UNIDAD 3: **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES**

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales ya han sido tratados en el curso anterior, principalmente con los de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, como por ejemplo el sistema: $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$

Como sabemos, teníamos los métodos de sustitución, igualación y reducción para resolverlos.

En esta unidad vamos a profundizar en la resolución por reducción también conocida como método de Gauss. Y lo aplicaremos también a sistemas lineales de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Por ejemplo: $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$

Además, aprenderemos otros sistemas de resolución como la regla de Cramer o haciendo uso de la inversa de una matriz.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas de ecuaciones lineales se llaman **<u>equivalentes</u>** si tiene las mismas soluciones

Obtenemos sistemas equivalentes (que tienen las mismas soluciones) si:

- **De dos ecuaciones iguales, eliminamos una de ellas.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ x+2y-3z=-16 \end{cases}$ Tenemos que $E_3=E_1$, quitamos una de ellas y tenemos un sistema equivalente:

$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases}$

- **De una ecuación con todos los coeficientes son ceros, la podemos eliminar.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 0x+0y+0z=0 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$ La E_2 es en realidad $0=0$, podemos suprimirla pues no nos aporta ninguna información

y nos queda: $\Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$

- **Si una fila es proporcional a otra, podemos eliminar una de las ecuaciones.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 15x+5y-10z=-50 \end{cases}$, se observa que $E_3=5\cdot E_2$, podemos quitar una de ellas, normalmente la de mayores coeficientes y nos queda el sistema equivalente: $\Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \end{cases}$

<u>Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones</u>

También en un sistema de ecuaciones podemos hacer transformaciones y nos resulta un sistema equivalente, que nos puede resultar más fácil de resolver. Para ello usaremos los siguientes criterios de equivalencia:

1. **Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases} \xrightarrow{E_1=E_1-3} \begin{cases} 2x+y-z-3=0-3 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+y-z-3=-3 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$, que en este caso no sirve para nada. Este criterio es el que nos permite pasar de un miembro a otro cambiando el signo.

2. **Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 4x-4y+8z=20 \\ x+y+z=3 \end{cases} \xrightarrow{E_2=\frac{1}{4}E_2} \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ Hemos dividido por 4 la E_2 y nos queda un sistema más fácil de manejar.

Este criterio se suele usar cuando tenemos denominadores y hacemos denominador común y quitamos el denominador para que no haya fracciones.

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ \frac{x}{6}+y-\frac{z}{4}=3 \end{cases}$ Hacemos denominador común: $\Longrightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ \frac{2x}{12}+\frac{12y}{12}-\frac{3z}{12}=\frac{36}{12} \end{cases}$ Y ahora quitamos el denominador de la E_3, que no es otra cosa que $E_3=12\cdot E_3$ $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ 2x+12y-3z=36 \end{cases}$

3. **Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases} \xrightarrow{E_3=E_3-E_2} \begin{cases} 2x+y-z-3=0-3 \\ x-y+2z=5 \\ 2y-z=-2 \end{cases}$ que como vemos nos resulta la E_3 sin la variable x, lo que nos ayudará a resolver el sistema. Este criterio se usa mucho en conjunción con el siguiente.

4. **Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema multiplicada o dividida por un número distinto de 0, el sistema resultante es equivalente al dado.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x-y+2z=5 \\ -2x+y+z=3 \end{cases} \xrightarrow{E_2=E_2-3E_1} \begin{cases} x+y-z=0 \\ -4y+5z=5 \\ -2x+y+z=3 \end{cases}$

La operación $E_2 = E_2 - 3E_1$ la podemos hacer aparte para evitar confusiones:

E_2	$3x-y+2z=5$
$-3E_1$	$-3x-3y+3z=0$
$E_2=E_2-3E_1$	$-4y+5z=5$

5. **Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.**

<u>Ejemplo</u>: $\begin{cases} 4x+y-5z=0 \\ 3x-y+2z=5 \\ -2x+y+z=3 \end{cases} \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} -2x+y+z=3 \\ 3x-y+2z=5 \\ 4x+y-5z=0 \end{cases} \xrightarrow{C_x \leftrightarrow C_y} \begin{cases} y-2x+z=3 \\ -y+3x+2z=5 \\ y+4x-5z=0 \end{cases}$

El símbolo $\leftrightarrow$ significa cambio o permutación. C_x es la columna de la incógnita x, y lo mismo para C_y, C_z

3. MÉTODO DE REDUCCIÓN O DE GAUSS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente de forma que éste sea escalonado (también llamado triangular). Para ello vamos a aplicar los criterios de equivalencia expuestos en el apartado anterior.

Veamos un ejemplo ilustrativo:

<u>Ejemplo</u>: Vamos a resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases}$

Observamos que tenemos 3 ecuaciones que las identificamos por E_1, E_2 y E_3

$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+2z=5 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Longrightarrow$	Cambiamos o permutamos la E_1 la ⇨ E_2. Lo notaremos por $E_1 \leftrightarrow E_2$	$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \Rightarrow$	A la E_2 le restamos el doble de la ecuación E_1. Lo notaremos por: $E_2 = E_2 - 2E_1$

$$\begin{array}{rr} E_2: & 2x+y-z=0 \\ -2E_1: & -2x+2y-4z=-10 \\ Resultado: & 3y-5z=-10 \end{array}$$

Operamos y obtenemos una nueva E_2 donde no aparece ya la incógnita x

$$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

A la E_3 le restamos la E_1

$E_3 = E_3 - E_1$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ 2y-z=-2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Ya tenemos la x triangulada. Ahora con la y hacemos lo mismo, pero sólo con la E_2 y la E_3

Multiplicamos por 2 la E_2 y por 3 la E_3. Lo notamos como

$E_2 = 2E_2$

$E_3 = 3E_3$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 6y-10z=-20 \\ 6y-3z=-6 \end{cases}$$

Ahora efectuamos los siguiente

$E_3 = E_3 - E_2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 6y-10z=-20 \\ 7z=14 \end{cases}$$

Simplificamos la E_2

$E_2 = \frac{1}{2}E_2$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3y-5z=-10 \\ 7z=14 \end{cases}$$

Ya podemos calcular z de la E_3

$\boxed{z = \frac{14}{7} = 2}$

En la E_2 sustituimos z y calculamos y:

$3y - 10 = -10 \rightarrow$

$\boxed{y=0}$

En la E_1 sustituimos y y z para calcular x

$x - 0 + 4 = 5 \rightarrow$

$\boxed{x=1}$

La solución del sistema es: $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 = E_2 - 3\cdot E_1} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases} \xrightarrow{E_3 = E_3 - 2\cdot E_1}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ -7y+7z=28 \end{cases} \xrightarrow{E_3 = \frac{1}{7}E_3} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ -y+z=4 \end{cases} \xrightarrow{E_2 \leftrightarrow E_3} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -y+z=4 \\ -5y+7z=38 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{E_2=-5E_2}\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 5y-5z=-20 \\ -5y+7z=38 \end{cases} \xrightarrow[E_2=\frac{1}{5}E_2]{E_3=E_3+E_2} \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ y-z=-4 \\ 2z=18 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ y-z=-4 \\ z=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ y-9=-4 \Rightarrow y=5 \\ z=9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+10-27=-16 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases}}$$

<u>Método de Gauss usando matrices</u>

Lo visto anteriormente se puede hacer menos complicado usando matrices y teniendo en cuenta la incógnita que corresponde a cada columna, así como los términos independientes.

Veamos un ejemplo.

<u>Ejemplo</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ 3x+y-2z=-10 \\ 2x-3y+z=-4 \end{cases}$

Podemos representar el sistema mediante una matriz de la siguiente forma, usando sólo los coeficientes y los términos independientes. La primera columna son los coeficientes de la incógnita x, la 2ª columna la de las y, la 3ª columna la de las z, y la cuarta la de los términos independientes.

Nos quedaría en este caso así: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -16 \\ 3 & 1 & -2 & -10 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right)$

Pasemos a operar con ella, ahora mediante filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -16 \\ 3 & 1 & -2 & -10 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=F_2-3\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -16 \\ 0 & -5 & 7 & 38 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -16 \\ 0 & -5 & 7 & 38 \\ 0 & -7 & 7 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -16 \\ 0 & -5 & 7 & 38 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \end{array}\right)$ Y de esta manera, también tenemos el sistema triangulado ya y lo podemos resolver rápidamente:

$\begin{cases} x+2y-3z=-16 \\ -5y+7z=38 \\ -2y=-10 \end{cases}$ De E_3: $-2y=-10 \Rightarrow y=5$. Sustituyendo en E_2: $-25+7z=38 \Rightarrow 7z=63 \Rightarrow z=9$.

Sustituyendo en E_1: $x+10-27=-16 \Rightarrow x=1$. Tenemos la solución: $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=9 \end{cases}$

<u>Ejemplo</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 = -F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -10 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -4 \end{array}\right)$$. Ya resolvemos:

$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -2z=0 \\ y+4z=-4 \end{cases}$ De la E_2: $z=\dfrac{0}{-2}=0$. De la E_3: $y=-4$. De la E_1: $x-8+0=-1 \Rightarrow x=7$

La solución es: $\begin{cases} x=7 \\ y=-4 \\ z=0 \end{cases}$

4. TIPOS DE SISTEMAS ATENDIENDO A SUS SOLUCIONES

Consideremos el sistema $\begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ y pasamos a resolverlo por Gauss:

$\begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x+y=5 \end{cases} \xrightarrow{E_2 = E_2 - 2E_1} \begin{cases} x-3y=-1 \\ 7y=7 \end{cases}$ De E_2 tenemos que: $y=1$, y de la E_1, sustituyendo: $x-3=-1 \Rightarrow x=2$

Sólo hay una solución, que es: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

<u>Definición</u>: Los sistemas que sólo tienen una solución se llaman **SISTEMAS COMPATIBLES DETERMINADOS**.

Veamos ahora el sistema: $\begin{cases} x-3y=-1 \\ -2x+6y=3 \end{cases}$ y pasamos a resolverlo por Gauss:

$\begin{cases} x-3y=-1 \\ -2x+6y=3 \end{cases} \xrightarrow{E_2 = E_2 + 2E_1} \begin{cases} x-3y=-1 \\ 0=1 \end{cases}$ Vemos que en la E_2 se han suprimido todas las incógnitas y ha quedado una igualdad inconsistente o absurda, lo que nos indica que ese sistema no tiene solución. Se dirá que es un sistema incompatible.

<u>Definición</u>: Los sistemas que no tienen solución se llaman **SISTEMAS INCOMPATIBLES**.

Veamos ahora el sistema: $\begin{cases} x-3y=-1 \\ -2x+6y=2 \end{cases}$, que es muy similar al anterior y pasamos a resolverlo por Gauss:

$\begin{cases} x-3y=-1 \\ -2x+6y=2 \end{cases} \xrightarrow{E_2=E_2+2E_1} \begin{cases} x-3y=-1 \\ 0=0 \end{cases}$ Vemos que en la E_2 se han suprimido todas las incógnitas y ha quedado una obviedad, es decir, que la E_2 no aporta nada y podemos prescindir de ella.

Por tanto, sólo nos queda una ecuación: $\{x-3y=-1$, y si nos fijamos hay muchas soluciones, por ejemplo:

$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$, ………. Tiene infinitas soluciones, se trata de un sistema compatible indeterminado.

Para dar las soluciones se utiliza la técnica de la parametrización, que consiste en este caso, al ser una ecuación con dos incógnitas lo que nos ha quedado, llamar a una de las incógnitas x ó y, como un parámetro, es decir:

Hacemos, por ejemplo, $y=t$, donde t será o podrá ser un número real cualquiera.

Sustituimos en la ecuación y despejamos la otra incógnita, en este caso la x:

$\{x-3t=-1 \Rightarrow x=-1+3t$.

Las infinitas soluciones del sistema son de la forma $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=t \end{cases}$ para $t \in \mathbb{R}$. Para cada valor que le demos a t nos sale una de las soluciones del sistema.

<u>Definición</u>: Los sistemas que tienen infinitas soluciones se llaman **SISTEMAS COMPATIBLES INDETERMINADOS**.

Resumiendo, los sistemas pueden ser:

TIPOS DE SISTEMAS (desde el p. de v. del nº de soluciones)

- COMPATIBLE: Tiene solución
  - DETERMINADO: solución única
  - INDETERMINADO: ∞ soluciones
- INCOMPATIBLE: No tiene solución

Veamos ahora ejemplos de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas compatibles indeterminados e incompatibles y como se resuelven:

<u>Ejemplo</u>: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+5y+5z=1 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$

Vamos a usar la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Ya resolvemos:

$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -y-4z=4 \\ 0=0 \end{cases}$ Sólo nos quedan las dos primeras ecuaciones, pues la tercera no aporta nada. Se trata de un **sistema compatible indeterminado**, tendrá infinitas soluciones.

$\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -y-4z=4 \end{cases}$ Cambiemos de signo la E_2, lo que nos hará más cómodo la resolución: $\xrightarrow{F_2=-F_2} \begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ y+4z=-4 \end{cases}$

Observamos 2 ecuaciones y 3 incógnitas, nos sobra una incógnita, y por ello debemos elegir convenientemente una de ellas y parametrizarla y las demás se obtendrán a partir de la elegida.

En este caso, lo mejor es hacer $z=t$, pues de la E_2, se podrá despejar y fácilmente y sin denominadores molestos.

Así, de la E_2: $y+4t=-4 \Rightarrow y=-4-4t$

Y ahora sustituimos en la E_1 y calculamos x: $x+2(-4-4t)+3t=-1 \Rightarrow x-8-8t+3t=-1 \Rightarrow x=7+5t$

Las soluciones son: $\begin{cases} x=7+5t \\ y=-4-4t \\ z=t \end{cases}$ con $t\in\mathbb{R}$. Los diferentes valores de t nos van dando las infinitas soluciones del sistema.

Ejemplo: Resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+5y+5z=6 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$

Vamos a usar la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$\xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$. Volvemos al sistema: $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ -y-4z=4 \\ 0=-5 \end{cases}$ y se observa que la E_3 es absurda, sin sentido, por tanto, se trata de un **sistema incompatible**, sin solución.

5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS USANDO LA MATRIZ INVERSA

Se trata de poner el sistema en forma matricial y cuando tenemos un sistema compatible determinado podemos calcular la inversa de la matriz de coeficientes y con ello despejar las incógnitas directamente.

Ejemplo: Dado el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$, que en forma matricial se escribe $A\cdot X = B$, es decir,

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, calculando la inversa de A, si la tiene,

tenemos que: $X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Calculamos A^{-1}:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=24-3+12-(8-4+27)=33-31=2$$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} 14 & -10 & 2 \\ -5 & 4 & -1 \\ -11 & 8 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow [Adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 14 & -5 & -11 \\ -10 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 & -5 & -11 \\ -10 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 & -5 & -11 \\ -10 & 4 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

La solución es $\boxed{x=7 \quad y=-4 \quad z=0}$

6. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS MEDIANTE LA REGLA DE CRAMER

Se aplica en sistemas compatibles determinados, aunque también se puede usar en sistemas compatibles indeterminados.

Como se trata de sistemas compatibles determinados, la matriz de coeficientes es cuadrada y tiene rango máximo, o sea, $|A|\neq 0$. Cada incógnita se obtiene del cociente entre:

- El determinante que resulta de sustituir la columna de la incógnita correspondiente por la columna de los términos independientes en el numerador
- El determinante de A en el denominador.

Ejemplo: Resolver por Cramer, si es posible el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x-4y=2 \end{cases}$.

Tenemos que $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$:

(la primera columna del numerador, las x, se sustituye por la columna de los términos independientes)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-20+6}{-5} = \frac{14}{5}$$

(la segunda columna del numerador, las y, se sustituye por la columna de los términos independientes)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4-5}{-5} = \frac{1}{5}$$

<u>Ejemplo</u>: Resolver por Cramer el sistema $\begin{cases} 2x+3y+2z=2 \\ 3x+4y-z=5 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$

Calculamos $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 24-3+12-8+4-27 = 2 \neq 0$, se puede calcular por Cramer directamente:

Pasamos a resolver por Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{24+3+20+8+4-45}{2} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{30-2-6-10-2-18}{2} = -4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-8+15+12-8-20+9}{2} = 0$$

7. PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Son problemas con enunciado del cuál hemos de extraer la información para plantear un sistema lineal de ecuaciones, habitualmente con tres incógnitas.

No existe una forma o planteamiento general para resolverlos, depende de cada enunciado, pero es recomendable seguir los siguientes pasos:

- Leer atentamente el enunciado en su totalidad, un par de veces por lo menos, y comprenderlo.
- Saber qué nos piden y establecerlo con incógnitas, normalmente x, y, z.
- Plantear el sistema que relaciona algebraicamente los datos del enunciado y las incógnitas; para ello, suele ser recomendable hacer una tabla (en los problemas de edades), o un dibujo (en los de tipo geométrico), o un diagrama (problemas de mezclas, depósitos…), etc.
- Resolverlo, por el método que consideremos más adecuado, incluso se pueden hacer por sustitución sino se indica un método concreto.
- Interpretar los resultados obtenidos y comprobar que verifican las condiciones del enunciado

<u>Ejemplo</u>: Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que, si averiguan los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

Una vez leído y comprendido, la elección de incógnitas es fácil:

$x \to$ primer número a buscar

$y \to$ segundo número a buscar

$z \to$ tercer número a buscar

Ahora planteamos el sistema:

$\begin{cases} x+y=z+2 \\ y-2x=z-10 \\ x+y+z=24 \end{cases}$ Ponemos el sistema de forma canónica, es decir, ordenado: $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x+y-z=-10 \\ x+y+z=24 \end{cases}$

Lo vamos a resolver por Gauss:

$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x+y-z=-10 \\ x+y+z=24 \end{cases} \xRightarrow{E_2+2E_1} \begin{cases} x+y-z=2 \\ 3y-3z=-6 \\ x+y+z=24 \end{cases} \xRightarrow{E_3-E_1} \begin{cases} x+y-z=2 \\ 3y-3z=-6 \\ 2z=22 \end{cases}$ Y ya lo tenemos triangulado y partiendo de la E_3: $z=\dfrac{22}{2} \Rightarrow z=11$.

De la E_2: $3y-33=-6 \Rightarrow 3y=27 \Rightarrow y=9$

De la E_1: $x+9-11=2 \Rightarrow x=4$

Los números son: 4, 9 y 11

<u>Ejemplo</u>: Después de aplicar un descuento del 10% a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3.96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Determine el precio original de cada objeto.

Elegimos las incógnitas, que no es muy difícil:

$x \to$ precio original del rotulador

$y \to$ precio original del cuaderno

$z \to$ precio original de la carpeta

Hay que tener en cuenta que un descuento del 10%, significa que pagamos el 90% del precio original.

Planteemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{90}{100}x+\dfrac{90}{100}y+\dfrac{90}{100}z=3,96 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+\dfrac{20}{100}x \end{cases}$$

Quitamos denominadores en las ecuaciones para trabajar en principio con enteros:

$$\begin{cases} 90x+90y+90z=396 \\ 2y=x \\ 100z=100y+20x \end{cases}$$

Ponemos en forma canónica:

$$\begin{cases} 90x+90y+90z=396 & \frac{1}{18}E_1 \\ -x+2y \qquad =0 & \Rightarrow \\ 20x+100y-100z=0 & \frac{1}{20}E_1 \end{cases} \begin{cases} 5x+5y+5z=22 \\ -x+2y \qquad =0 \\ x+5y-5z=0 \end{cases}$$

Lo vamos a hacer por Cramer:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=-50-25+0-(10+0+25) \Rightarrow |A|=-110$$

Luego:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 22 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}}{-110}=\frac{-220}{-110}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 22 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-110}=\frac{-110}{-110}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 22 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{-110}=\frac{-110-44}{-110}=1,4$$