

## UNIDAD 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

### CONTENIDO

1.	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES .....	2
2.	TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS .....	5
3.	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. REGLA DE CRAMER .....	8
4.	SISTEMAS HOMOGÉNEOS.....	13









Empezamos calculando el rango de A:

Menores de orden 3: Sólo hay uno que es el determinante de A  $\rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$  (para recordar lo

hacemos haciendo ceros y desarrollando, hacemos  $F_1 + F_3$  y  $F_2 + F_3$ )  $\rightarrow$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

Calculamos ahora el rango de A\*:

Menores de orden 3: Si nos fijamos A es una submatriz de A\*, por tanto el  $\text{rango}(A^*) \geq \text{rango}(A)$  siempre, y por tanto en este caso  $\text{rango}(A^*) \geq 3$ . Además, como A\* es de dimensión 3x4, tenemos que

$\text{rango}(A^*) \leq 3$ , Así  $\text{rango}(A^*) = 3$ .

Entonces,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas, y por el teorema de Rouché-Fröbenius, se trata de un sistema compatible determinado (tiene una única solución)

**Ejemplo:** Clasificar el siguiente sistema de ecuaciones dependiendo del valor del parámetro  $m$  :

$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + y + z = m + 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$

Tenemos la matriz de coeficientes  $A = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{pmatrix}$ . Estudiaremos el

rango de A en función del parámetro  $m$

Empezamos calculando el determinante de A que es el mayor menor de orden 3 de A, pues ésta es cuadrada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m - m + 1 - 1 - 1 + m^2 = m^2 - 1 \text{ Igualamos a } 0, m^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \text{ Con estos resultados}$$

tenemos 3 posibilidades o casos:  $m \neq \pm 1$ ,  $m = 1$  y  $m = -1$

CASO 1:  $m \neq \pm 1$

Como  $m \neq \pm 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3$  pues el mayor menor no nulo es el determinante de la propia A.

Además como la matriz ampliada, A\*, es de dimensión  $3 \times 4$ , y A es una submatriz suya, obviamente tenemos que  $\text{rango}(A^*) = 3$

Por tanto, concluimos que en este caso como  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas se trata de un sistema compatible determinado por el teorema de Rouché-Fröbenius

CASO 2:  $m = 1$

Lo primero que hacemos es sustituir el valor en el sistema y en las matrices asociadas

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar fácilmente en el sistema de ecuaciones, la  $E_2$  y la  $E_3$  son incompatibles pues nos indican que  $3 = 4$ , y por tanto se trata de un sistema incompatible.

De todas maneras, vamos a hacerlo mediante rangos y aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.

Como  $m = 1$  tenemos que  $|A| = 0$  y por tanto  $\text{rango}(A) < 3$ . Tomando en A el menor de orden 2  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ,

deducimos que  $\text{rango}(A) = 2$  (también se ve claramente que las filas  $F_2$  y  $F_3$  son iguales y por tanto una de ellas la podemos suprimir y el  $\text{rango}(A)=2$ )

En  $A^*$ , como menor de orden 3 tenemos  $|A| = 0$  y vemos cuánto valen los demás de orden 3 para ver si hay alguno no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 1 - 1 - 3 + 4 = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A^*) = 3$$

Tenemos que  $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3 \rightarrow$  por el teorema de Rouché-Fröbenius, se trata de un sistema incompatible

CASO 3:  $m = -1$

Lo primero que hacemos es sustituir el valor en el sistema y en las matrices asociadas

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Como podemos observar fácilmente en el sistema de ecuaciones, la  $E_1$  y la  $E_2$  son la misma por tanto podemos reducir el sistema a otro equivalente con sólo dos ecuaciones  $\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$  y estudiar en éste su

compatibilidad. Así las matrices que nos quedan son  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ , que obviamente tienen rango 2 por tener sólo dos filas y éstas no ser proporcionales (si queréis hacerlo por menores basta tomar el menor  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ )

Así que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} = 3 \rightarrow$  se trata de un sistema compatible indeterminado por el teorema de Rouché-Fröbenius.

### 3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS. REGLA DE CRAMER

#### A. Método de Gauss

Este método es una generalización del método de reducción y consiste en hacer operaciones entre las ecuaciones para convertirlo en un sistema triangular que resulta muy fácil de resolver.

Veamos con un ejemplo cómo funciona:

**Ejemplo:** Resolver el sistema siguiente por el método de Gauss

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{(permutamos la } E_1 \text{ con la } E_3)} \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{(efectuamos las operaciones } E_2 - 3 \cdot E_1 \text{ y } E_3 - 2 \cdot E_1)}$$

$$E_3 - 2 \cdot E_1 \text{ para hacer ceros en las } x \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ -2y - 10z = 8 \\ -y - 4z = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{(simplificamos la } E_2 \text{ por } (-2))} \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y + 5z = -4 \\ -y - 4z = 4 \end{cases} \rightarrow$$

$$\text{(efectuamos la operación } E_3 + E_2) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ y + 5z = -4 \\ z = 0 \end{cases} \text{ Con esto tenemos el sistema triangulado y ya sólo resta ir}$$

resolviendo de abajo hacia arriba y va saliendo la solución. De la tercera ecuación es evidente que  $z = 0$

De la segunda sustituyendo el valor obtenido tenemos que  $y + 5 \cdot 0 = -4 \rightarrow y = -4$

Por último, sustituimos en la primera ecuación,  $x + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 = -1 \rightarrow x = 7$

La solución es:  $x = 7 \quad y = -4 \quad z = 0$

#### B. Método de la matriz inversa

Se trata de poner el sistema en forma matricial y cuando tenemos un sistema compatible determinado podemos calcular la inversa de la matriz de coeficientes y con ello despejar las incógnitas directamente.

$$\text{En el ejemplo anterior teníamos el sistema } \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}, \text{ que en forma matricial se escribe } A \cdot X = B,$$

$$\text{donde } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ calculando la inversa de } A, \text{ si la tiene, tenemos que}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Os dejo a vosotros calcular la inversa y hacer el producto y ver que la}$$

solución es  $x = 7 \quad y = -4 \quad z = 0$

C. Regla de Cramer

Se aplica en sistemas compatibles determinados, aunque también lo usaremos en sistemas compatibles indeterminados.

Como se trata de sistemas compatibles determinados, la matriz de coeficientes es cuadrada y tiene rango máximo, o sea,  $|A| \neq 0$ . Cada incógnita se obtiene del cociente entre:

- El determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita correspondiente por la columna de los términos independientes.
- El determinante de A

**Ejemplo:** Resolver por Cramer, si es posible el siguiente sistema:  $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - 4y = 2 \end{cases}$ .

Tenemos que  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = n^\circ$  de incógnitas, se trata de un SCD y lo resolvemos por

Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-20 + 6}{-5} = \frac{14}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4 - 5}{-5} = \frac{1}{5}$$

**Ejemplo:** Resolver por Cramer el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 4y - z = 5 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$

Calculamos  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 3 + 12 - 8 + 4 - 27 = 2 \neq 0$  Por tanto, por lo de siempre es un SCD. Pasamos a resolver

por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{24 + 3 + 20 + 8 + 4 - 45}{2} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{30 - 2 - 6 - 10 - 2 - 18}{2} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-8 + 15 + 12 - 8 - 20 + 9}{2} = 0$$

Que como vemos coinciden con las soluciones obtenidas en el ejemplo 4 de resolución por Gauss

**Ejemplo:** Resolver por Cramer el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que se trata de un SCI (sistema compatible indeterminado) pues  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{nº de incógnitas}$ .

Basta considerar el menor  $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Lo que hacemos es parametrizar una de las incógnitas, en concreto, aquella o aquellas, que no hemos usado en el menor para calcular el rango. En este caso hacemos  $z = \lambda$  y rehacemos el sistema:

(\*) 
$$\begin{cases} x + 3y = \lambda \\ 3x + 2y = 1 - 2\lambda \end{cases}$$
 Ya podemos aplicar Cramer y las soluciones "x" e "y" serán en función del parámetro  $\lambda$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 1-2\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda - 3(1-2\lambda)}{-7} = \frac{-3+8\lambda}{-7} \rightarrow x = \frac{3}{7} - \frac{8}{7}\lambda$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 3 & 1-2\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1-2\lambda-3\lambda}{-7} = \frac{1-5\lambda}{-7} \rightarrow y = \frac{-1}{7} + \frac{5}{7}\lambda$$

Podemos terminar diciendo que las infinitas soluciones del sistema compatible indeterminado son:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} - \frac{8}{7}\lambda \\ y = \frac{-1}{7} + \frac{5}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in R$$

**Nota:** El sistema (\*) lo podéis resolver por otro método, como Gauss, por ejemplo.

**Ejemplo:** Resolver el siguiente sistema cuando sea compatible: 
$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + y + z = m + 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$

Este sistema es el mismo del ejemplo 3, luego teniéndolo en cuenta sabemos que:

a) Si  $m \neq \pm 1$ , es un SCD y  $|A| = m^2 - 1$

Aplicamos Cramer directamente para calcular las incógnitas:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ m+2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m - 4m + m + 2 - 4 - 1 + m^2 \cdot (m + 2)}{m^2 - 1} \rightarrow x = \frac{m^3 + 2m^2 - 2m - 3}{m^2 - 1} \rightarrow x = \frac{(m+1)(m^2 + m - 3)}{(m-1)(m+1)}$$

$$\rightarrow x = \frac{m^2 + m - 3}{m - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+2 & 1 \\ 1 & 4 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m \cdot (m + 2) + 1 + 4 - (m + 2) - 4 - m}{m^2 - 1} = \frac{m^2 - 1}{m^2 - 1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{4 - m \cdot (m + 2) + 1 - 1 - (m + 2) + 4m}{m^2 - 1} = \frac{-m^2 + m + 2}{m^2 - 1} = \frac{(m+1) \cdot (-m+2)}{(m-1) \cdot (m+1)} \rightarrow z = \frac{-m+2}{m-1}$$

Ojo, este valor o parámetro  $m$  no es lo mismo que cuando resolvemos un SCI. Aquí para cada valor de  $m \neq \pm 1$ , tenemos un SCD que tiene una única solución, y es la que hemos calculado antes. Por ejemplo, si  $m = 2$ , la solución será:

$$x = 3, y = 1, z = 0$$

b) Si  $m = -1$ , es un SCI y nos quedamos con sólo las 2 ecuaciones que eran linealmente

independientes:  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$  En este caso no podemos hacer  $z = \lambda$  pues nos quedaría el

sistema  $\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ x + y = 4 + \lambda \end{cases}$  y entonces  $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 + \lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 + \lambda & 1 \end{vmatrix}}{0}$  lo cual es absurdo.

Debemos tomar como parámetro  $x = \lambda$  ó  $y = \lambda$ , para que podamos aplicar Cramer. El sistema nos queda

haciendo  $x = \lambda \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 - \lambda \\ y - z = 4 - \lambda \end{cases}$ . Resolvemos por Cramer y tenemos:  $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 - \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 + \lambda - 4 + \lambda}{-2} \rightarrow$

$$y = \frac{5 - 2\lambda}{2} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - \lambda \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3}{2}$$

Las soluciones son de la forma: 
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{2} - \lambda \\ z = \frac{-3}{2} \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

**2ª forma:** Vamos a resolverlo por Gauss  $\begin{cases} y + z = 1 - \lambda \\ y - z = 4 - \lambda \end{cases} \rightarrow (\text{hacemos } E_2 + E_1) \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 - \lambda \\ 2y = 5 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow \text{De la } E_2$   
 resultante, tenemos que  $y = \frac{5 - 2\lambda}{2} = \frac{5}{2} - \lambda$

Sustituimos en la  $E_1$ , para calcular "z":  $\frac{5}{2} - \lambda + z = 1 - \lambda \rightarrow z = \frac{-3}{2}$  y nos resultan las mismas soluciones:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{5}{2} - \lambda \\ z = \frac{-3}{2} \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$



