UNIDAD 15: **CÁLCULO INTEGRAL.**

CONTENIDO

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

En esta unidad vamos a aprender el proceso inverso de derivar, que se llama ***integrar***.

Definición: Una función F diremos que es una *primitiva* de otra función f dada, si la derivada de F es f, es decir: F es primitiva de $f \Leftrightarrow F' = f$

Ejemplo: Dada $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$, la función $F(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$, es una primitiva de f, pues se puede verificar fácilmente que $F'(x) = 3x^2 + 6x - 2 = f(x)$

Ejemplo: Dada $f(x) = \dfrac{1}{x}$, una primitiva es $F_1(x) = \ln x$. Pero como se puede observar la primitiva no es única, pues basta sumar una constante (nº) y seguimos teniendo primitivas, como $F_2(x) = \ln x + 6$, ó $F_3(x) = \ln x - 14$.

Todas las primitivas verifican que $F_k'(x) = \dfrac{1}{x} = f(x)$

Como vemos una función puede tener infinitas primitivas, basta sumar una constante diferenciadora.

2. INTEGRAL INDEFINIDA. PROPIEDADES

Definición: Se llama *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y se representa por: $\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tal que } F \text{ es una primitiva de } f \text{ y } C \in R\}$.

Abreviamos poniendo $\int f(x)dx = F(x) + C$. Se lee *integral de* $f(x)$ *diferencial de* x.

A C se le llama *constante de integración*. A $f(x)$ se le llama *integrando*.

El símbolo $\int$ siempre ha de ir acompañado del factor dx (diferencial de x), cuyo significado es indicar la variable respecto a la cual se integra.

Ejemplo: Calcula $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$. Es obvio que $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + C$ pues se tiene que $\left(\sqrt{x} - 5\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo: Calcular $\int (4x^3 - 5)\, dx$. Sabemos que $\left(x^4 - 5x\right)' = (4x^3 - 5)$, luego $\int (4x^3 - 5)\, dx = x^4 - 5x + C$

Propiedades de la integral indefinida

a) La integral del producto de un nº real por una función es igual al nº real por la integral de la función:

$\int k \cdot f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ (un factor numérico se puede extraer del signo integral)

b) La integral de la suma o diferencia de funciones es igual a la suma o diferencia de las integrales de dichas funciones:

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Ejemplo: Calcular $I = \int \left(-3x^2 + e^x - \dfrac{6}{x}\right) dx$

$I = \int \left(-3x^2 + e^x - \dfrac{6}{x}\right) dx$ = (por la propiedad b) = $\int -3x^2 dx + \int e^x dx - \int \dfrac{6}{x}\, dx$ = (por la propiedad a) =

$-\int 3x^2 dx + \int e^x dx - 6\int \dfrac{1}{x}\, dx \Rightarrow \quad I = -x^3 + e^x - 6 \cdot \ln(x) + C$

3. INTEGRALES INMEDIATAS

Se llaman así porque se obtienen directamente del conocimiento de sus respectivas derivadas y para ello tenemos que memorizar la siguiente tabla.

TIPO	**FUNCIÓN SIMPLE**	**FUNCIÓN COMPUESTA**	**EJEMPLO**
Constante	$\int k\ dx = k\cdot x + C$	$\int k\cdot f'(x)\ dx = k\cdot f(x) + C$	$\int 3\ dx = 3\cdot x + C$
Potencial	$\int x^a\ dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$\int f^a\cdot f'\ dx = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C$	$\int (x^2+5)^3\cdot 2x\ dx = \frac{(x^2+5)^4}{4} + C$
Logarítmico	$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'}{f}\ dx = \ln\|f\| + C$	$\int \frac{7x^6+1}{x^7+x}\ dx = \ln\|x^7+x\| + C$
Exponencial	$\int e^x\ dx = e^x + C$ $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^f\cdot f'\ dx = e^f + C$ $\int a^f\cdot f'\ dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$	$\int 9^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = \frac{9^{\sqrt{x}}}{\ln 9} + C$

NOTA: Es bueno, si hay tiempo, realizar la comprobación, es decir, derivar y ver que sale el integrando.

Ejemplo: Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $I = \int x^4 dx$ = (de tipo potencial) $\frac{x^5}{5} + C$

b) $I = \int\left(\sqrt{x}+8\right)dx = \int\sqrt{x}\ dx + \int 8\ dx =$ (la 2ª integral es de tipo constante y la 1ª la ponemos en forma potencial) $= \int x^{\frac{1}{2}}dx + 8x =$ (aplicamos a la 1ª integral la fórmula de la potencial)

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 8x = \text{(operamos y simplificamos)} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 8x + C \Rightarrow I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 8x + C.$$

El resultado final lo dejamos con radicales pues el integrando así lo era.

También se puede extraer factor del radical y la solución queda: $I = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 8x + \text{C}$

c) $I = \int\left(2x^5 - 12x^4 + \frac{x}{3} - 7\right)dx \Rightarrow I = 2\frac{x^6}{6} - 12\frac{x^5}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2} - 7x + C \Rightarrow I = \frac{1}{3}x^6 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^2 - 7x + C$

d) $I = \int 2x\left(x^2+1\right)^7 dx \Rightarrow I = \int\left(x^2+1\right)^7\cdot(2x)dx =$ (la ponemos para que se vea que es de tipo potencial compuesta $\int f^a\cdot f'\ dx = \frac{f^{a+1}}{a+1} + C$) $\Rightarrow I = \frac{\left(x^2+1\right)^8}{8} + C$

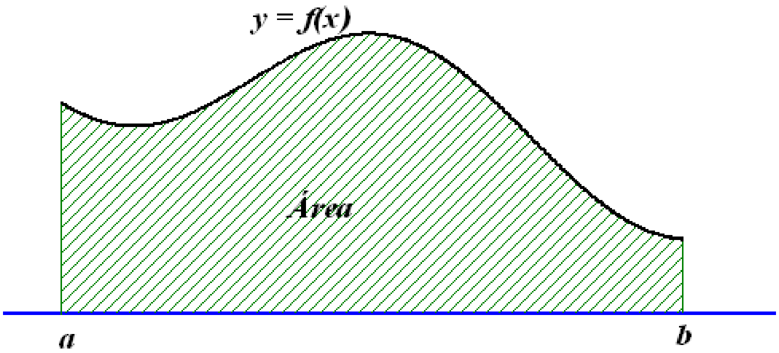
e) $I = \int\frac{4x^3+1}{x^4+x}dx \Rightarrow I = L\left|x^4+x\right| + C$ (de tipo logarítmica compuesta)

f) $I=\int xe^{x^2+6}dx$ = (preparamos un poco el integrando pues la derivada del exponente ($2x$) casi la tenemos multiplicando a la exponencial) = $\int e^{x^2+6}\cdot x\,dx$ = (por la propiedad a) de la integrales podemos jugar con los factores numéricos a nuestro gusto y como nos hace falta un 2, multiplicamos por 2 dentro de la integral y dividimos por 2 fuera, que nos deja sin variar la integral) = $\frac{1}{2}\int e^{x^2+6}\cdot 2x\,dx$ = (y ya podemos aplicar la compuesta de la exponencial $\int e^f f'=e^f$) $\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{x^2+6}+C$

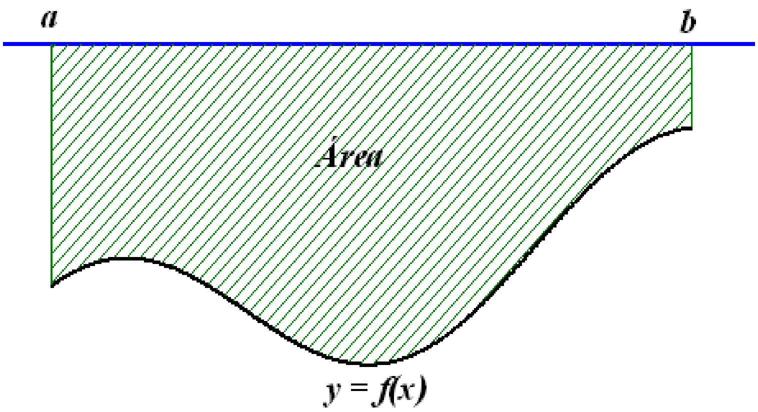
4. INTEGRAL DEFINIDA

Definición: Dada una función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, se define la ***integral definida de la función*** f ***en el intervalo [a, b]*** que se representa como $\int_a^b f(x)dx$ al siguiente valor:

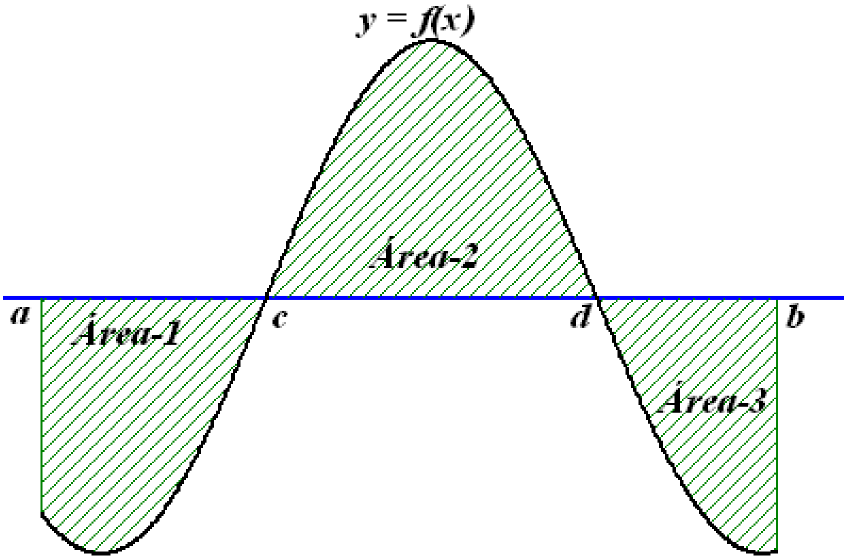
a) Si la función es positiva en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = Área$



b) Si la función es definida negativa en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = -Área$



c) Si la función cambia de signo en el intervalo $[a,b]$, entonces tenemos que trocear la integral (véase el dibujo) separando las partes positivas de las negativas: $\int_a^b f(x)dx = -Área1 + Área2 - Área3$. Por tanto, será necesario conocer los puntos de corte de la función con el eje OX



Propiedades de la integral indefinida:

1. Si los límites de integración son iguales, la integral definida es nula

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Si $y = f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx > 0$, y coincide con el área del recinto, como hemos definido.

3. Si $y = f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx < 0$, y coincide con el área del recinto, pero de signo opuesto.

4. Si c es un punto interior del intervalo $[a,b]$, se cumple que: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

5. Al intercambiar los límites de integración, la integral cambia de signo: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

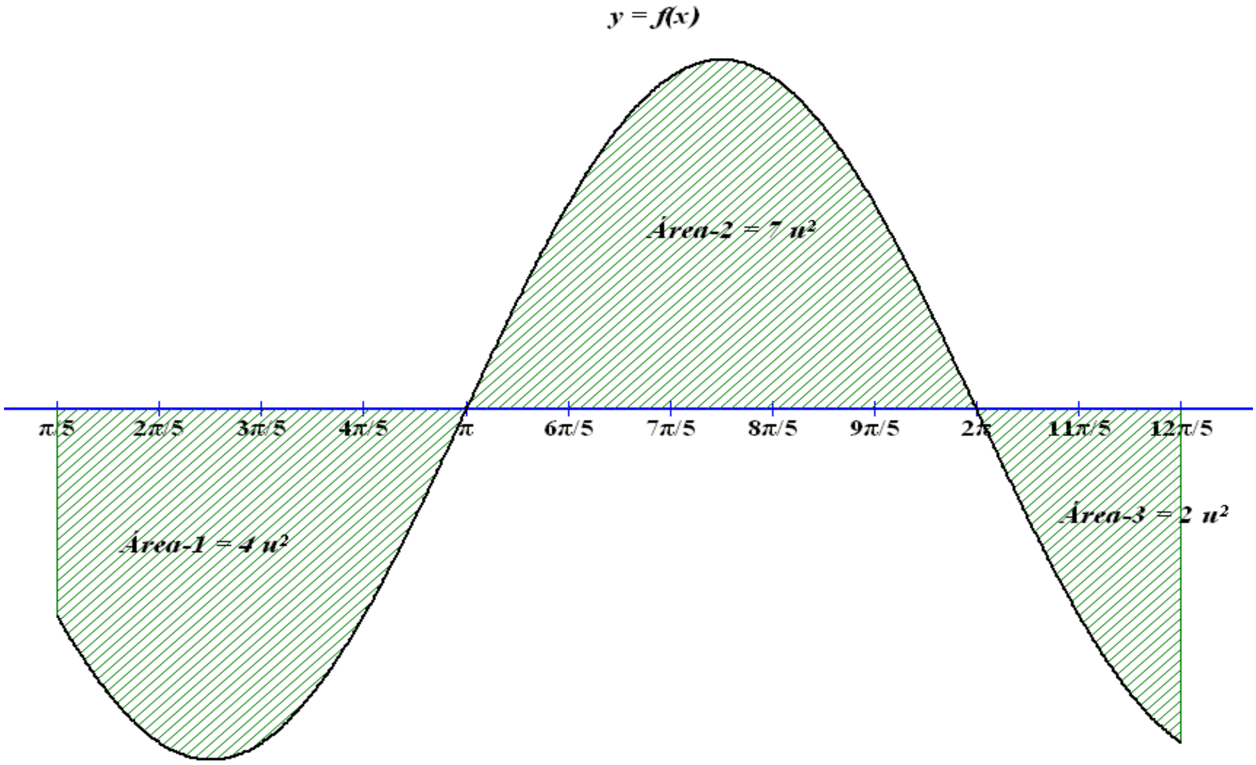
6. Linealidad de la integral indefinida:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

7. Si $f(x)\le g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Ejemplo: Con los datos del dibujo, que representa una función y el área de determinadas regiones con el eje OX, vemos que:



a) $\int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = 7$ b) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\pi} f(x)dx = -4$ c) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{2\pi} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{5}}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx = (-4)+7=3$

d) $\int_{2\pi}^{\pi} f(x)dx = -7$ e) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{12\pi}{5}} f(x)dx = -4+7-2=1$ f) $\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{12\pi}{5}} |f(x)|dx = 4+7+2=13$

5. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. REGLA DE BARROW

Teorema fundamental del cálculo integral:

Dada una función $y=f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y consideramos la función asociada

$G(x)=\int_a^x f(t)dt$ con $x\in[a,b]$, entonces se tiene que:

- G es derivable en $[a,b]$

- G es una primitiva de f , es decir, $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Regla de Barrow:

La integral definida de una función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ es igual a la diferencia de los valores que toma una primitiva cualquiera F de f en los extremos superior e inferior del intervalo [a, b]

Se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Resumiendo, para calcular integrales definidas $\int_a^b f(x)dx$ hacemos los siguientes pasos:

1. Calculamos la integral indefinida correspondiente $I = \int f(x)dx$
2. Tomamos una primitiva cualquiera, normalmente se toma para $C = 0$.
3. Aplicamos la Regla de Barrow a esa primitiva.

Ejemplo: Calcula $\int_{-2}^{3} (2x^2 - x + 2)dx$

Calculamos la integral indefinida correspondiente:

$$I = \int (2x^2 - x + 2)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

Tomamos una de las primitivas (por ejemplo, para $C = 0$) $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_{-2}^{3} (2x^2 - x + 2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{3} = \left(\frac{2\cdot 3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 2\cdot 3\right) - \left(\frac{2\cdot(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)\right) \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{3} (2x^2 - x + 2)dx = \left(\frac{54}{3} - \frac{9}{2} + 6\right) - \left(\frac{-16}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) = \frac{117}{6} - \left(\frac{-68}{6}\right) = \frac{185}{6}$$

Ejemplo: Calcula $\int_2^5 \frac{1}{x+1}dx$

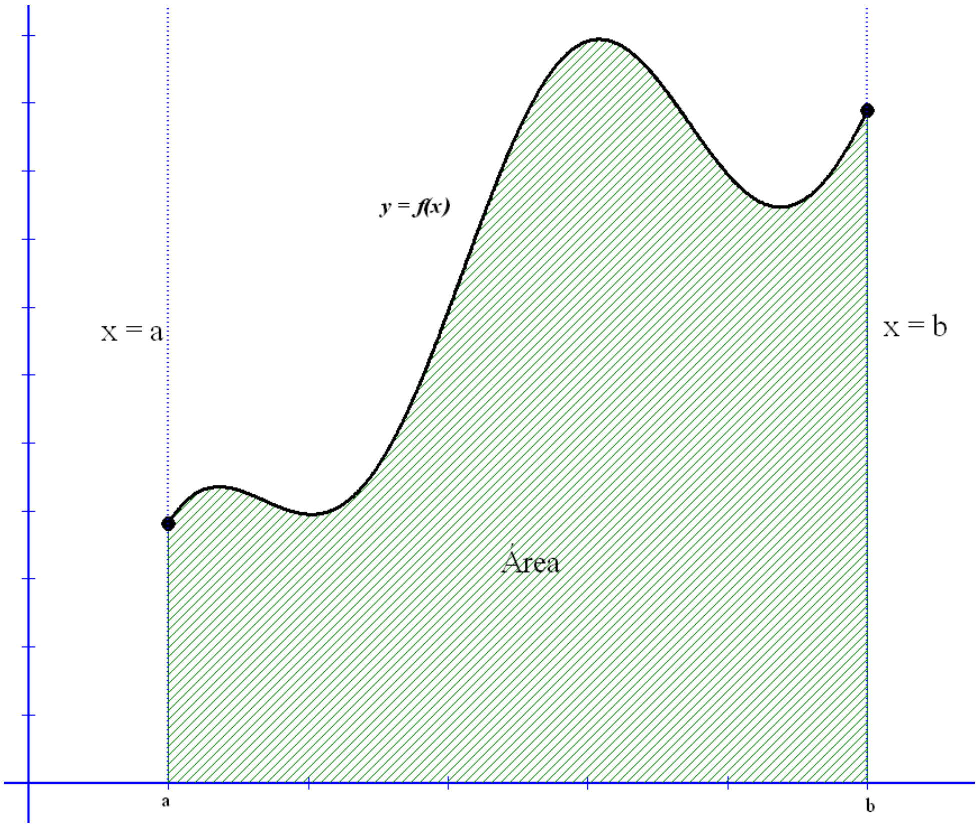
Calculamos la integral indefinida: $I = \int \frac{1}{x+1}dx = L(x+1) + C$

Tomemos la primitiva para $C = 0$, $F(x) = L(x+1)$ y ahora aplicamos la regla de Barrow:

$$\int_2^5 \frac{1}{x+1}dx = L(x+1)]_2^5 = L(6) - L(3) = 0'693$$

6. ÁREA ENCERRADA BAJO UNA CURVA

Vamos a calcular en este punto el área determinada por una función $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$



Para poder realizar este cálculo debemos de:

- Representar gráficamente la función $y = f(x)$ (especialmente en el intervalo [a, b]).
- Delimitar el recinto cuya área queremos calcular.
- Tener en cuenta el signo de la función. Si es negativa, la integral indefinida saldrá negativa y le tendremos que cambiar el signo para dar el resultado correcto del área.
- Además, si la función cambia de signo en el intervalo, hemos de dividir el cálculo del área en partes con signo constante para tener en cuenta los signos de las integrales.
- Tener en cuenta posibles simetrías del recinto para no hacer cálculos innecesarios.

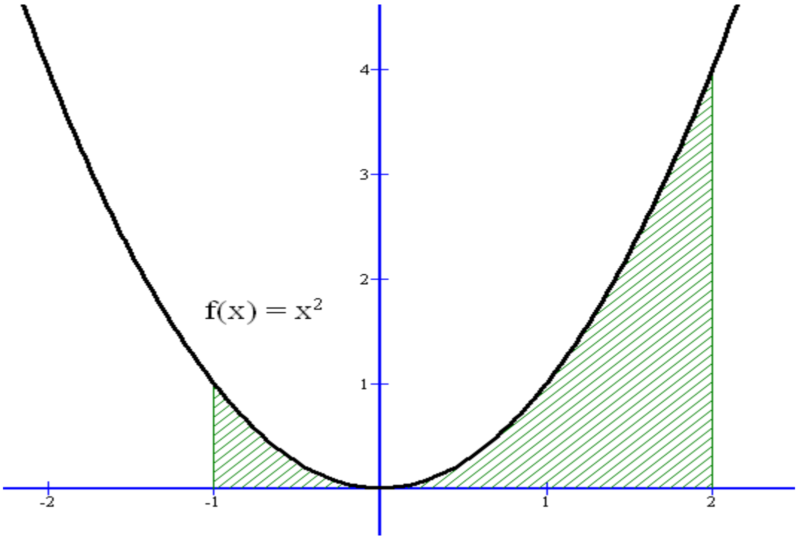
Veamos ejemplos donde apliquemos lo dicho:

Ejemplo: Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^2$ y las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 2$

Lo primero que hemos de hacer es representar gráficamente la función, que en este caso por ser una parábola es fácilmente representable como podéis observar en el dibujo.

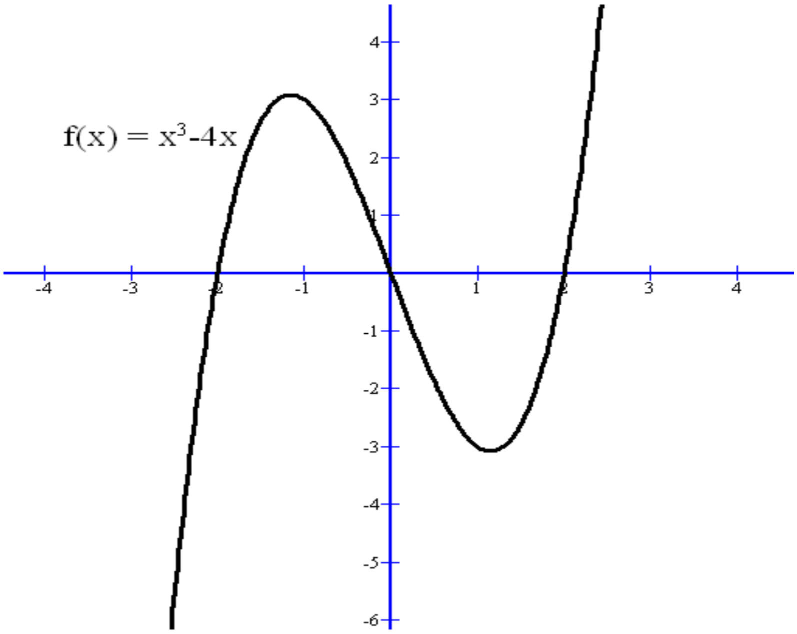
Lo que nos piden es el área sombreada, y como la función es positiva, podemos poner que:

$$\boxed{\text{Área} = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3 \text{ u}^2}$$

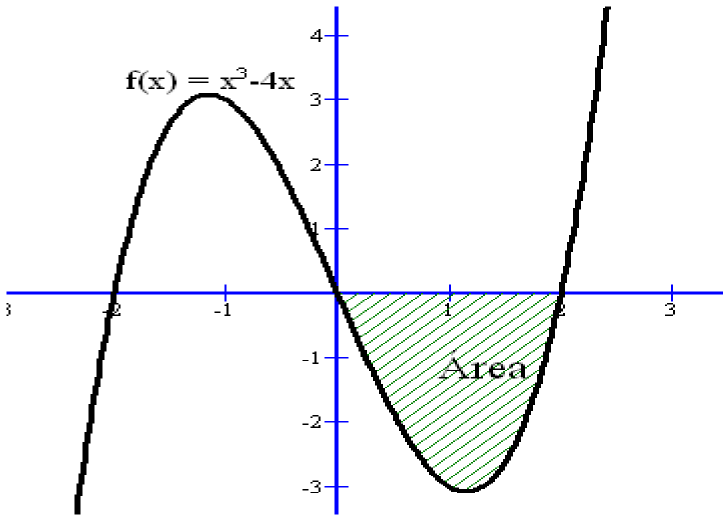


Ejemplo: Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - 4x$ y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 2$

Os dejo a vosotros el estudio de la función para su representación gráfica. Os tiene que salir la siguiente gráfica:



El área que nos piden es:



Como vemos la función entre 0 y 2 es negativa, por tanto, la integral indefinida entre 0 y 2 saldrá negativa. Así lo que tenemos es que: Área = $-\int_0^2 (x^3-4x)dx$. Vamos a calcular la integral indefinida y al resultado le cambiamos el signo para que nos dé el área:

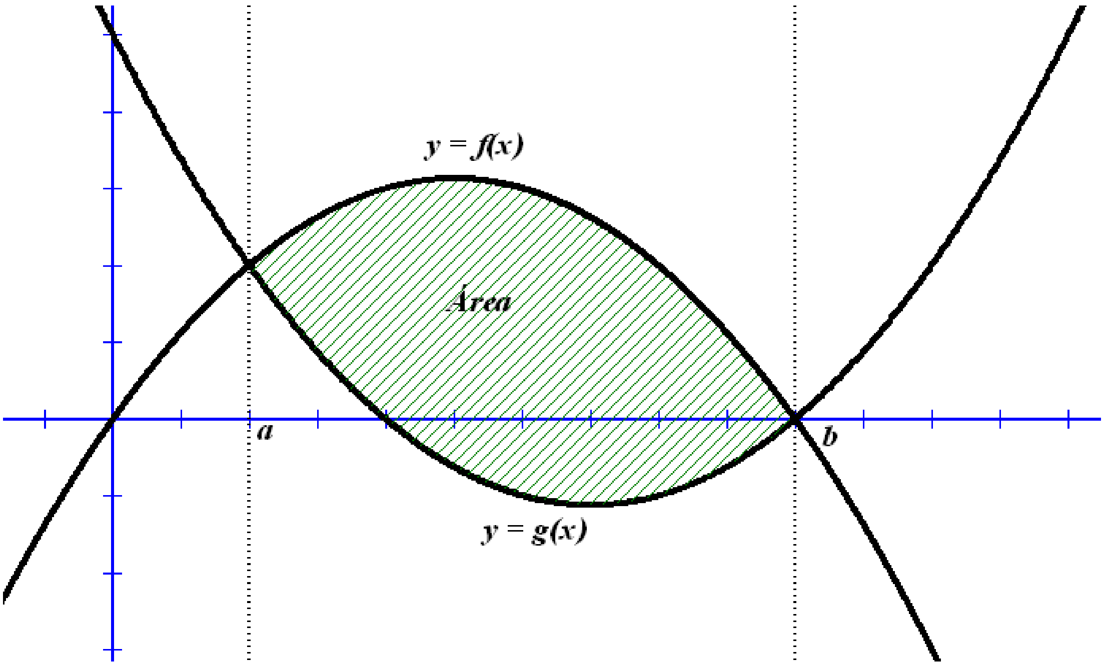
$$I=\int (x^3-4x)dx = \frac{x^4}{4}-2x^2+C \rightarrow \int_0^2 (x^3-4x)dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_0^2 = (4-8)-(0-0)=-4$$

$$\boxed{Área = 4u^2}$$

7. ÁREA ENCERRADA POR DOS CURVAS

Supongamos que tenemos dos funciones, $y=f(x)$ e $y=g(x)$, y queremos calcular el área del recinto limitado por las dos gráficas. Para ello nos va a hacer falta conocer los puntos de corte de ambas funciones y dibujarlas para saber cuál de ellas es mayor que la otra.

Si fuera como en el dibujo siguiente,



Tenemos que se cortan en $x=a$ y en $x=b$, y el área que tenemos que calcular (la sombreada) se obtiene mediante la siguiente integral indefinida:

$$Área=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \quad \text{pues} \quad f(x)\geq g(x) \ \forall x\in[a,b]$$

Aquí no importa si una función es negativa, lo que importa es cual está por encima o por debajo.

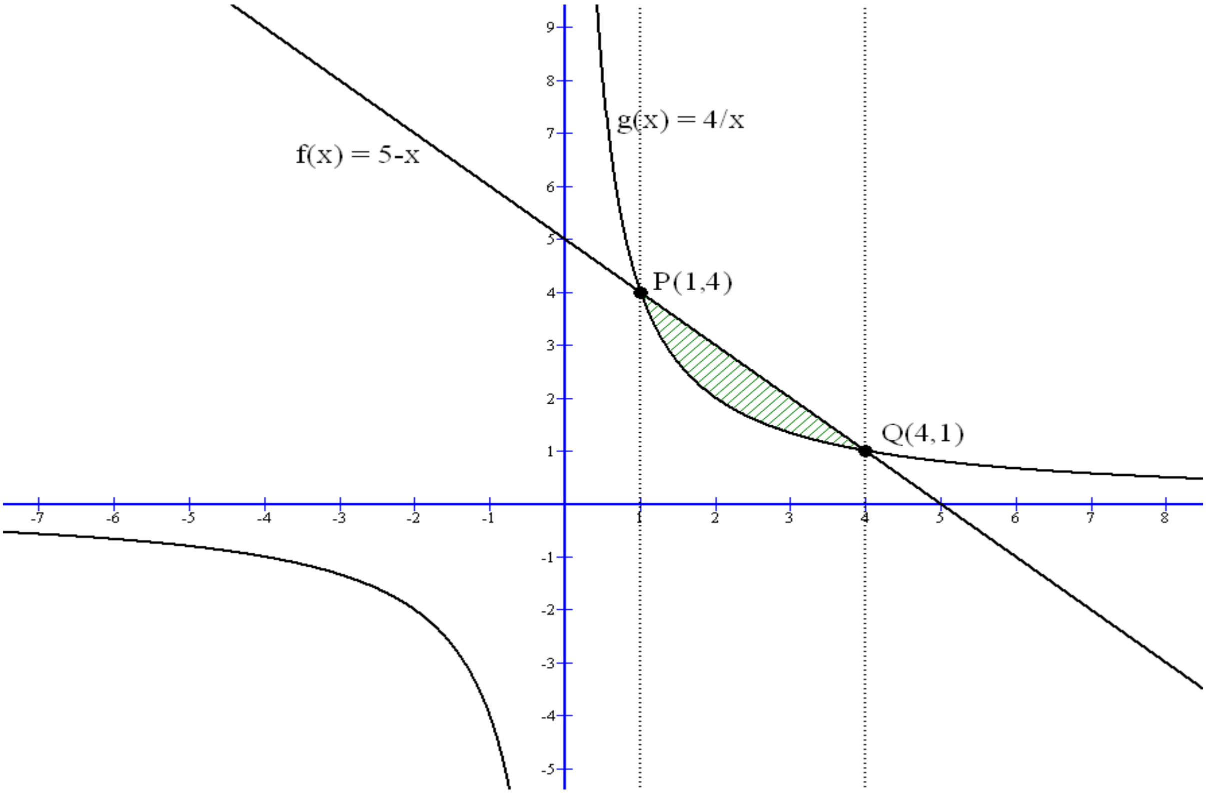
<u>Ejemplo</u>: Considera la función $f(x)=5-x$ y la función $g(x)=\frac{4}{x}$ para $x\neq 0$

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de esas dos funciones indicando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de dicho recinto

a) Son funciones fáciles de dibujar pues f es una recta y g es la hipérbola $y=\frac{1}{x}$ multiplicada por 4

Vamos a calcular los puntos de corte: $\begin{cases} y=5-x \\ y=\frac{4}{x} \end{cases} \rightarrow \frac{4}{x}=5-x \rightarrow \frac{4}{x}=\frac{5x-x^2}{x} \rightarrow 4=5x-x^2 \rightarrow x^2-5x+4=0 \rightarrow$

$\begin{cases} x=1 \rightarrow y=4 \\ x=4 \rightarrow y=1 \end{cases}$ Por tanto los puntos de corte son $P(1,4)$ y $Q(4,1)$. El recinto es la zona sombreada:



b) Como vemos $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [1,4]$, por tanto, el área del recinto es:

Área = $\int_1^4 \left[(5-x) - \frac{4}{x} \right] dx$ = (una primitiva es muy fácil de calcular para aplicar la regla de Barrow)

Área = $\left[5x - \frac{x^2}{2} - 4\ln x \right]_1^4$ = $[20-8-4\ln 4] - \left[5 - \frac{1}{2} - 4 \cdot 0 \right]$ → $\boxed{\text{Área} = \left(\frac{15}{2} - 4\ln 4 \right) \text{ u}^2}$

<u>Ejemplo</u>: Calcular el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\frac{x^2-3x}{2}$

Vamos a calcular los puntos de corte de las dos funciones:

$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=\frac{x^2-3x}{2} \end{cases} \rightarrow \sqrt{x}=\frac{x^2-3x}{2} \rightarrow 2\sqrt{x}=x^2-3x \rightarrow$(elevamos al cuadrado) $4x=x^4-6x^3+9x^2 \rightarrow$

$x^4-6x^3+9x^2-4x=0 \rightarrow x\cdot(x^3-6x^2+9x-4)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=1 \text{ Esta solución no es válida ¿por qué?} \end{cases}$

Calculemos la integral indefinida entre $x=0$ y $x=4$

$$\int_0^4\left[\frac{x^2-3x}{2}-\sqrt{x}\right]dx=\int_0^4\left[\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-\sqrt{x}\right]dx=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4=$$

$$\left(\frac{64}{6}-\frac{48}{4}-\frac{2}{3}\sqrt{64}\right)-0=\frac{32}{3}-12-\frac{16}{3}=\frac{32-36-16}{3}=\frac{-20}{3}$$

Y le sacamos valor absoluto (cambiamos el signo) y nos resulta el área:

$$\boxed{\acute{A}rea=\frac{20}{3}u^2}$$