UNIDAD 4: INECUACIONES. PROGRAMACIÓN LINEAL

CONTENIDO

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS 2
2. PROGRAMACIÓN LINEAL 7
3. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN 9

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una inecuación de primer grado con dos incógnitas es una inecuación que en forma reducida se puede expresar de la siguiente forma:

$$a{\cdot}x+b{\cdot}y>c \quad \text{ó} \qquad a{\cdot}x+b{\cdot}y<c \quad \text{ó} \qquad a{\cdot}x+b{\cdot}y\le c \quad \text{ó} \qquad a{\cdot}x+b{\cdot}y\ge c$$

Para resolver este tipo de inecuaciones debemos saber representar rectas en el plano haciendo una pequeña tabla de valores.

El proceso es el siguiente:

- Representamos gráficamente la función lineal o afín $a{\cdot}x+b{\cdot}y=c$ cuya gráfica es una recta. Lo habitual es hacer una tabla de valores.
- La recta anterior divide al plano en dos semiplanos. Uno de esos semiplanos es el conjunto solución, para saber cuál es, se toma un punto de uno de ellos y se comprueba si verifica la inecuación. Si la verifica, el semiplano que contiene a ese punto es solución, y si no la verifica, el otro semiplano es solución.
- Por último, queda ver si la frontera de separación entre los dos semiplanos es parte de la solución o no. En las inecuaciones con desigualdad estricta (< ó >), la frontera no es solución. En los casos $\le$ ó $\ge$ la frontera si es parte de la solución.

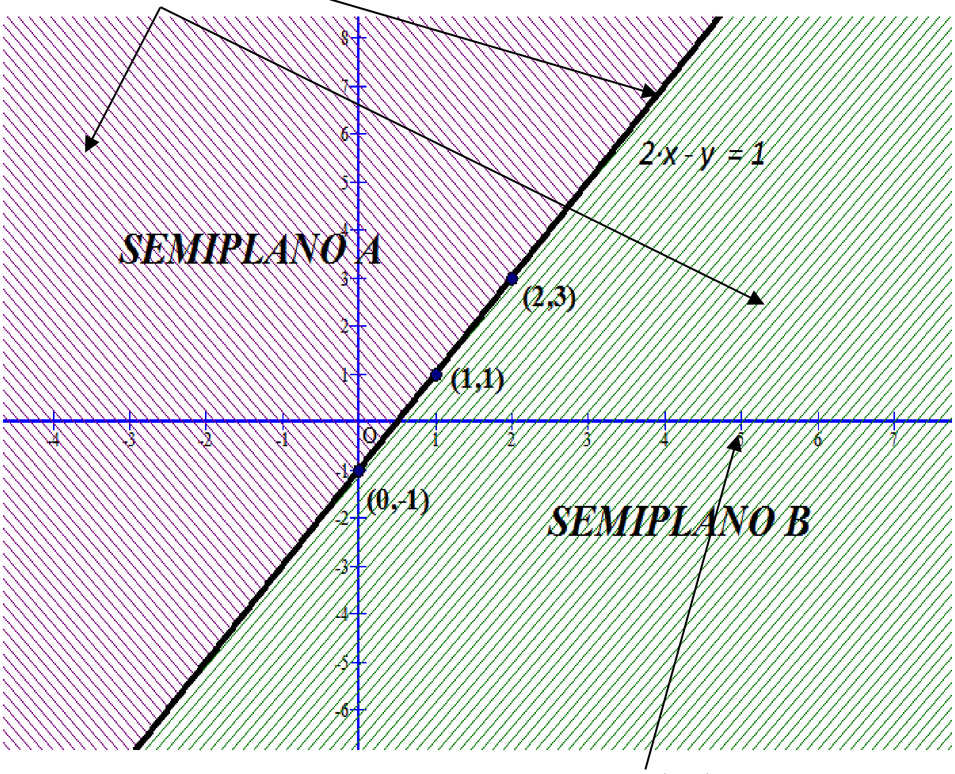
Aquí la solución se tiene que dar de forma gráfica. Veamos con ejemplo como aplicar lo dicho.

<u>Ejemplo</u>: Resolver la inecuación $2x-y<1$

Representamos la recta $2x-y=1$ haciendo una tabla de valores:

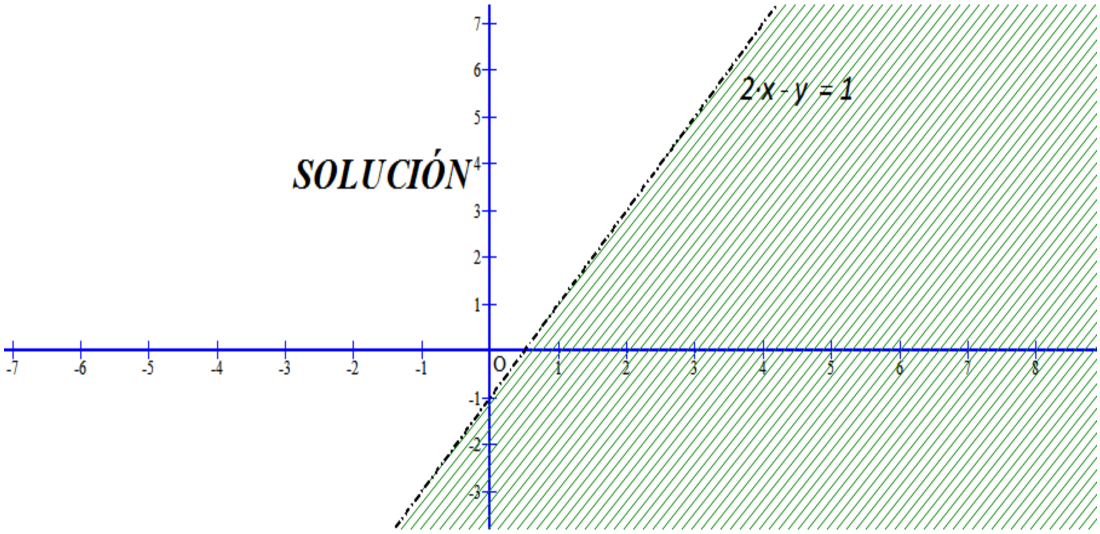
x	1	0	2
y	1	-1	3

En el dibujo se observan los semiplanos y la frontera (que es la recta en sí):



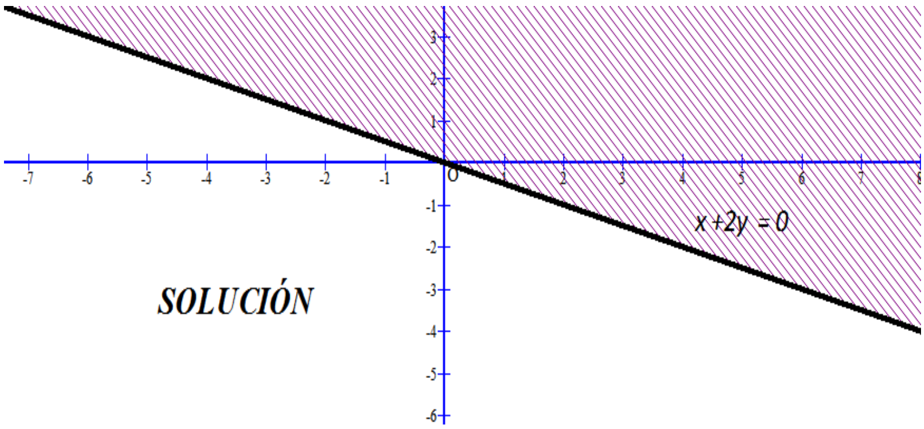
Para ver que semiplano es solución, vamos por ejemplo a tomar el punto A (5,0) que es un punto del semiplano B y sustituimos en la inecuación x por 5 e y por 0 para comprobar si la verifica o no.

$2{\cdot}5-0<1 \Rightarrow 10<1$ lo que es obviamente falso, por tanto el semiplano solución es el A y además no entra la frontera pues es un menor estricto.



Ejemplo: Resolver $x+2y \leq 0$

Os dejo la solución, y tened en cuenta que en este caso la frontera entra.



Definición: Un *sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas* es un conjunto de inecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_1{\cdot}x+b_1{\cdot}y \leq c_1 \\ a_2{\cdot}x+b_2{\cdot}y > c_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n{\cdot}x+b_n{\cdot}y < c_n \end{cases}$$ (los signos de desigualdad pueden variar)

El conjunto solución está formado por todos aquellos valores que verifican simultáneamente todas las inecuaciones. Suele ser una región del plano que se denomina *región factible*

Para resolverlo procedemos de la siguiente manera:

- Resolvemos cada inecuación como hemos visto en el punto anteriormente, y sombreamos o rayamos el semiplano que NO es solución.
- Una vez hecho lo anterior con todas las inecuaciones, nos queda en blanco la región factible.

- Muchas veces hay que calcular o nos piden que calculemos los vértices de la región factible, que lo haremos intersecando las rectas que lo determinan

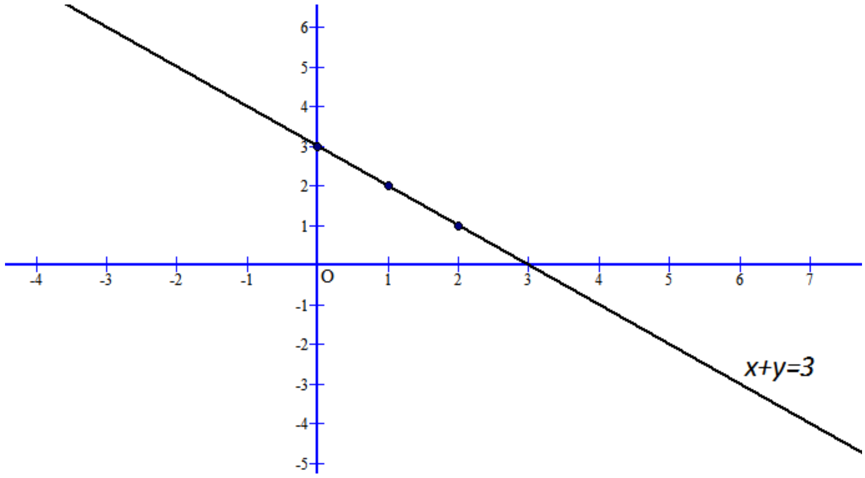
Veamos con ejemplo como se procede.

<u>*Ejemplo*</u>: Resuelve el sistema de inecuaciones siguiente

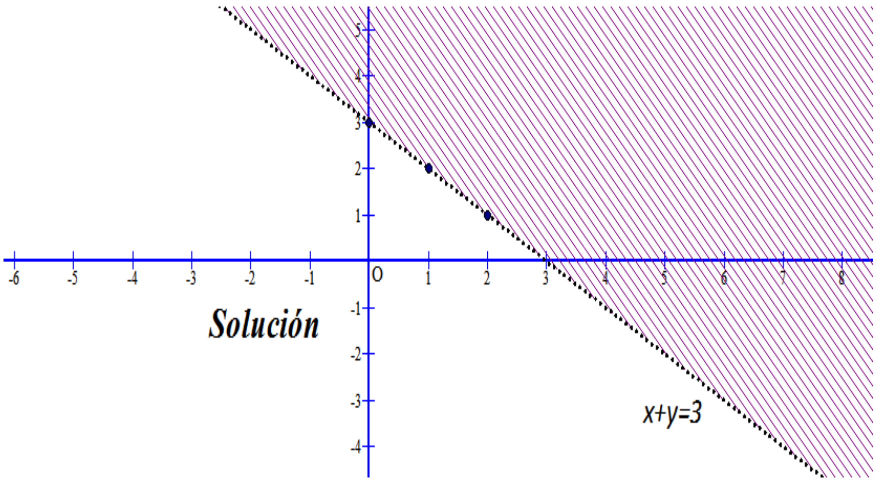
$$\begin{cases} x+y<3 \\ y-3\leq 3x \end{cases}$$

Empezamos con la primera inecuación. Dibujamos la recta $x+y=3$ haciendo una tabla de valores

x	1	0	2
y	2	3	1



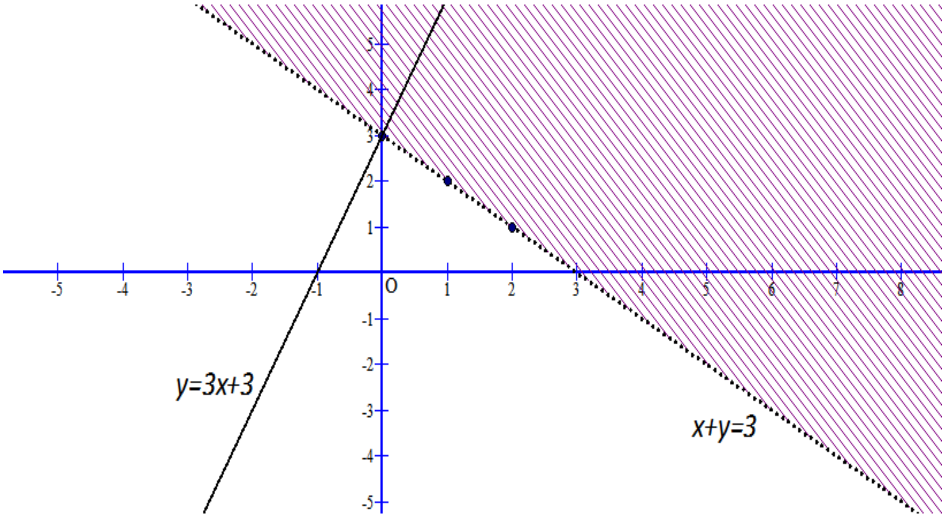
Probamos con el O(0,0) en la inecuación para ver el semiplano solución→ $0+0<3$ Lo cual es cierto, por tanto tenemos en esta primera inecuación la siguiente región solución y además como es menor estricto la frontera, es decir, la recta no entra.



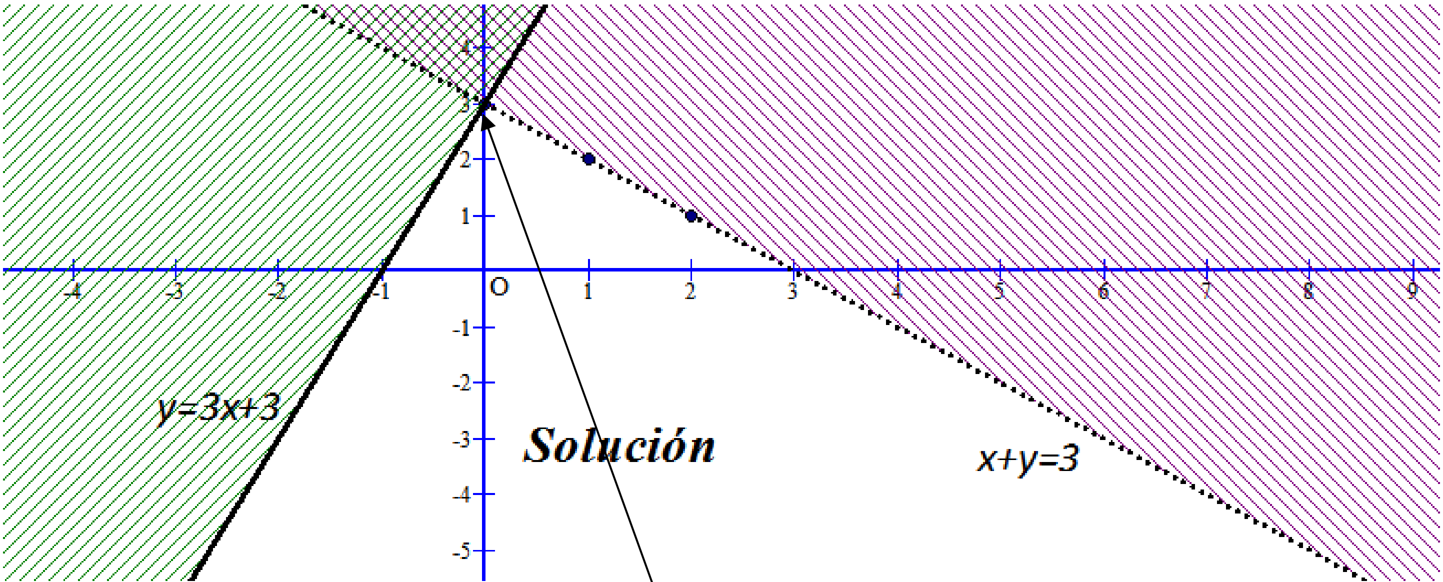
Sobre la misma gráfica vamos a resolver la segunda inecuación: $y-3\leq 3x$

Dibujamos la recta $y-3=3x \Rightarrow y=3x+3$ haciendo la tabla de valores

x	-1	0
y	0	3



Probamos también con el punto O(0,0) por ser el más cómodo en la inecuación: $0-3\le 3\cdot 0 \Rightarrow -3\le 0$ lo cual es cierto luego el semiplano solución es donde se encuentra el punto O(0,0) y rayamos el otro. Además aquí entra el borde o frontera al ser menor o igual. La región factible o solución es la región blanca del dibujo siguiente:



A veces es necesario calcular los vértices de la región, para ello se resuelve el sistema de ecuaciones dado por las dos rectas que lo determina. En este ejemplo sólo hay un vértice y se calcula resolviendo $\begin{cases} x+y=3 \\ y-3=3x \end{cases}$, que como se ve en el dibujo anterior tiene que salir $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ que nos da el punto A (0,3)

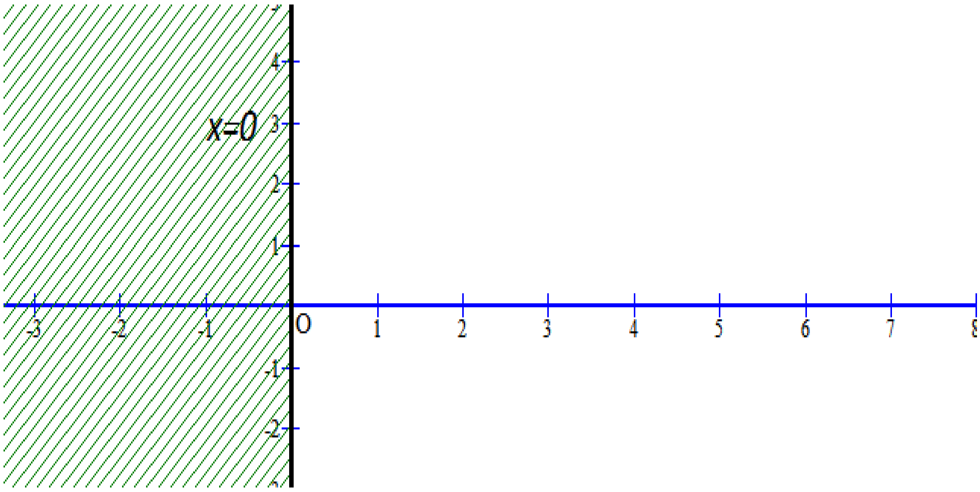
Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 6x+5y\le 30 \\ x+2y\le 8 \end{cases}$

Procedemos igual que antes:

- Dibujamos $x = 0$ con su tabla de valores. Si nos fijamos, es el eje OY o de ordenadas (el vertical)

x	0	0
y	1	3

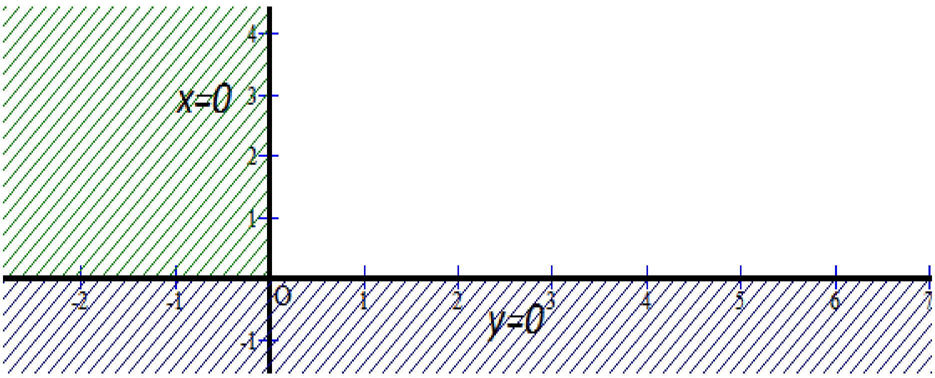
Probamos con el (1,1) y lo verifica, por tanto, nos queda



- Dibujamos $y = 0$ con su tabla de valores. Si nos fijamos, es el eje OX o de abscisas (el horizontal)

x	0	1
y	0	0

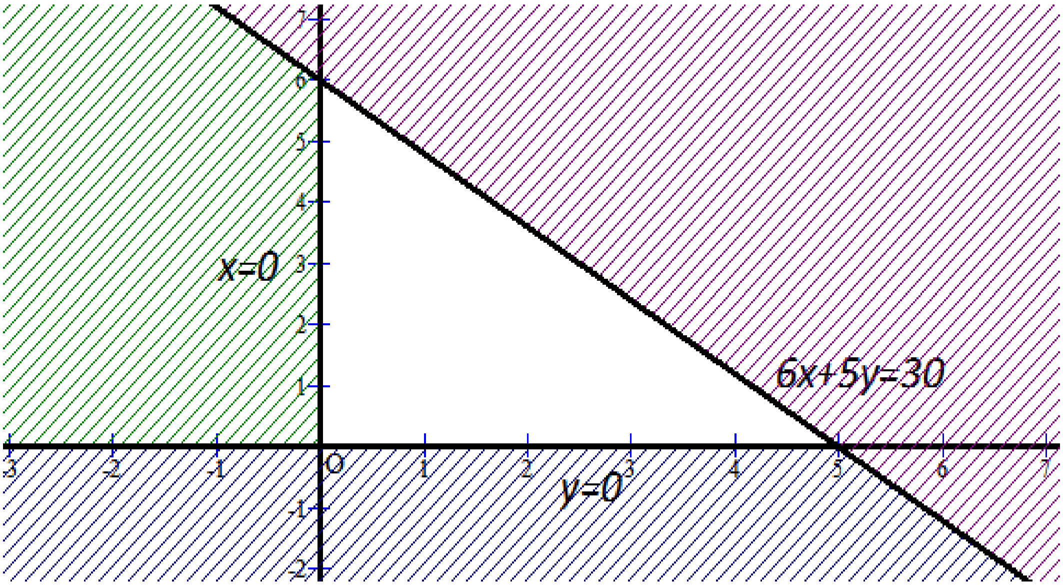
- Probamos con el (1,1) y lo verifica, por tanto, nos queda



- Dibujamos $6x + 5y = 30$ con su tabla de valores.

x	5	0
y	0	6

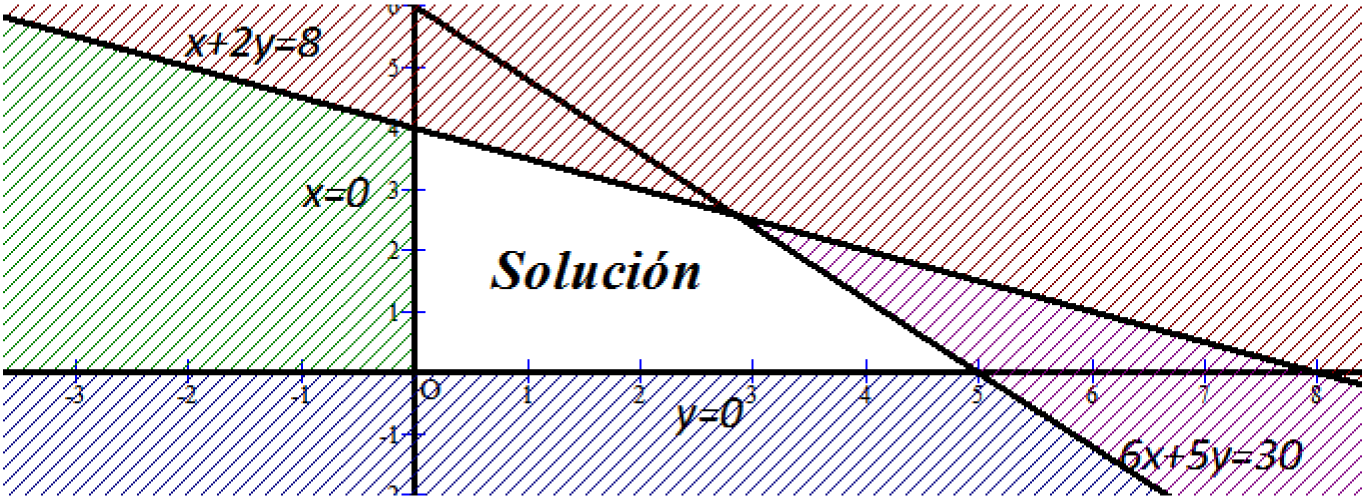
- Probamos con el (0,0) y lo verifica, por tanto, nos queda



- Dibujamos $x+2y=8$ con su tabla de valores.

x	0	8
y	4	0

Probamos con el (0,0) y lo verifica, por tanto, nos queda



Donde se observa la región factible de este sistema. Y como no había ninguna desigualdad estricta, todos los bordes entran.

2. PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de ***Programación Lineal*** consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada función objetivo, estando las variables sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales.

En este curso trataremos de resolver problemas de programación lineal bidimensional, es decir, maximizar o minimizar una función lineal con dos variables sujeta a unas restricciones que están dadas por inecuaciones lineales.

En este tipo de problemas la *función objetivo* es una función lineal con dos variables.

Se representa por: $f(x,y) = p\cdot x + q\cdot y$

La región del plano determinada por las distintas desigualdades o restricciones, se llama *región factible*.

La solución óptima es aquella que maximiza o minimiza la función objetivo y se encuentra en la frontera de la región factible.

De manera general, un problema de programación lineal bidimensional será de esta forma:

$$\begin{cases} f(x,y) = p\cdot x + q\cdot y \text{ que es la función objetivo} \\ \text{Restricciones} \begin{cases} a_1\cdot x + b_1\cdot y \le c_1 \\ a_2\cdot x + b_2\cdot y \le c_2 \\ \dots \\ a_n\cdot x + b_n\cdot y \le c_n \end{cases} \text{ que nos determinarán la región factible} \end{cases}$$

Evidentemente las desigualdades pueden ser las cuatro posibles, $\le, \ \ge, \ <, \ >$.

También va a ocurrir que en casi todos los problemas que veamos las regiones factibles serán, además de acotadas, cerradas, ya que las desigualdades que suelen aparecer son $\le$ o bien $\ge$.

Ejemplo: Maximizar la función $f(x,y) = 2\cdot x + 3\cdot y$ sometida a las restricciones

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} \le 1 \\ 3x + y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Proposición: En cualquier programa lineal de los descritos anteriormente, se cumple:

a) La o las soluciones del programa lineal están siempre en la frontera de la región factible, nunca en el interior.
b) A medida que nos movemos de un vértice de la región factible a otro, los valores de la función objetivo, o crecen, o decrecen o se mantienen constante. Lo que nunca hacen es alcanzar máximos ni mínimos entre un vértice y otro.

Como consecuencia de las propiedades a) y b) tendremos las siguientes:

a) Si un problema de programación lineal tiene solución única, entonces se encuentra en uno de los vértices de la región factible.
b) Si una función objetivo toma el mismo valor en dos vértices, entonces también toma ese mismo valor en todos los puntos del segmento que une estos vértices y, por tanto, tiene infinitas soluciones (todos los puntos del segmento).

En particular, sobre una región convexa y acotada toda función lineal alcanza un valor máximo y un valor mínimo, y además estos valores los alcanza en vértices de la región

3. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Para resolver un problema de programación lineal bidimensional vamos a usar el método algebraico o de los vértices. El proceso es el siguiente:

1) A partir del enunciado verbal, hemos de plantear el programa lineal. Lo primero es nombrar las variables y determinar la función objetivo y después, escribir las restricciones que determinarán la región factible en forma de sistema de inecuaciones lineales.
2) Determinar la región factible asociada a las restricciones del programa lineal
3) Hallar los vértices de la región factible.
4) Evaluar la función objetivo en cada uno de los vértices.
5) Determinar el valor (o valores) óptimo y contestar a las cuestiones que se planteen.

Veamos mediante ejemplos como se aplica

Ejemplo: En una confitería se dispone de 24 kg de polvorones y 15 kg de mantecados, que se envasan en dos tipos de cajas de la siguiente forma.

Caja 1: 200g de polvorones y 100g de mantecados. Precio: 4 euros.

Caja 2: 200g de polvorones y 300g de mantecados. Precio: 6 euros.

¿Cuántas cajas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el máximo de ingresos?

Solución:

La información del ejercicio la podemos organizar mediante una tabla:

	Nº de Cajas	Polvorones (g)	Mantecados (g)	Ingresos €
Caja 1	x	200	100	4
Caja 2	y	200	300	6
Total	x+y	$\leq$24000	$\leq$15000	4x+6y

De ahí tenemos que la función objetivo es $F(x,y)=4\cdot x+6\cdot y$, que son los ingresos totales, y es la que tenemos que maximizar en este caso.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 200x+200y\leq 24000 \\ 100x+300y\leq 15000 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \quad \text{que podemos simplificar y nos queda} \quad \begin{cases} x+y\leq 120 \\ x+3y\leq 150 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

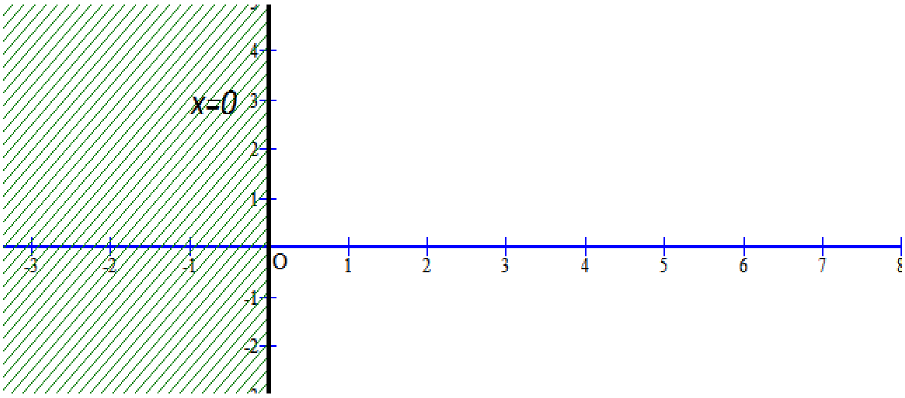
Ahora hemos de representar la región factible resolviendo el sistema de inecuaciones dado por las restricciones:

Empecemos con las restricciones más fáciles:

- Restricción $x\geq 0$: Dibujamos $x=0$ con su tabla de valores. Si nos fijamos, es el eje OY o de ordenadas (el vertical)

x	0	0
y	1	3

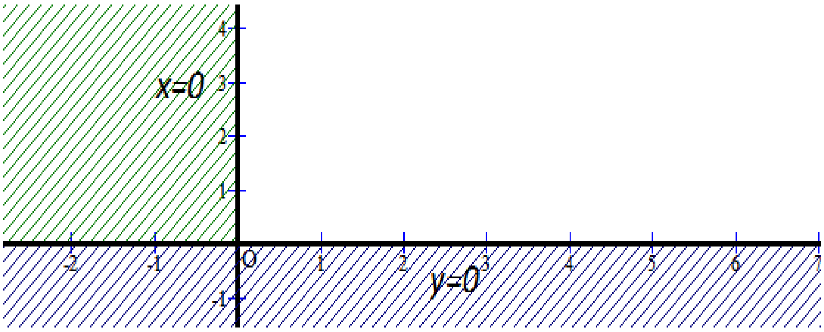
Probamos con el (1,1) y lo verifica, por tanto, nos queda



- Restricción $y \geq 0$: Dibujamos $y = 0$ con su tabla de valores. Si nos fijamos, es el eje OX o de abscisas (el horizontal)

x	0	1
y	0	0

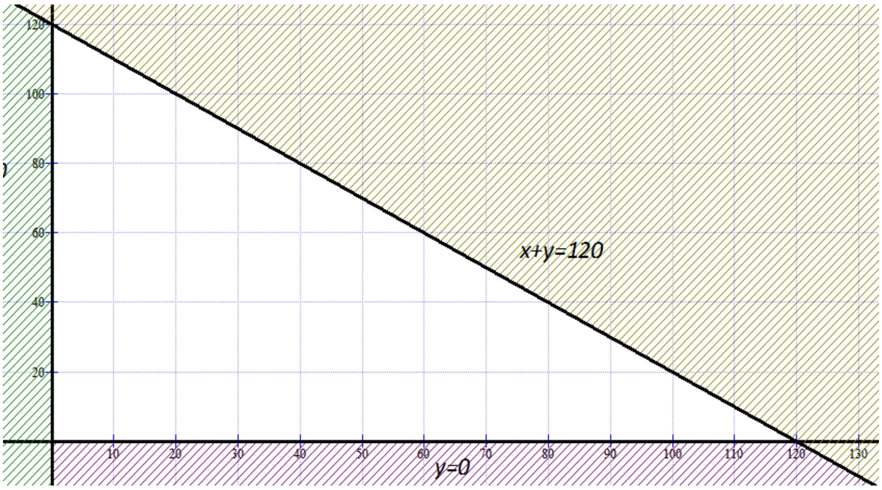
Probamos con el (1,1) y lo verifica, por tanto, nos queda



- Restricción $x + y \leq 120$: Dibujamos la recta $x + y = 120$ con su tabla de valores:

x	120	0
y	0	120

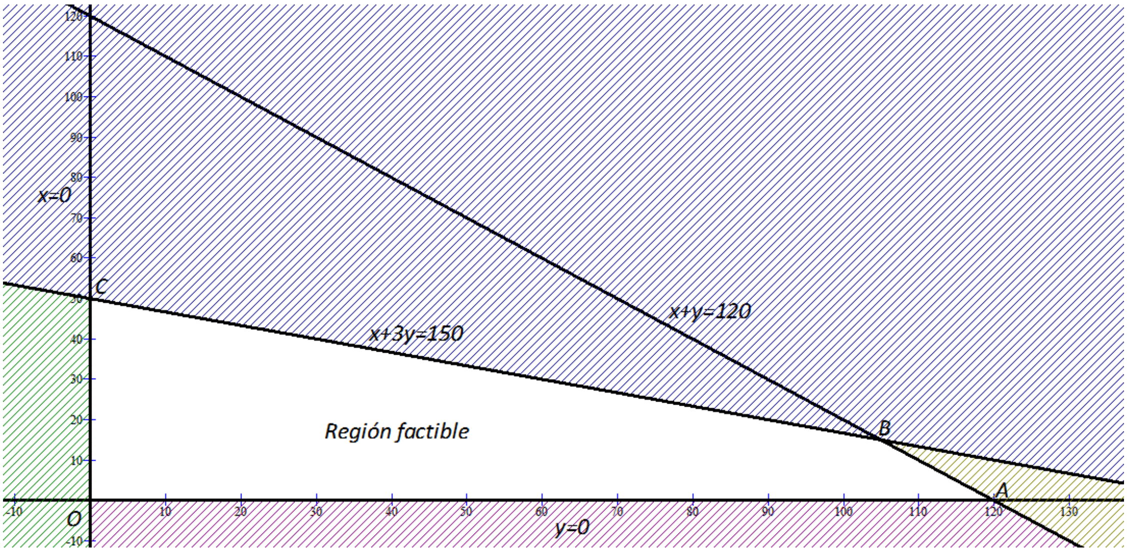
Probamos con el punto $(0,0)$ y lo verifica pues $0+0 \leq 120$. No va quedando el recinto así:



- Restricción $x+3y \le 150$: Dibujamos la recta $x+3y=150$ con una tabla de valores:

x	150	0
y	0	50

Probamos con el punto $(0,0)$ y lo verifica pues $0+3 \cdot 0 \le 150$. La región factible nos queda como sigue y donde hemos nombrado los 4 vértices de dicha región. Como vemos los bordes entran al ser todas las desigualdades $\le$



Ahora pasamos a calcular los vértices de la región factible. Algunos de ellos son obvios y nos es necesario realizar ningún cálculo:

$O(0,0)$ que es el origen de coordenadas como se observa

$A(120,0)$ como se observa o bien haciendo la intersección de las dos rectas que lo determinan, que en este vértice son: $\begin{cases} x+y=120 \\ y=0 \end{cases}$

$B(105,15)$ haciendo la intersección de las tos rectas que lo determinan, que en este vértice son:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{cases} \Rightarrow (E_2-E_1)\begin{cases} x+y=120 \\ 2y=30 \Rightarrow y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=105 \\ y=15 \end{cases}$$

$C(0,50)$ como se observa o bien haciendo la intersección de las dos rectas que lo determinan, que en este vértice son: $\begin{cases} x+3y=150 \\ x=0 \end{cases}$

Por último, hemos de hallar los valores de la función objetivo $F(x,y)=4\cdot x+6\cdot y$ en los vértices

$F(O)=F(0,0)=4\cdot 0+6\cdot 0=0$

$F(A)=F(120,0)=4\cdot 120+6\cdot 0=480$

$F(B)=F(105,15)=4\cdot 105+6\cdot 15=510$

$F(C)=F(0,50)=4\cdot 0+6\cdot 50=300$

Observamos que el máximo valor lo alcanza en el vértice $B(105,15)$, por tanto, hay que hacer 105 cajas de tipo 1 y 15 cajas de tipo 2 para obtener un beneficio máximo y ese beneficio es de 510 euros

Ejemplo: Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$13x+8y\le 600$; $3(x-2)\ge 2(y-3)$; $x-4y\le 0$

a) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

c) Calcule el valor máximo en dicho recinto de la función $F(x,y)=65\cdot x+40\cdot y$, indicando donde se alcanza.

Solución:

a) Vamos a estudiar cada restricción y a dibujarlas, y a calcular los vértices

- Restricción $13x+8y\le 600$: Dibujamos la recta $13x+8y=600$ mediante una tabla de valores

x	46.15	0
y	0	75

Probamos con el $(0,0)$ y lo verifica pues $13\cdot 0+8\cdot 0\le 600 \Rightarrow 0\le 600$.

- Restricción $3(x-2)\ge 2(y-3)\Rightarrow 3\cdot x-6\ge 2\cdot y-6\Rightarrow 3\cdot x-2\cdot y\ge 0$: Dibujamos la recta $3\cdot x-2\cdot y=0$ mediante una tabla de valores

x	0	2
y	0	3

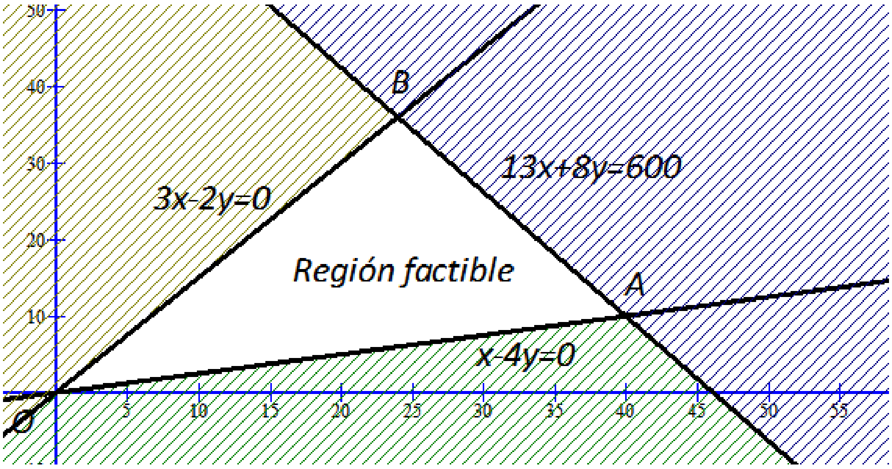
Probamos con el $(0,10)$ y no lo verifica pues $3\cdot 0-2\cdot 10\ge 0\Rightarrow -20\ge 0$ lo cual es falso. La solución será el semiplano donde no está el punto $(0,10)$

- Restricción $x-4y\le 0$: Dibujamos la recta $x-4y=0$ mediante una tabla de valores

x	0	40
y	0	10

Probamos con el punto $(0,10)$ y lo verifica pues $0-4\cdot 10\leq 0 \Rightarrow -40\leq 0$.

El recinto que nos queda es el siguiente y en blanco tenemos la región factible



Pasamos ahora a calcular los vértices:

O(0,0) que es el origen de coordenadas como se observa

A(40,10) haciendo la intersección de las dos rectas que lo determinan, que en este vértice son:

$$\begin{cases}13x+8y=600\\ x-4y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}13x+8y=600\\ x=4y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}52y+8y=600\\ x=4y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}60y=600\\ x=4y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=10\\ x=40\end{cases}$$

B(24,36) haciendo la intersección de las tos rectas que lo determinan, que en este vértice son:

$$\begin{cases}13x+8y=600\\ 3x-2y=0\end{cases}\Rightarrow(4E_2)\begin{cases}13x+8y=600\\ 12x-8y=0\end{cases}\Rightarrow(E_2+E_1)\begin{cases}13x+8y=600\\ 25x=600\Rightarrow x=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=36\\ x=24\end{cases}$$

b) Veamos ahora el valor de la función $F(x,y)=65\cdot x+40\cdot y$ en los vértices de la región factible, pues, El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$F(O)=F(0,0)=65\cdot 0+40\cdot 0=0$

$F(A)=F(40,10)=65\cdot 40+40\cdot 10=3000$

$F(B)=F(24,36)=65\cdot 24+40\cdot 36=3000$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 3000 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en los puntos A(40,10) y B(24,36), luego todo el segmento que une los vértices A(40,10) y B(24,36) es solución.

Ejemplo: El problema del transporte es uno de los más populares de la programación lineal. Veamos un ejemplo de este: "Desde dos almacenes, A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste del transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado por la tabla adjunta. Planifica el transporte para que el coste sea mínimo."

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	10 €	15 €	20 €
B	15 €	10 €	10 €

Vamos a llamar *x* a la cantidad de mercancía (en toneladas) que abastece el almacén A al mercado 1 e *y* a la cantidad de mercancía (en toneladas) que abastece el almacén A al mercado 2, el resto de mercancía queda como muestra la siguiente tabla:

Almacén	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
A	x	y	10-x-y
B	8-x	8-y	9-(10-x-y)=x+y-1

La función objetivo se obtiene sumando todos los costes del transporte y serán:

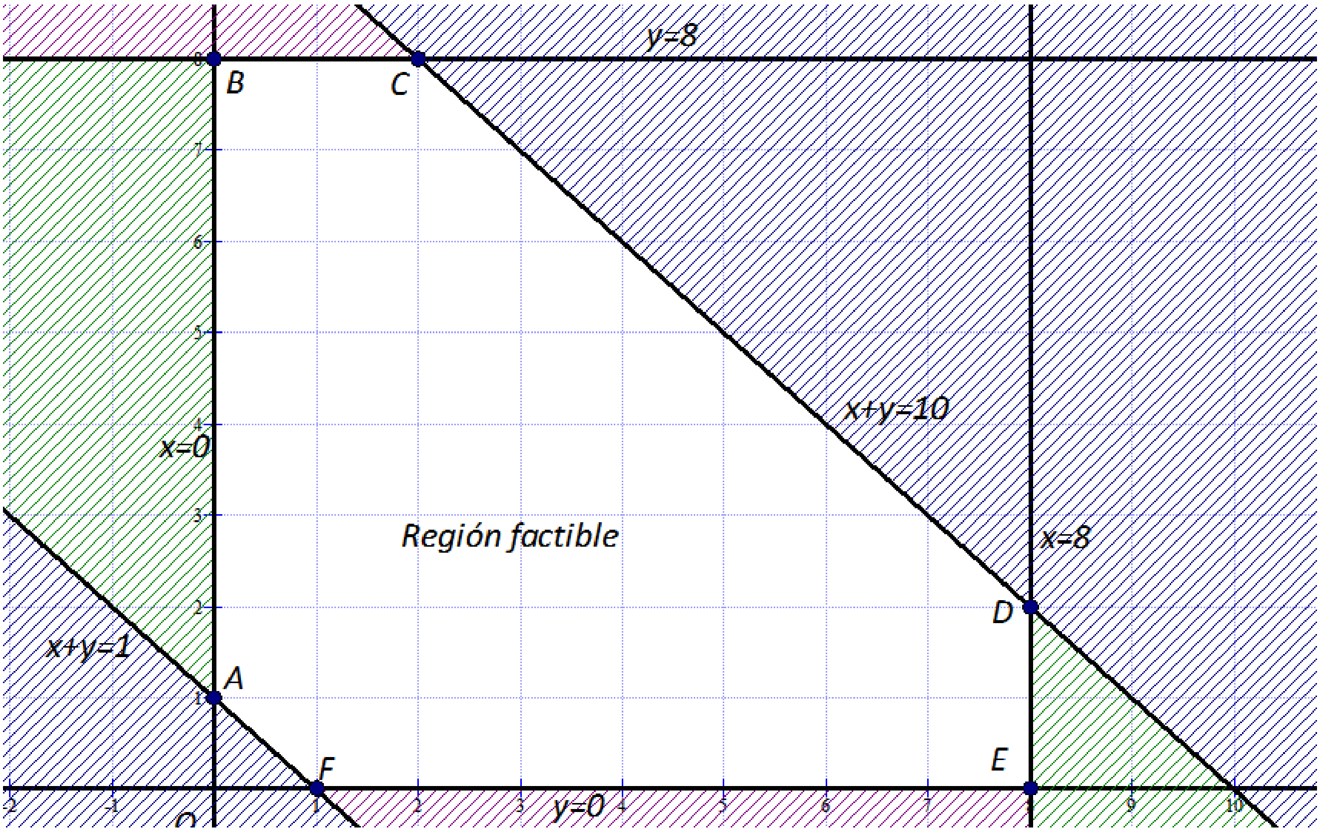
$$f(x,\ y) = 10x + 15y + 20(10 - x - y) + 15(8 - x) + 10(8 - y) + 10(x + y - 1) = -15x - 5y + 390$$

Las restricciones se obtienen obligando a que todas las mercancías sean cantidades positivas, con lo que el programa lineal queda:

$$\begin{cases} Mín: f(x,y) = -15x - 5y + 390 \\ \text{Restricciones:} \begin{cases} x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \\ x \leq 8 \\ y \leq 8 \\ x + y \leq 10 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Pasamos, como en ejemplos anteriores, a determinar la región factible:

Las dos primeras (restricciones de no negatividad) así como la 3ª y la 4ª son muy sencillas y se pueden trazar directamente al ser rectas verticales y horizontales. Para la 5ª y la 6ª recta buscamos dos puntos, las trazamos y vemos la región que corresponde a cada inecuación. Haciendo todo esto, obtenemos la región factible representada.



A continuación, resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes, obtenemos los vértices de la región factible: $A(0,1)$, $B(0,8)$, $C(2,8)$, $D(8,2)$, $E(8,0)$ y $F(1,0)$.

Evaluamos los vértices en la función objetivo:

$$\begin{cases} f(0,1) = 385 \\ f(0,8) = 350 \\ f(2,8) = 320 \\ f(8,2) = 260 \\ f(8,0) = 270 \\ f(1,0) = 375 \end{cases}$$

Vemos que el mínimo se obtiene para x = 8, y = 2 y que vale 260.

Respondemos a las cuestiones que se nos planteen. En este caso la respuesta es que el coste mínimo se consigue transportando desde el almacén A, 8 toneladas al mercado 1, 2 al mercado 2 y nada al mercado 3; y desde el almacén B, nada al mercado 1, 6 al mercado 2 y 9 al mercado 3. Aunque no me lo piden, podemos decir que el coste mínimo conseguido es de 260 € con esta distribución óptima.