UNIDAD 5: **PROBABILIDAD**

CONTENIDO

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS

Definición: Un fenómeno o experiencia se dice **aleatorio** cuando al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado.

Si, por el contrario, se puede predecir el resultado de una experiencia aún antes de realizarla, se dice que el experimento es **determinista**.

Son fenómenos aleatorios:

- Extracción de una carta de la baraja.
- Lanzamiento de un dado.
- Respuestas a una encuesta.

Definición: El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama **espacio muestral**.

Ejemplo: El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar un dado es:

$$E = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Ejemplo: El espacio muestral del experimento que consiste en lanzar una moneda al aire tres veces es:

$$E=\{(c,c,c),(c,c,x),(c,x,c),(x,c,c),(x,x,c),(x,c,x),(c,x,x),(x,x,x)\}$$

Definición: Cada elemento del espacio muestral E se llama **suceso** elemental.

Ejemplo: Una bolsa contiene bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente tres bolas. Calcular:

1. El espacio muestral.

E = {(b, b, b); (b, b, n); (b, n, b); (n, b, b); (b, n, n); (n, b, n); (n, n, b); (n, n, n)}

2. El suceso A = {extraer tres bolas del mismo color}.

A = {(b, b, b); (n, n, n)}

3. El suceso B = {extraer al menos una bola blanca}.

B= {(b, b, b); (b, b, n); (b, n, b); (n, b, b); (b, n, n); (n, b, n); (n, n ,b)}

4. El suceso C = {extraer una sola bola negra}.

C = {(b, b, n); (b, n, b); (n, b, b)}

Tipos de sucesos:

- **Sucesos elementales,** son los formados por un solo resultado del espacio muestral.
- **Sucesos compuestos,** son los formados por varios sucesos elementales.
- **Suceso seguro, E,** está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral).

  Ejemplo: Tirando un dado obtener una puntuación que sea menor que 7 es un suceso seguro.

- **Suceso imposible, ∅,** es el que no tiene ningún elemento.

  Ejemplo: Tirando un dado obtener una puntuación igual a 7 es un suceso imposible o ∅ .

- **Unión de sucesos**. Dados dos sucesos A y B se llama unión de A y B, y se representa por $A \cup B$, al suceso que se realiza cuando se realiza alguno de ellos, A o B.

Ejemplo: Se el experimento aleatorio de lanzar un dado. Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6} y el suceso B = {salir un 5}. El suceso $A \cup B$ = {2, 4, 5, 6}

- **Intersección de sucesos**. Dados dos sucesos A y B se llama intersección entre A y B y se representa por $A \cap B$, al suceso que se realiza si y sólo se realizan simultáneamente A y B

Ejemplo: Se el experimento aleatorio de lanzar un dado. Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6} y el suceso B = {salir un múltiplo de 3} = {3, 6}. El suceso $A \cap B$ = {6}

- **Suceso contrario o complementario de A**. Se representa por $\overline{A}$ o por A^c, al suceso que se realiza cuando no se realiza A y recíprocamente. (algunos también lo representan por A')

  El suceso contrario de E es ∅ y recíprocamente.

Ejemplo: Se el experimento aleatorio de lanzar un dado. Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6}. El suceso $A^c = \overline{A}$ = {salir nº impar} = {1, 3, 5}

- **Sucesos incompatibles**. Dados dos sucesos A y B se dicen incompatibles si es imposible que ocurran a la vez, es decir, $A \cap B$ =∅

Ejemplo: Consideramos el suceso A = {salir nº par} = {2, 4, 6} y el suceso B = {salir un múltiplo de 5} = {5}. Los sucesos son incompatibles pues $A \cap B$ = ∅

- **Diferencia de sucesos**. La diferencia de dos sucesos, $A - B$, es el suceso formado por todos los elementos de A que no son de B. Es decir, la **diferencia de los sucesos** A y B se verifica cuando lo hace A y no B. Por tanto, $A - B = A \cap B^c$

  A − B se lee como **"A menos B"**.

Ejemplo: Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par"= {2, 4, 6} y B = "sacar múltiplo de 3"= {3, 6}. Entonces $A - B = A \cap B^c$ = {2, 4}

Leyes de Morgan:

- El suceso contrario de la unión de sucesos es la intersección de sus sucesos complementarios

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- El suceso contrario de la intersección de sucesos es la unión de sus sucesos complementarios

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

2. PROBABILIDAD. PROPIEDADES

La probabilidad mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado resultado (suceso) cuando se realiza un experimento aleatorio.

La probabilidad toma valores entre 0 y 1 (o expresados en tanto por ciento, entre 0% y 100%)

Definición: La probabilidad de un suceso A es el límite al que tiende la frecuencia relativa de A cuando el nº de experiencias es muy grande, es decir, tiende a ∞ (esta definición es un poco abstracta, no le deis mayor importancia, mejor que lo entendáis como casos favorables dividido por casos posibles, que es la regla de Laplace que vemos después de las propiedades)

Propiedades

- La probabilidad del suceso seguro, E, es 1: $P(E)=1$
- Se cumple que para cualquier suceso $1 \geq P(A) \geq 0$
- La probabilidad de la unión de dos sucesos, *A y B*, que sean incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\emptyset)=0$
- La probabilidad el suceso contrario o complementario es: $P(A^c)=1-P(A)$
- La probabilidad de la unión de dos sucesos, *A y B*, es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Si A y B son sucesos tales que $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

3. REGLA DE LAPLACE

Un caso particular y simple de probabilidad en un espacio muestral finito es aquel en el que se puede suponer que cada suceso elemental tiene la misma probabilidad de ocurrir. Cuando esto ocurre se dice que los sucesos elementales son **equiprobables**.

En este caso, y sólo en este caso, podemos aplicar la llamada regla de Laplace para hallar la probabilidad de un suceso:

"Sea un suceso A compuesto por sucesos elementales del espacio muestral E, entonces la probabilidad de A viene dada por:

$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos de A}}{\textit{número de elementos de E}} = \frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Ejemplo: Si se lanza un dado perfecto, la perfección del dado nos induce a suponer que la probabilidad de cada suceso elemental es la misma. Como además la suma de estas probabilidades ha de ser 1, se asigna a cada suceso elemental 1/6 de probabilidad.

En este caso, la probabilidad del suceso A:" Obtener número par" es: $P(A) = P\left(\{2,4,6\}\right) = 3/6 = 0,5$

Estas probabilidades que, como en este ejemplo, se asignan a los sucesos por consideraciones teóricas, se llaman probabilidades a priori, y siempre que no exista alguna razón para pensar que un suceso elemental puede aparecer más veces que otro, admitiremos que todos ellos tienen la misma probabilidad.

Ejemplo: En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40

Casos favorables de ases: 4→ $P(as) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0'1$

Casos favorables de copas: 10 → $P(copas) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0'25$