UNIDAD 2: **DETERMINANTES. RANGO. INVERSA**

CONTENIDO

1. DETERMINANTES DE ORDEN 1, 2 Y 3

Definición: Para una matriz cuadrada de orden 1, $A=\left(a_{11}\right)$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al nº real que indica el único elemento que la forma

Ejemplo: Dada la matriz $A=\left(-\frac{5}{7}\right)$, se tiene que $|A|=\det(A)=\left|\left(-\frac{5}{7}\right)\right|=-\frac{5}{7}$

Definición: Para una matriz cuadrada de orden 2, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Ejemplo: Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2)-1\cdot(5) = -6+5 = -1$

b) $\begin{vmatrix} a & 5 \\ 20 & a \end{vmatrix} = a^2 - 100$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot0+0\cdot2\cdot2+(-3)\cdot1\cdot4-(-3)\cdot5\cdot2-1\cdot0\cdot0-2\cdot2\cdot4 = -12+30-16 = 2$

Definición: Para una matriz cuadrada de orden 3, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se define el **determinante** de A y se nota por $\det(A)$ ó $|A|$, al siguiente nº real:

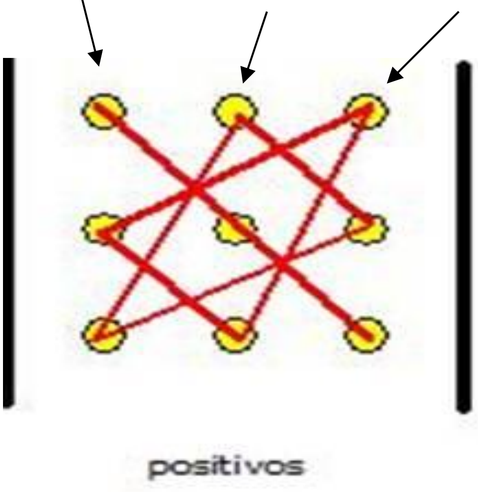
$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

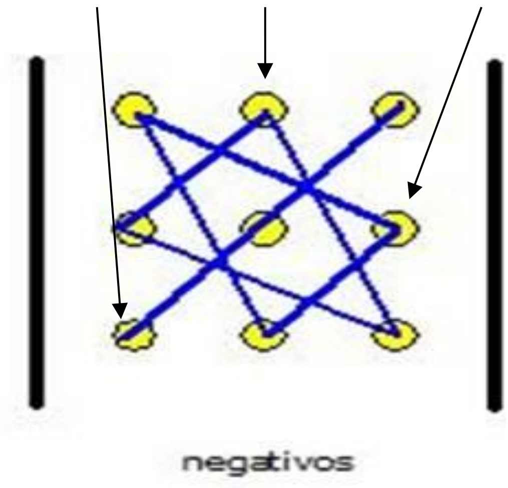
$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - \left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\right)$ = (sin paréntesis)

$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$

Regla de Sarrus: Para recordar con mayor facilidad el desarrollo del determinante de orden 3, podemos usar esta regla:

$a_{11}{\cdot}a_{22}{\cdot}a_{33} + a_{12}{\cdot}a_{23}{\cdot}a_{31} + a_{21}{\cdot}a_{32}{\cdot}a_{13}$ $\qquad - a_{13}{\cdot}a_{22}{\cdot}a_{31} - a_{21}{\cdot}a_{12}{\cdot}a_{33} - a_{11}{\cdot}a_{23}{\cdot}a_{32}$





Ejemplo: Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 18 - 20 - 16 + 15 + 18 = -9$$

Ejemplo: Calcular el valor de x en la siguiente igualdad con determinantes:

$\det\begin{pmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & x-1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = x - 1 \rightarrow$ (hacemos el determinante por la regla de Sarrus) $x{\cdot}(x-1){\cdot}2 = x - 1 \rightarrow$

$$2{\cdot}x^2 - 2{\cdot}x = x - 1 \rightarrow 2{\cdot}x^2 - 3{\cdot}x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

2. MENORES. ADJUNTOS

Definición: Dada una matriz $A = (a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} y se representa por α_{ij}, al determinante de la matriz que resulta de suprimir la fila i y la columna j.

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, calculamos sus cuatros menores complementarios

$$\alpha_{11} = 0 \qquad \alpha_{12} = 5 \qquad \alpha_{21} = -3 \qquad \alpha_{22} = -2$$

Ejemplo: En la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, calculamos algunos de sus 9 menores complementarios

$$\alpha_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=12+15=27 \qquad \alpha_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-1$$

$$\alpha_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=-2 \qquad \alpha_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=1$$

Definición: Dada una matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **adjunto** del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij}, a producto del menor complementario α_{ij} por el signo correspondiente a la paridad de la suma $i+j$. Es decir, $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$.

Como vemos el signo del menos cambia según la posición del elemento de la matriz. Para no tener que hacer continuamente las potencias de (-1), podemos usar estas matrices de signos para saber si al menos lo tenemos que cambiar de signo o no:

Matriz 2x2

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

Matriz 3x3

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Definición: La matriz cuyos elementos son los adjuntos de una matriz $A=(a_{ij})$ cuadrada de orden n, se llama **matriz adjunta** de A y se representa por $Adj(A)$,

Propiedad: Se tiene que $Adj(A^t)=[Adj(A)]^t$

Ejemplo: Calcular la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 6=6 \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 2=-2 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 4=-4 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$$

Luego:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcula la matriz adjunta de $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$	$A_{12}=-\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2$	$A_{13}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2$
$A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$	$A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5$	$A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4$
$A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3$	$A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=7$	$A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=-5$

La matriz adjunta nos queda: $Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

3. RANGO DE UNA MATRIZ

<u>Definición</u>: En una matriz A de dimensión $m\times n$, diremos que una de sus filas F_i, no nula, **<u>depende linealmente de las restantes filas</u>** si se puede poner como combinación lineal de ellas, es decir, si

$$F_i = x_1\cdot F_1 + x_2\cdot F_2 + \ldots + x_{i-1}\cdot F_{i-1} + x_{i+1}\cdot F_{i+1} + \ldots. + x_m\cdot F_m$$ donde los x_k son números reales

Si la fila F_i no se puede escribir de la forma anterior diremos que es **<u>linealmente independiente</u>** de las restantes filas

<u>Ejemplo</u>: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ observamos (porque lo sé de antemano) que la fila 3 es combinación lineal de las restantes, o sea, depende linealmente de ellas, pues: $F_3 = 3\cdot F_1 + F_2 - F_4$

Para las columnas el concepto es análogo al de las filas, luego hablaremos de columnas linealmente independientes o dependientes de una matriz.

<u>Definición</u>: Se llama **<u>rango o característica</u>** de una matriz A al número de filas o columnas linealmente independientes entre sí.

<u>Propiedad</u>: En una matriz cuadrada A de orden 2:

- Si su determinante es distinto de 0, su rango es 2.
- Si el determinante es 0 y tiene algún elemento distinto de 0, su rango es 1.
- Si todos sus elementos son 0, el rango es 0 (es decir, si es la matriz nula)

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, como $|A|=-2-8=-12\neq 0$, su rango es 2.

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, como $|A|=-8+8=0$, su rango no puede ser 2, y como tiene elementos no nulos, su rango es 1.

Propiedad: En una matriz cuadrada A de orden 3:

- Si su determinante es distinto de 0, su rango es 3.
- Si el determinante es 0 y tiene alguna submatriz cuadrada de orden 2 con determinante distinto de 0, su rango es 2.
- Si todos los determinantes de las submatrices cuadradas son 0, y tiene elemento la matriz que no son nulos, el rango es 1
- Si todos los elementos son 0, la matriz tiene rango 0.

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, como $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2+0+0-0-6+16=12\neq 0$, su rango es 3.

$rang(A)=3$

Ejemplo: Dada la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, como $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=3-18+0-0-9+24=0$, su rango no puede ser 3.

Tomamos el determinante de la submatriz $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=1+8=9\neq 0 \Rightarrow$ el rango de la matriz es 2.

$rang(B)=2$

4. MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES

Definición: La matriz inversa de una matriz cuadrada A es aquella matriz, que se representa por A^{-1}, que verifica:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$$

Las matrices que tienen inversa se llaman **regulares**.

Las matrices que no tienen inversa se llaman **singulares**.

Propiedad: Una matriz A es regular (es decir, tiene inversa) si y sólo si $|A|\neq 0$

Teorema: Dada una matriz A regular, entonces su inversa es:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t \quad \text{o bien} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left[Adj\left(A^t\right)\right]$$

Ejemplo: Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A|=\left|\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}\right|=6-8=-2\neq 0 \rightarrow$ A es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Aplicamos cualquiera de las dos fórmulas del teorema, por ejemplo, la primera $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$

Calculamos la matriz adjunta de A (lo hacéis vosotros, como se ha explicado anteriormente) $Adj(A)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$.

Ahora la trasponemos: $\left[Adj(A)\right]^t=\begin{pmatrix}6 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ y por último multiplicamos por $\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{-2}=\dfrac{-1}{2}\rightarrow$

$$A^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}6 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

<u>Comprobación</u>: Efectuamos $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

Ejemplo: Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Calculamos el determinante: $|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=3+4+0+2+0-8=1\rightarrow$ A es regular y por tanto $\exists A^{-1}$

Calculamos los adjuntos:

$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$	$A_{12}=-\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2$	$A_{13}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$
$A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2$	$A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$	$A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4$
$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3$	$A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=7$	$A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}=-5$

La matriz adjunta nos queda: $Adj(A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Calculamos la traspuesta y la multiplicamos por $\frac{1}{|A|}=\frac{1}{1}=1$,

obteniendo que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

<u>Propiedades de la matriz inversa:</u>

1. Si existe A^{-1}, ésta es única
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
3. $\left(A\cdot B\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
4. $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$

5. MATRIZ INVERSA POR OTROS MÉTODOS

a) Usando resolución por sistemas de ecuaciones

Veamos con un ejemplo cómo se calcula la inversa de esta forma:

<u>Ejemplo</u>: Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Consideremos que la matriz inversa es $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que como vemos tiene 4 incógnitas.

Imponemos ahora la condición: $A\cdot A^{-1}=I \Leftrightarrow A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ 2a+6c & 2b+6d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$ De aquí nos salen 4 ecuaciones: $\begin{cases} a+4c=1 \\ 2a+6c=0 \\ b+4d=0 \\ 2b+6d=1 \end{cases}$

Resolvemos el sistema por el método que más nos guste, por ejemplo, en este caso por sustitución:

$$\begin{cases} a=1-4c \\ 2a+6c=0 \\ b=-4d \\ 2b+6d=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1-4c \\ 2\cdot(1-4c)+6c=0 \\ b=-4d \\ 2\cdot(-4d)+6d=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1-4c \\ 2-8c+6c=0 \\ b=-4d \\ -8d+6d=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1-4c \\ -2c=-2 \\ b=-4d \\ -2d=1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1-4c \\ c=1 \\ b=-4d \\ d=\frac{-1}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{array}{l} a=-3 \\ c=1 \\ b=2 \\ d=\frac{-1}{2} \end{array}$$

Por tanto: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Como se puede observar, este método es útil para matrices de orden 2, porque en matrices de orden 3 ya tendríamos un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas y sería complicado y tedioso de resolver.

b) Usando el método de Gauss

Veamos mediante ejemplos cómo se aplica este método:

Ejemplo: Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Primero colocamos la matriz identidad correspondiente al lado de la matriz dada:

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Tenemos que hacer transformaciones, sumando filas o múltiplos de filas para que al final nos quede la matriz identidad en el lugar de la matriz A y donde estaba la matriz identidad queda la matriz inversa A^{-1} .

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ (multiplicamos 3 la fila 1, eso se nota $F_1 = 3 \cdot F_1$) $\overset{F_1=3\cdot F_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ (ahora a la fila 2 le restamos la fila 1, y así conseguimos un 0 en el elemento a_{21})

$\overset{F_2=F_2-F_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ (dividimos por 3 la fila 1) $\overset{F_1=\frac{1}{3}F_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ (sumamos ahora a la fila 1 la fila 2, con lo que hacemos 0 el elemento a_{12}) $\overset{F_1=F_1+F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ (por último, dividimos por (-2), la fila 2) $\overset{F_2=\frac{-1}{2}\cdot F_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$ Y ya tenemos la matriz inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Ejemplo: Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&5&4\end{pmatrix}$

Hagamos el mismo proceso:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&5&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_3=F_3-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&5&3&-1&0&1\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{\begin{array}{l}F_2=5\cdot F_2\\F_3=2\cdot F_3\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&10&5&0&5&0\\0&10&6&-2&0&2\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_3=F_3-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&10&5&0&5&0\\0&0&1&-2&-5&2\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_2=\frac{1}{5}F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&0&1&-2&-5&2\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_2=F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&0&2&6&-2\\0&0&1&-2&-5&2\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_2=F_2-F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&2&0&2&6&-2\\0&0&1&-2&-5&2\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_1=F_1-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&5&-2\\0&2&0&2&6&-2\\0&0&1&-2&-5&2\end{array}\right)\underset{\Rightarrow}{F_2=\frac{1}{2}F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&5&-2\\0&1&0&1&3&-1\\0&0&1&-2&-5&2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&5&-2\\1&3&-1\\-2&-5&2\end{pmatrix}$$