UNIDAD 1: **MATRICES**

CONTENIDO

1. MATRICES

Una matriz se puede entender como una tabla de números ordenados en filas y columnas

Definición: Se llama **matriz de dimensión** $m \times n$ a un conjunto de números reales dispuestos en m filas y n columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Otra forma de representar de forma genérica una matriz es: $A = \left(a_{ij}\right)$ donde $\begin{cases} i = 1,2,3,\dots,m \\ j = 1,2,3,\dots,n \end{cases}$

Un elemento genérico de la matriz se designa por a_{ij} donde el subíndice i indica la fila que ocupa el elemento y el subíndice j indica la columna

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 7 \\ \sqrt{2} & 8 & -3 & -12 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, es una matriz de dimensión 3×4 (3 filas y 4 columnas) y donde,

por ejemplo: $\begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 8 \\ a_{34} = 10 \\ a_{21} = \sqrt{2} \end{cases}$

Notación: Representamos por $M_{m\times n}$ al conjunto formado por todas las matrices de dimensión $m \times n$ (es decir, con m filas y n columnas).

Representamos por M_n al conjunto formado por todas las matrices de dimensión $n \times n$, que se les llama de **orden** n o **bien cuadradas** (igual nº de filas que de columnas)

Definición: Se llama diagonal principal de una matriz a los elementos a_{ii}

Ejemplo 2: En tamaño mayor los elementos de la diagonal principal de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & -5 & 7 \\ \sqrt{2} & \mathbf{8} & -3 & -12 \\ \frac{1}{2} & 3 & \mathbf{9} & 10 \end{pmatrix}$$

Definición: Se llama diagonal secundaria de una matriz a los elementos a_{ij} que verifican $i+j=n+1$

Ejemplo: En tamaño mayor los elementos de la diagonal secundaria de la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 7 \\ \sqrt{2} & 8 & -3 & -12 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

2. TIPOS DE MATRICES

Matriz fila: Es aquella matriz que tiene una sola fila, es decir, es de dimensión $1\times n$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 & \pi \end{pmatrix}$ es una matriz fila de dimensión 1×4

Matriz columna: Es aquella matriz que tiene una sola columna, es decir, es de dimensión $m\times 1$

$B=\begin{pmatrix} -121 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3×1

Matriz nula: Es aquella matriz con todos sus elementos nulos. Se denota por $\theta_{m\times n}$, o bien, sólo por θ si se sobreentiende su dimensión

$\theta_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de dimensión 2×3

Matriz cuadrada: Como ya sabemos es aquella matriz que tiene igual nº de filas que de columnas, y en ellas no se habla de dimensión sino de orden

$A=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2

Matriz triangular superior: Es aquella que tiene todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal nulos

$C=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior

Matriz triangular inferior: Es aquella que tiene todos los elementos situados por encima de la diagonal principal nulos

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior

Matriz diagonal: Es aquella matriz en la que todos los elementos no situados en la diagonal principal son ceros o nulos. Normalmente se aplica a matrices cuadradas.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$ es una matriz diagonal

Matriz escalar: Es toda matriz diagonal cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$E=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$$ es una matriz escalar

Matriz unidad o identidad: Es la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal valen 1. Se representa por I_n o sólo por I

$$\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ es la matriz identidad de orden 3

3. OPERACIONES CON MATRICES

Definición: Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales

Suma de matrices: Para sumar dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, primero hemos de cerciorarnos de que sean de la misma dimensión $m\times n$ y la matriz suma $A+B$ es una matriz de la misma dimensión cuyos elementos se obtienen sumando los elementos que ocupan el mismo lugar, es decir, $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$

Se define la **diferencia** $A-B$= $A+(-B)$, siendo ($-B$) (**matriz opuesta de B**) la matriz que se obtiene cambiando de signo a los elementos de la matriz B

Ejemplo: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$ y la matriz $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$, calcular:

a) $A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

b) $A-B=\begin{pmatrix}10 & -4 & 7\\ -2 & 1 & -11\end{pmatrix}$

Producto por un nº real: Dado un nº real k y una matriz $A=(a_{ij})$ de dimensión $m\times n$, se define la matriz $k\cdot A$ como la matriz de dimensión $m\times n$ cuyos elementos son los de A multiplicados por k, es decir, $k\cdot A=(k\cdot a_{ij})$

Ejemplo: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$ y la matriz $B=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}$,

a) Calcular $-2A+3B=\begin{pmatrix}-10 & 4 & -12\\ 0 & -2 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15 & 6 & -3\\ 6 & 0 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-25 & 10 & -15\\ 6 & -2 & 29\end{pmatrix}$

b) Hallar una matriz X, que cumpla $2\cdot X-3A=-B$. Operamos igual que si fuera una ecuación, pero en este caso es una ecuación matricial: $\rightarrow 2\cdot X=3\cdot A-B \rightarrow X=\frac{1}{2}(3\cdot A-B)\rightarrow$

$$X=\frac{1}{2}\left[3\cdot\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix}\right]\rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}20 & -8 & 19\\ -2 & 3 & -19\end{pmatrix}\rightarrow X=\begin{pmatrix}10 & -4 & \frac{19}{2}\\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-19}{2}\end{pmatrix}$$

4. PRODUCTO DE MATRICES

NOTA MUY IMPORTANTE: Para poder multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera ha de ser igual al número de filas de la segunda.

Producto de una matriz fila por una matriz columna: El nº de columnas de la matriz fila tiene que ser igual al nº de filas de la matriz columna. Así si la matriz fila es $F=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n\end{pmatrix}$ y la matriz columna es $C=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}$, entonces $F\cdot C$ es una matriz de dimensión 1x1 (o sea, un número real) que se obtiene de la siguiente forma:

$$F\cdot C=(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\dots+a_n\cdot b_n)$$

Ejemplo: Dadas $F=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5\\ 6\\ 7\\ -2\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$ tenemos que:

a) $F\cdot C=(2\cdot 5+(-1)\cdot 6+0\cdot 7+3\cdot(-2))=(-2)$

b) $D\cdot C=(15+24+7+4)=(50)$

Producto de dos matrices: Dada una matriz $A=(a_{ij})$ de dimensión $m\times n$ y una matriz $B=(b_{ij})$ de dimensión $n\times p$ (vemos que el nº de columnas de A es igual al nº de filas de B, n), la matriz producto $P=A\cdot B=(p_{ij})$ es una matriz de dimensión $m\times p$ cuyos elementos p_{ij} se obtienen multiplicando la fila i de la matriz A por la columna j de la matriz B, como hemos explicado en el punto anterior

Ejemplo: Calcular $\begin{pmatrix}5 & 8 & 3\\ 3 & 9 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ Como vemos la primera matriz tiene dimensión 2x3 y la segunda matriz tiene de dimensión 3x1, por tanto se puede multiplicar y el resultado es una matriz de dimensión 2x1

- la fila 1 de la 1ª matriz por la columna 1 de la 2ª matriz da el elemento p_{11} del producto

- la fila 2 de la 1ª matriz por la columna 1 de la 2ª matriz da el elemento p_{21} del producto

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 8\cdot 0 + 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 2 + 9\cdot 0 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Dadas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Calcular:

a) $A\cdot B$ Se puede realizar pues A es de dimensión 3x4 y B es de dimensión 4x2. El resultado será de dimensión 3x2

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & -5 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$$ que os dejo a vosotros su realización detallada

b) $B\cdot A$ No se puede hacer, el nº de columnas de B es 2 y no coincide con el nº de filas de A que es 3

c) $A^2 = A\cdot A$ tampoco se puede hacer por las mismas razones que en b). Sólo se podrá hacer en matrices cuadradas las potencias

Propiedades del producto con matrices cuadradas:

a) El producto de matrices cuadradas es asociativo: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$
b) Las matrices cuadradas de orden n tienen elemento neutro para el producto, que es la matriz unidad o identidad de orden n: $A\cdot \mathrm{I} = \mathrm{I}\cdot A = A$ (recordemos que la matriz unidad era una matriz diagonal escalar con todos los elementos de la diagonal principal valiendo 1)
c) El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices: $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$
d) El producto de matrices cuadradas, en general, no es conmutativo: $A\cdot B \neq B\cdot A$ normalmente

5. MATRIZ TRASPUESTA. MATRIZ SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Definición: Se llama matriz traspuesta de una matriz A de dimensión $m \times n$ a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por columnas (ó las columnas por filas). Se representa por A^t ó trasp(A) y su dimensión es $n \times m$

Si una matriz es cuadrada, su traspuesta tiene el mismo orden

Ejemplo: Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades de la trasposición:

- $\left(A^t\right)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

- $(k\cdot A)^t = k\cdot A^t$
- $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$

Definición: Se llama **matriz simétrica** a toda aquella matriz cuadrada que coincide con su traspuesta, $A = A^t$

Es decir, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, $a_{ij} = a_{ji}$

Son de la forma, en el caso de las cuadradas de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$

Definición: Se llama **matriz antisimétrica** a toda aquella matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta, $A = -A^t$

Es decir, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos, $a_{ij} = -a_{ji}$

Los elementos de la diagonal principal han de ser nulos.

Son de la forma, en el caso de las cuadradas de orden 3, $A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$

6. MATRIZ INVERSA

Definición: Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama **matriz inversa** de A y se nota por A^{-1}, a la matriz cuadrada de orden n que verifica: $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I$

No todas las matrices cuadradas tienen inversa y para calcularlas aprenderemos un método en el siguiente tema. Por ahora si queremos calcular la inversa tendremos que aplicar la definición de esta y plantear el sistema de ecuaciones correspondiente.

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Consideremos $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ →(como vemos salen 4 ecuaciones)

$$\begin{pmatrix} 3x+2z & 3y+2t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x+2z=1 \\ x+z=0 \\ 3y+2t=0 \\ y+t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=-1 \\ t=3 \end{cases} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Este método es largo y tedioso pues en una matriz cuadrada de orden 3 salen 9 ecuaciones con 9 incógnitas.

7. RANGO DE UNA MATRIZ

Definición: En una matriz A de dimensión $m \times n$, diremos que una de sus filas F_i, no nula, **depende linealmente de las restantes filas** si se puede poner como combinación lineal de ellas, es decir, si

$$F_i = x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2 + \ldots + x_{i-1} \cdot F_{i-1} + x_{i+1} \cdot F_{i+1} + \ldots. + x_m \cdot F_m$$ donde los x_k son números reales

Si la fila F_i no se puede escribir de la forma anterior diremos que es **linealmente independiente** de las restantes filas

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ observamos (porque lo se de antemano) que la fila 3 es combinación lineal de las restantes, o sea, depende linealmente de ellas, pues: $F_3 = 3 \cdot F_1 + F_2 - F_4$

Para las columnas el concepto es análogo al de las filas, luego hablaremos de columnas linealmente independientes o dependientes de una matriz.

Definición: Se llama **rango o característica** de una matriz A al número de filas o columnas linealmente independientes entre sí.

El método para calcular el rango de una matriz lo aprenderemos en el tema siguiente. Aquí nos quedamos con el concepto solamente.