UNIDAD 2: **DETERMINANTES**

CONTENIDO

1. DETERMINANTES DE ORDEN 2 Y 3

Definición: Para una matriz cuadrada de orden 2, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

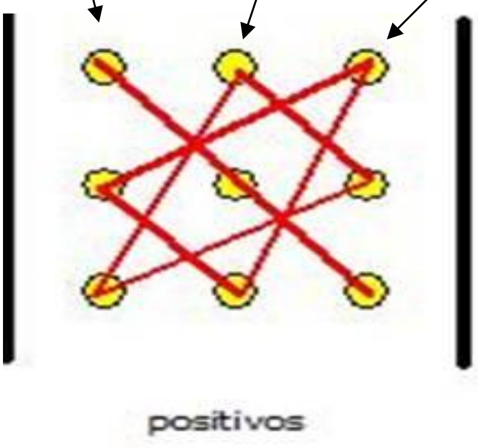
Definición: Para una matriz cuadrada de orden 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

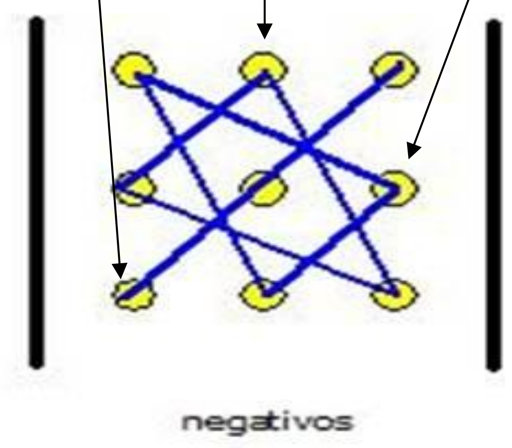
$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right) = \text{(sin paréntesis)}$$
$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

Regla de Sarrus: Para recordar con mayor facilidad el desarrollo del determinante de orden 3, podemos usar esta regla:

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} \qquad - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$





Ejemplo: Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 1\cdot(5) = -6 + 5 = -1$

b) $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 20 & a \end{vmatrix} = a^2 - 100$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -12 + 30 - 16 = 2$

Ejemplo: Calcular el valor de x en la siguiente igualdad con determinantes:

$\det \begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x-1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x - 1 \rightarrow$ (hacemos el determinante por la regla de Sarrus) $x \cdot (x-1) \cdot 2 = x - 1 \rightarrow$

$2 \cdot x^2 - 2 \cdot x = x - 1 \rightarrow 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

1: El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz traspuesta

$$|A| = |A^t|$$

2: Si los elementos de una fila o columna de una matriz se multiplican por un nº, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho nº. Esto también nos permite extraer factor común por filas o columnas para hacer un determinante más simple.

$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (metemos el 2 en la Fila 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (metemos el 2 en la columna 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ (cualquiera de esos 3 determinantes da el mismo resultado, -32)

Veamos un ejemplo de sacar factor: $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 30 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (la Columna 1 tiene como factor común 6, podemos extraerlo)

$6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (además la Fila 2 tiene como factor común 5, y lo extraemos) $6 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$ (ya aplicamos Sarrus) = $30 \cdot (0 + 2 + 6 - 0 - 2 - 8) = -60$

OJO: Si tenemos una matriz A cuadrada de orden n, y la multiplicamos por un nº k , entonces el determinante queda multiplicado por k^n, pues k multiplica a cada fila. Es decir, $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$

3: Si los elementos de una fila o columna de una matriz se pueden descomponer en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen iguales todas las filas o columnas excepto dicha columna o fila cuyos sumandos pasan respectivamente a cada uno de los determinantes.

$$\det(F_1,...,F_i+F_i',...,F_n)=\det(F_1,...,F_i,...,F_n)+\det(F_1,...,F_i',...,F_n)$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}1 & 1+1 & 3\\ 4 & 5+2 & 5\\ 2 & 3-2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 4 & 5 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=[5+10+36-30-15-4]+[2+10-24-12-4+10]=2+(-18)=-16$$

4: El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de ambas matrices

$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ y de ello también se tiene que $|A^n|=|A|^n$

Ejemplo:

$$\left|\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right|=\begin{cases}\left|\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 7\end{pmatrix}\right|=28-25=3\\ \left|\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right|=3\cdot 1=3\end{cases}$$

5: Si en una matriz permutamos (cambiamos) dos filas entre si (o dos columnas entre si), el determinante cambia de signo.

$$\det(F_1,...,F_i,....,F_j,...,F_n)=-\det(F_1,...,F_j,....,F_i,...,F_n)$$

Ejemplo:

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 4 & 5 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=5+10+36-30-15-4=2$. Si cambiamos la columna 1 con la columna 3, el determinante cambia de signo, veámoslo: $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=30+4+15-5-36-10=-2$.

Sólo se puede hacer filas con filas o columnas con columnas, y si hacemos varias permutaciones, si el número es par, el determinante no varía, pero si el número es impar el determinante cambia de signo.

6: Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales (o columnas iguales o proporcionales), entonces el determinante vale 0.

Ejemplo:

$\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 4 & 5 & 23\\ 6 & -3 & 0\end{vmatrix}$ = 0 pues si nos damos cuenta la fila 3 es 3 veces la fila 1: $F_3=3\cdot F_1$

7. Si una fila o columna es combinación lineal de las restantes filas o columnas, entonces el determinante vale 0

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ pues si nos damos cuenta $C_3 = C_1 + 2 \cdot C_2$, es decir, la columna 3 es combinación lineal de la columna 1 y de la columna 2.ç

8: Si a una fila o columna se le suma una combinación lineal de las restantes filas o columnas, el determinante no varía. Es decir, podemos sumar filas con filas o columnas con columnas, y el determinante no varía.

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ (vamos a sumar a la fila 2 la fila 1, esto se denota por $F_2 = F_2 + F_1$) =

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ (ahora en este determinante a la fila 3 le restamos dos veces la fila 1, esto se denota $F_3 = F_3 - 2F_1$) =

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} =$ -9

NOTA: Un determinante con toda una fila o columna de ceros, su valor es 0.

3. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR ADJUNTOS

Definición: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, calculamos algunos de sus 9 menores complementarios

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 15 = 27 \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

<u>Definición</u>: Dada una matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **adjunto** del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij}, a producto del menor complementario α_{ij} por el signo correspondiente a la paridad de la suma $i+j$. Es decir, $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$

La matriz cuyos elementos son los adjuntos de una matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **matriz adjunta** de A y se representa por $Adj(A)$

<u>Ejemplo</u>: Calcular la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 6=6$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2$ $\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 4=-4$ $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$

Luego:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Propiedad</u>: Se tiene que $Adj(A^t)=[Adj(A)]^t$

<u>Desarrollo de un determinante por adjuntos</u>: El determinante de una matriz cuadrada cualquiera es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

Así, si tenemos que calcular $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$, podemos hacerlo por Sarrus o bien desarrollando por una de sus filas o columnas, por ejemplo:

Si desarrollamos por la fila 2: $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23}$

Si desarrollamos por la columna 1: $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot A_{11}+a_{21}\cdot A_{21}+a_{31}\cdot A_{31}$

Este método se suele utilizar en combinación con la propiedad 8 del punto anterior para hacer ceros en una determinada fila o columna y después proceder al desarrollo por adjuntos respecto de dicha fila o columna. Este método se suele usar en determinantes de orden mayor a 3.

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, vamos a calcular su determinante de diferentes maneras:

a) Por Sarrus: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}=12-18-20-16+15+18=-9$

b) Desarrollando por la columna 3 (se puede hacer por la que queramos):

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot A_{13}+(-3)\cdot A_{23}+6\cdot A_{33}$$

Calculamos los adjuntos: $A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-9$, $A_{23}=(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1$, $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5$

Por tanto: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}=4\cdot(-9)+(-3)\cdot 1+6\cdot 5=-36-3+30=-9$

c) Haciendo ceros: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}=$ (hacemos $F_2=F_2+F_1$ y $F_3=F_3-2F_1$ para hacer ceros en la primera columna) = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}=$ (desarrollamos ahora por la primera columna, y como vemos sólo tenemos que calcular A_{11}, pues los demás están multiplicados por 0) = $1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}$ = $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$ = -9 Este último determinante de orden 2 también se podía haber hecho haciendo ceros

De esto podemos concluir que:

- El determinante de una matriz triangular o diagonal es el producto es igual al producto de los elementos de la diagonal principal
- El determinante de la matriz unidad es 1
- El determinante de la matriz nula es 0

4. MATRIZ INVERSA USANDO DETERMINANTES

Recordemos que la matriz inversa de una matriz cuadrada A es aquella matriz A^{-1} que verifica:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Las matrices que tienen inversa se llaman **regulares**.

Las matrices que no tienen inversa se llaman **singulares**.

Propiedad: Una matriz A es regular (es decir, tiene inversa) si y sólo si $|A| \neq 0$

Teorema: Dada una matriz A regular, entonces su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t \quad \text{o bien} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj\left(A^t\right)\right]$$

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\right| = 6 - 8 = -2 \neq 0$ → A es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Aplicamos cualquiera de las dos fórmulas del teorema, por ejemplo la primera $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$

Calculamos la matriz adjunta de A (lo hacéis vosotros, es muy fácil) $Adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Ahora la trasponemos:

$\left[Adj(A)\right]^t = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y por último multiplicamos por $\frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$ →

$$A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobación: Efectuamos $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} =$ (fácil de ver que es I) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Calcular la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 + 2 + 0 - 8 = 1$ → A es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$	$A_{12}=-\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$	$A_{13}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$
$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$	$A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$	$A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4$
$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3$	$A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=7$	$A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-5$

La matriz adjunta nos queda: $Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ 3 & 7 & -5\end{pmatrix}$. Calculamos la traspuesta y la multiplicamos por $\frac{1}{|A|}=\frac{1}{1}=1$, obteniendo que $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$

<u>Propiedades de la inversa:</u>

1: Si existe A^{-1}, ésta es única

2: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

3: $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

4: $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$

5. RANGO DE UNA MATRIZ POR DETERMINANTES

Como ya sabemos el rango de una matriz es el número de filas o columnas linealmente independientes. Veamos como calcularlo con determinantes.

<u>Definición</u>: Se llama menor de orden k de una matriz A de dimensión $m\times n$ al determinante de orden k formado por los elementos que pertenecen a k filas y a k columnas de la matriz A. Es decir, son los determinantes de cualquier submatriz cuadrada de A

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&5\\3&0&1\end{pmatrix}$, tenemos que es de dimensión 2×3 y por ello podemos tomar submatrices cuadradas de orden 1 y orden 2

Menores de orden 1: Son los elementos de la matriz 2, 1, 5, 3, 0 y 1

Menores de orden 2: Sólo hay 3 menores de orden 2 que son: $\begin{cases}\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}=-3\\ \begin{vmatrix}2&5\\3&1\end{vmatrix}=-13\\ \begin{vmatrix}1&5\\0&1\end{vmatrix}=1\end{cases}$ Ojo al tomar los menores pues no podemos tomar aleatoriamente los elementos del menor, este determinante $\begin{vmatrix}2&1\\0&1\end{vmatrix}$ no es un menor pues no es una submatriz de A

Ejemplo: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$ que es cuadrada de orden 3. Tiene menores de orden 1, de orden 2 y de orden 3.

Menores de orden 1: Son los 9 elementos de la matriz

Menores de orden 2: Hay 9 menores de orden 2, como $\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2&3\\5&7\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}2&5\\-2&-4\end{vmatrix}$, …..

Menores de orden 3: Sólo hay uno y es el determinante de la matriz $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{vmatrix}$

Propiedad: El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo

Ejemplo: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$ que es cuadrada de orden 3. Vamos a calcular su rango. Empezamos con los de mayor orden, en este caso, el único es $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&7\\-2&-4&-5\end{vmatrix}=-25-28-24+30+28+20$

$=1\neq 0$ → El rango es 3 pues ya no hay menores de mayor orden→ A tiene las 3 filas o las 3 columnas linealmente independientes