f'(-1) = 0$ y $f'(1) = 0$

Efectivamente, en los extremos relativos, si una función es derivable, su derivada tiene que valer 0.

Lo vemos gráficamente de nuevo, con otra función diferente:



Como se ve la recta tangente en el mínimo tiene por pendiente 0 (es una recta horizontal), y como sabemos la pendiente de la recta tangente en el punto coincide con el valor de la derivada. Por tanto, $f'(-1) = 0$

Propiedad: Si una función $y = f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto de abscisa x_0 y es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$

Si vemos que a la izquierda de un punto x_0 (que sea del dominio de la función y derivable en él) la función es creciente $\uparrow$ y a la derecha es decreciente $\downarrow$, podemos concluir que la función presenta un máximo relativo en el punto de abscisa x_0.

Si vemos que a la izquierda de un punto x_0 (que sea del dominio de la función y derivable en él) la función es decreciente $\downarrow$ y a la derecha es creciente $\uparrow$, podemos concluir que la función presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa x_0.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, calcular sus extremos relativos

Como vemos se trata de una función polinómica, y por tanto, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y es derivable en todo $\mathbb{R}$.

Calculamos la función derivada $f'(x) = 3x^2 - 3$, y vemos dónde se anula (estos puntos serán los posibles extremos y además nos determinan los intervalos de monotonía)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ahora hacemos nuestra tabla de signos de la derivada

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$3x^2 - 3$	**+**	**-**	**+**
	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

En $x_0 = -1$, la función pasa de ser creciente a decreciente, luego presenta un máximo relativo y el valor que alcanza es $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 1 = 3$ (también se dice que la función presenta un máximo relativo en $(-1,3)$)

En $x_0 = 1$, la función pasa de ser decreciente a creciente, luego presenta un mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 1 = -1$ (también se dice que la función presenta un mínimo relativo en $(1,-1)$)

Ejemplo: Estudiar los extremos relativos de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. Derivamos: $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Vemos dónde se anula el numerador, pues el denominador ya lo sabemos, en $x = 1$:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Construimos la tabla de signos para la derivada:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x^2-2x	**+**	**-**	**-**	**+**
$(x-1)^2$	**+**	**+**	**+**	**+**
	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

(la fila de $(x-1)^2$, no es necesario ponerla, pues al estar al cuadrado siempre será positiva y no afectará al signo)

De aquí deducimos que:

En $x_0=0$, la función tiene un máximo relativo

En $x_0=2$, la función tiene un mínimo relativo

¡**OJO**! En $x_0=1$, la función no puede tener extremos pues no es del dominio

Propiedad: Toda función continua en un intervalo cerrado tiene máximo y mínimo absolutos.

Si el intervalo no es cerrado, entonces habrá que ver la monotonía de la función y cómo se comporta en $+\infty$ y en $-\infty$ y en los puntos extremos que no sean del dominio o cambie de definición.

Ejemplo: Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad -2\le x<0\\ (x-1)^2 & si \quad 0\le x\le 2\end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en todo su dominio
b) Calcule los extremos de la función, tanto relativos como absolutos.

Lo primero a observar es su dominio, que aparece limitado por las restricciones de la función por partes. Es fácil ver que sólo está definida desde -2 incluido hasta 2 incluido, luego, $Dom(f)=[-2,2]$

a) Empecemos con la continuidad:

Puede presentar problemas de continuidad donde cambia de definición, en $x=0$, y en los extremos del dominio, en $x=-2$ y $x=2$, donde sólo podrá ser continua por la derecha o por la izquierda.

En $x=-2$, tenemos que no se puede hacer el límite lateral izquierdo, luego se puede decir que será continua por la izquierda al ser polinómica, y con esto no hace falta hacer límites laterales.

En $x=2$, análogamente sólo es continua por la izquierda pues no se puede calcular el límite lateral derecho

En $x=0$, tenemos que: $\begin{cases} f(0)=(0-1)^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)^2=1\end{cases}$, luego f es continua en $x=0$

Hagamos ahora la derivabilidad, teniendo en cuenta también las particularidades laterales en $x=-2$ y $x=2$

Derivando: $f'(x)=\begin{cases}2(x+1) & si \quad -2<x<0\\ 2(x-1) & si \quad 0<x<2\end{cases}$

En $x=-2$, decimos que f es derivable por la derecha y $f'(-2^+)=2\cdot(-2+1)=-2$

En $x=2$, decimos que f es derivable por la izquierda y $f'(2^-)=2\cdot(2-1)=2$

En $x=0$, veamos qué pasa con las derivadas laterales: $\begin{cases} f'(0^-)=2\cdot(0+1)=2 \\ f'(0^+)=2\cdot(0-1)=-2 \end{cases}$, como no coinciden, f no es derivable $x=0$

b) Vamos a estudiar la monotonía y a partir de ella, obtendremos los extremos.

$f'(x)=\begin{cases} 2(x+1) & si \quad -2<x<0 \\ 2(x-1) & si \quad 0<x<2 \end{cases}$, vemos dónde se anula cada parte: $\begin{cases} 2(x+1)=0 \Rightarrow x=-1 \\ 2(x-1)=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

Construimos la tabla de signos de la derivada:

	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$
$2(x+1)$	**-**	**+**		
$2(x-1)$			**-**	**+**
	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

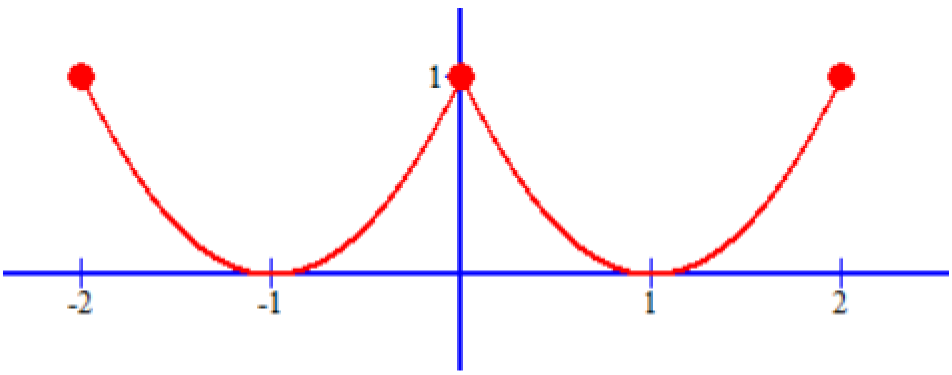
Observando lo obtenido y teniendo en cuenta que f es continua en el intervalo cerrado $[-2,2]$, tenemos que:

- En $x=-2$, f tiene un máximo y el valor que alcanza es $f(-2)=(-2+1)^2=1$
- En $x=-1$, f tiene un mínimo y el valor que alcanza es $f(-1)=(-1+1)^2=0$
- En $x=0$, f tiene un máximo y el valor que alcanza es $f(0)=(0-1)^2=1$
- En $x=1$, f tiene un mínimo y el valor que alcanza es $f(1)=(1-1)^2=0$
- En $x=2$, f tiene un máximo y el valor que alcanza es $f(2)=(2-1)^2=1$

Tiene 3 máximos absolutos en los puntos: $(-2,1),(0,1)$ y $(2,1)$

Tiene 2 mínimos absolutos en los puntos: $(-1,0)$ y $(1,0)$

Su representación gráfica es la siguiente, que es fácil de hacer pues son partes de parábolas:



<u>Ejemplo</u>: Sea la función $f(x)=(x^2-x+1)\cdot e^x$ definida en el intervalo $[-4,+\infty)$. Estudia su monotonía y sus extremos relativos y absolutos.

Lo primero a tener en cuenta es el dominio de la función, que en este caso es: $Dom(f)=[-4,+\infty)$, por lo que en $x=-4$, puede tener un extremo absoluto al ser cerrado el intervalo,

Derivemos y estudiemos el signo de la derivada:

$$f'(x)=(2x-1)\cdot e^x+(x^2-x+1)\cdot e^x=\left(2x-1+x^2-x+1\right)\cdot e^x \Rightarrow \ f'(x)=\left(x^2+x\right)\cdot e^x$$

Vemos dónde anula la derivada: $f'(x)=\left(x^2+x\right)\cdot e^x=0\Rightarrow\begin{cases}x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=-1\end{cases}\\ e^x=0\Rightarrow \text{ No tiene solución}\end{cases}$

Construimos la tabla de signos de la derivada:

	$(-4,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
x^2+x	**+**	**-**	**+**
e^x	**+**	**+**	**+**
	+	**-**	**+**
	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Monotonía:

f es creciente en $(-4,-1)$ y en $(0,+\infty)$

f es decreciente en $(-1,0)$

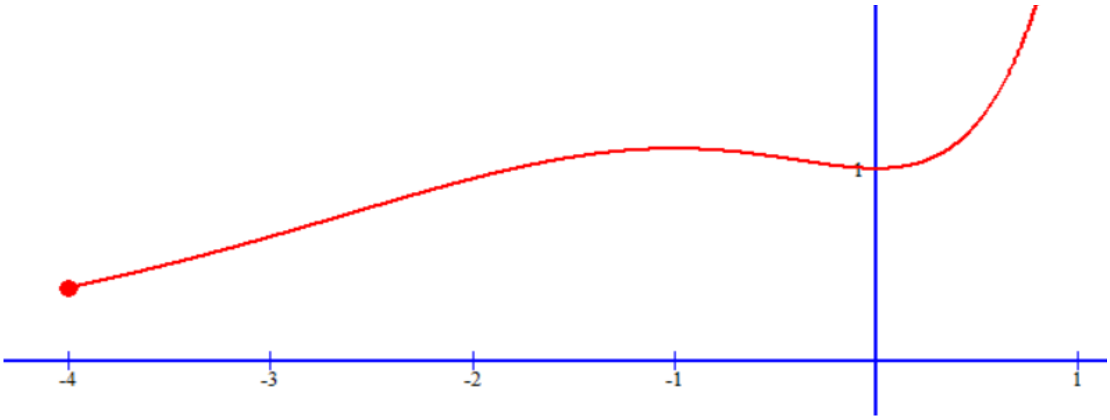
Extremos relativos:

En $x=-1$, f tiene un máximo relativo pues pasa de creciente a decreciente, y el valor que alcanza es $f(-1)=((-1)^2-(-1)+1)\cdot e^{-1}=3\cdot e^{-1}\approx 1'1036$

En $x=0$, f tiene un mínimo relativo relativo pues pasa de decreciente a creciente, y el valor que alcanza es $f(0)=(0^2-0+1)\cdot e^0=e^0=1$

En $x=-4$, que es del dominio y a partir de ahí la función es creciente en hasta $x=-1$, también tiene un mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(-4)=((-4)^2-(-4)+1)\cdot e^{-4}=21\cdot e^{-4}\approx 0'3846$. Y este mínimo es absoluto pues es menor el valor que alcanza que el del otro mínimo relativo en $x=0$ y además la función a partir de $x=0$ es creciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+1)\cdot e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot e^x=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$

Os dejo la gráfica de la función para que veáis el comportamiento que hemos estudiado.



<u>Ejemplo</u>: Sea la función $f(x)=\begin{cases} -2x+2a & si \quad -4\le x\le -2 \\ -2x^2-4a & si \quad -2<x\le 2 \\ -8x+b & si \quad 2<x\le 3 \end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que la función sea continua en su dominio. Para esos valores, ¿es f derivable?
b) Para $a=-2$ y $b=16$, estudia la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos y absolutos.

a) Tenemos que la función está definida en el intervalo cerrado $[-4,3]$ y sus partes son polinómicas, cambiando de definición en $x=-2$ y en $x=2$, que es dónde tendremos que imponer la condición de continuidad pues:
- En $(-4,-2)$, $(-2,2)$ y $(2,3)$ es continua por ser polinómica
- En $x=-4$, es continua por la derecha
- En $x=3$, es continua por la izquierda

Impongamos la continuidad en $x=-2$

- $\exists f(-2)=-2\cdot(-2)+2a=4+2a$
- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(-2x+2a)=4+2a$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-2x^2-4a)=-8-4a$

Para que sea continua: $4+2a=-8-4a \Rightarrow 6a=-12 \Rightarrow a=-2$

Impongamos la continuidad en $x=2$

- $\exists f(2)=-2\cdot 2^2-4a=-8-4a$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-2x^2-4a)=-8-4a$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-8x+b)=-16+b$

Para que sea continua y como $a=-2$: $-8-4\cdot(-2)=-16+b \Rightarrow 0=-16+b \Rightarrow b=16$

Solución: $\begin{cases} a=-2 \\ b=16 \end{cases}$

b) Para esos valores, hemos visto en el apartado a) que la función es continua, luego la función tiene extremos absolutos y los alcanza en los extremos relativos o bien en los extremos del dominio (que es el intervalo cerrado $[-4,3]$

Derivemos la función: $f(x)=\begin{cases} -2x-4 & si \quad -4\le x\le -2 \\ -2x^2+8 & si \quad -2<x\le 2 \\ -8x+16 & si \quad 2<x\le 3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2 & si \quad -4<x<-2 \\ -4x & si \quad -2<x<2 \\ -8 & si \quad 2<x<3 \end{cases}$

Vemos si la derivada se anula limitado a las restricciones de cada parte:

$f'(x)=-2\ne 0 \Rightarrow$ No se anula nunca

$f'(x)=-4x=0 \Rightarrow x=0$ Posible extremo

$f'(x)=-8\ne 0 \Rightarrow$ No se anula nunca

Construimos la tabla de signos:

$f'(x)$	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,3)$
-2	**-**			
$-4x$		**+**	**-**	
-8				**-**
	$\downarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

Monotonía:

- f creciente en $(-2,0)$
- f decreciente en $(-4,-2)$, $(0,2)$ y $(2,3)$

Extremos:

- En $x=-4$, máximo relativo y el valor que alcanza es $f(-4)=-2\cdot(-4)-4=4$
- En $x=-2$, mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(-2)=-2\cdot(-2)-4=0$
- En $x=0$, máximo relativo y el valor que alcanza es $f(0)=-2\cdot 0^2+8=8$
- En $x=3$, mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(3)=-8\cdot 3+16=-8$

Y en $x=0$ tenemos el máximo absoluto y el valor que alcanza es $f(0)=-2\cdot 0^2+8=8$

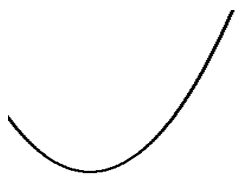
Y en $x=3$, tenemos el mínimo absoluto y el valor que alcanza es $f(3)=-8\cdot 3+16=-8$

Recordemos que la existencia de estos extremos es porque la función es continua en su intervalo de definición, $[-4,3]$, que es cerrado.

5. CURVATURA. PUNTOS DE INFLEXIÓN

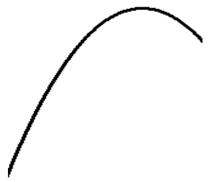
No vamos a entrar en profundidad en el significado de cóncavo o convexo en una función, sólo mediante unas gráficas veremos su significado.

Una función es **<u>convexa</u>** en un intervalo si su gráfica en ese intervalo es similar al siguiente dibujo



Algunos libros lo llaman también como cóncava hacia las y positivas. Nosotros diremos sólo convexa.

Una función es **<u>cóncava</u>** en un intervalo si su gráfica en ese intervalo es similar al siguiente dibujo



Algunos libros lo llaman también como cóncava hacia las y negativas. Nosotros diremos sólo cóncava

Estudiar la curvatura de una función es ver dónde es cóncava ó convexa.

La caracterización de dónde una función es cóncava o convexa viene dada por el signo de la derivada segunda.

NOTA IMPORTANTE: Si x_0 es un punto de inflexión e $y = f(x)$ es derivable dos veces en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$

Propiedad:

Si $f'' < 0$, entonces la función es cóncava

Si $f'' > 0$, entonces la función es convexa

Ejemplo: Estudiar la curvatura de $f(x) = x^3 - 6x^2$

Como es una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$, y es derivable infinitamente en todo $\mathbb{R}$

Derivamos hasta la 2ª derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12x \rightarrow f''(x) = 6x - 12$

Vamos a estudiar el signo de f''. La igualamos a 0: $6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$

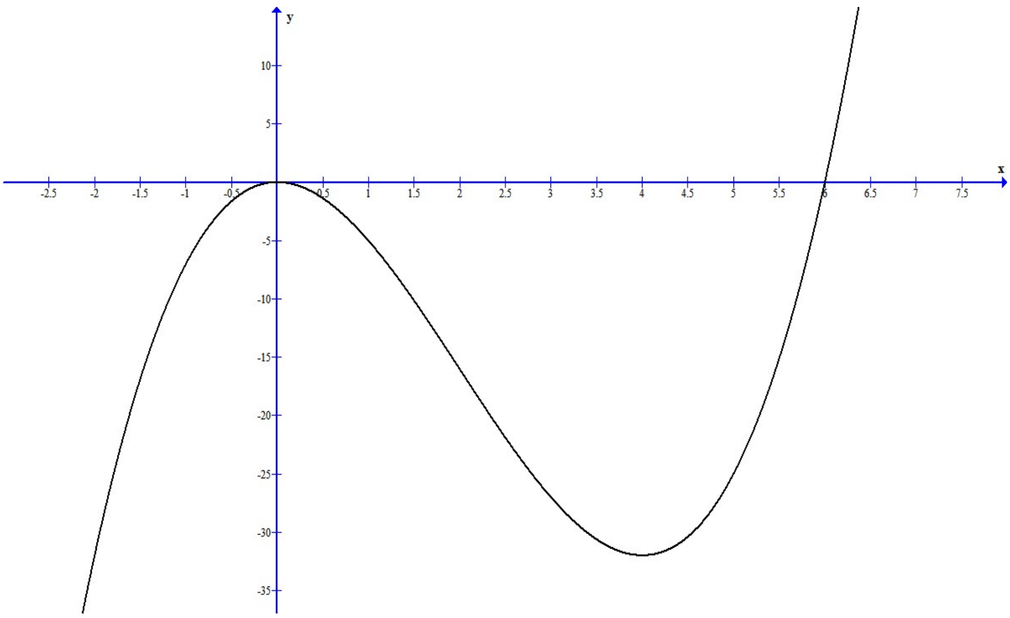
Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$6x-12$	**-**	**+**
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

En $(-\infty,2)$, la función es cóncava.

En $(2,+\infty)$, la función es convexa.

La gráfica de esta función es como sigue, para que veáis que coincide con el estudio realizado



En $x = 2$, se produce el cambio de concavidad o curvatura.

NOTA: Como siempre, se puede decir que en $(2,-16)$ es donde se produce el cambio de curvatura, en lugar de decir $x = 2$.

Definición: Diremos que una función $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0, cuando la función cambia de curvatura en ese punto.

Si pasa de convexa a cóncava, se llama punto de inflexión convexo-cóncavo.

Si pasa de cóncava a convexa, se llama punto de inflexión cóncavo-convexo.

<u>NOTA IMPORTANTE:</u> Si x_0 es un punto de inflexión e $y = f(x)$ es derivable dos veces en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$

<u>Ejemplo</u>: Calcular los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 6x^2$

Esta función es la de un ejemplo anterior, aprovechamos lo ya hecho:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$6x-12$	**-**	**+**
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

Como vemos, en $x_0 = 2$, la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo.

<u>Ejemplo</u>: Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{2}{x-3}$

Siempre primero tengamos en cuenta el dominio: $Dom(y) = \mathbb{R} - \{3\}$. En su dominio esta función es derivable pues es racional y no se anula el denominador

Calculamos la 2 ª derivada: $y' = \dfrac{-2}{(x-3)^2} \Rightarrow y'' = \dfrac{4}{(x-3)^3}$. Veamos dónde se anula que serán los posibles puntos de inflexión y nos permite hacer la tabla de signos: $y'' = \dfrac{4}{(x-3)^3} = 0 \Rightarrow 4 = 0$. No hay solución.

Hacemos la tabla de signos y ¡¡OJO!!! hay que tener en cuenta también los que anulan al denominador que no son del dominio.

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{4}{(x-3)^3}$	**-**	**+**
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

Podemos concluir que:

En $(-\infty,3)$, la función es cóncava.

En $(3,+\infty)$, la función es convexa.

Y no tiene puntos de inflexión, pues en $x = 3$ no tiene sentido pues no es del dominio.

<u>Ejemplo</u>: Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$, estudia su monotonía, curvatura y puntos de inflexión.

Observamos que $Dom(f)=\mathbb{R}$, pues en la parte racional, se anula el denominador para $x=1$, pero $1>0$ con lo que se le aplica la otra parte.

Veamos la continuidad, que sólo en $x=0$ puede presentar problemas al cambiar de definición, pues en los demás puntos es polinómica o racional y no se anula el denominador, luego es continua.

En $x=0$,

- $\exists f(0)=0^2-2=-2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$

Se tiene que f presenta en $x=0$ una discontinuidad de salto finito y amplitud 1. Como mucho, podríamos decir que f es continua por la derecha.

Derivemos ahora, sabiendo que no es continua en $x=0$, por lo que tampoco puede ser derivable.

$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ 2x & si \quad x>0\end{cases}$. Vemos dónde se anula:

$$\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=0 & si \quad x<0\\ 2x=0 & si \quad x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1=0 \text{ no se anula} & x=1 \text{ no se considera pues no es <0}\\ x=0 \text{ no válido pues } x>0\end{cases}$$

Construimos la tabla de signos de f':

f'	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$\dfrac{-1}{(x-1)^2}$	-	
$2x$		**+**
	$\downarrow$	$\uparrow$

<u>Monotonía</u>:

- f es decreciente en $(-\infty,0)$
- f es creciente en $(0,+\infty)$

¡OJO! $x=0$ NO es un mínimo pues la función ahí no era continua.

<u>Curvatura</u>:

Calculemos la derivada 2ª:

$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(x-1)^3} & si \quad x<0\\ 2 & si \quad x>0\end{cases}$ Lo mismo que en la derivada 1ª, $x=1$ no se considera a la hora de elaborar la tabla de signos:

f''	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$\frac{2}{(x-1)^3}$	-	
2		+
	Cóncava $\bigcap$	Convexa $\bigcup$

Luego:

- f es cóncava en $(-\infty,0)$
- f es convexa en $(0,+\infty)$
- $x=0$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo, aunque la función no sea continua en ella, pues la definición de punto de inflexión es el cambio de concavidad y que sea del dominio, y en este caso lo cumple.