UNIDAD 7: FUNCIONES REALES. LÍMITES Y CONTINUIDAD.

CONTENIDO

1. FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Una <u>función real de variable real</u> es una aplicación de un subconjunto de los nº reales ($\mathbb{R}$) en otro subconjunto de $\mathbb{R}$

Se representa de la siguiente forma: $\begin{matrix} f: D \subseteq R \to R \\ x \in D \to y = f(x) \end{matrix}$ Una " x " tiene una sola imagen, pero una " y " puede tener varias x que vayan a ella.

Al conjunto D se le llama <u>dominio de definición</u> (o simplemente dominio) de la función $y = f(x)$, y suele ser el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la función f tiene sentido. Se representa por $Dom(f)$

A " x " se le llama <u>variable independiente</u>, y representa a los valores a los que se aplica f

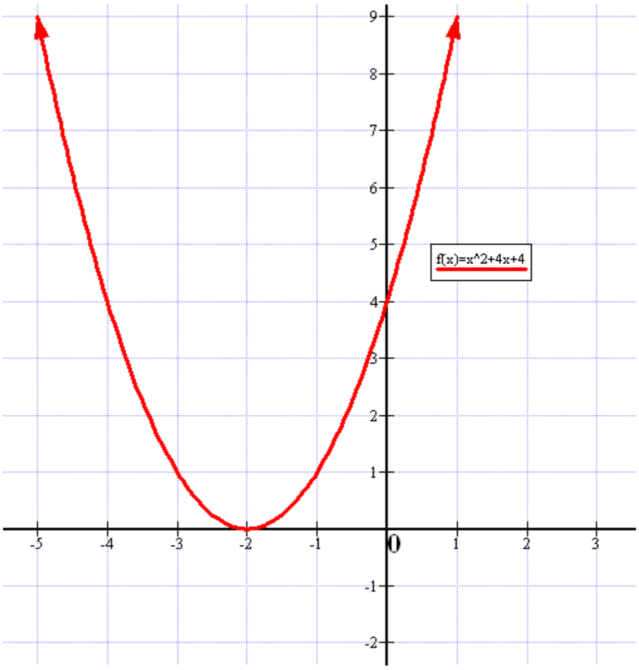
A " y " se le llama <u>variable dependiente</u>, y representa a los valores que se obtienen de aplicar f

Al conjunto de todos los valores que se obtienen aplicando f a todos los valores del dominio se le llama conjunto <u>imagen</u> o <u>recorrido</u>. Se representa por $\operatorname{Im}(f)$ o por $\operatorname{Re}corr(f)$

Se denomina <u>gráfica</u> o <u>grafo</u> de una función $y = f(x)$ al conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ con $x \in Dom(f)$

<u>Ejemplo</u>: Sea la función polinómica cuadrática siguiente: $\begin{matrix} f: D \subseteq R \to R \\ x \in D \to y = f(x) = x^2 + 4x + 4 \end{matrix}$

De forma reducida nos darán de manera habitual la función sólo mediante su criterio o fórmula. En este caso como: $f(x) = x^2 + 4x + 4$ ó $y = x^2 + 4x + 4$



Todas las funciones polinómicas tienen por dominio todos los nº reales, salvo que explícitamente nos hagan una restricción, que no es el caso.

Así, $Dom(f) = \mathbb{R}$

El conjunto imagen o recorrido es más difícil de calcular, pues nos hace falta dibujar la función, obteniendo su gráfica, que en este caso es una parábola (y suponemos que el alumno sabe representarla con el vértice, concavidad, puntos de corte con los ejes y tabla de valores). Os saldrá un dibujo como el de la izquierda.

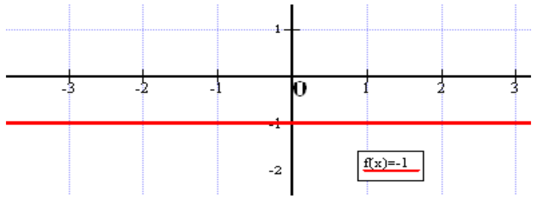
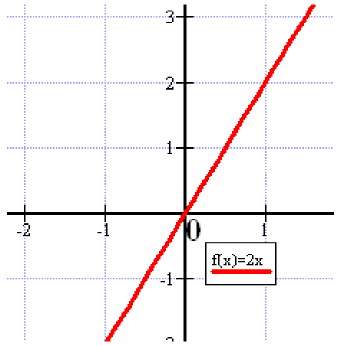
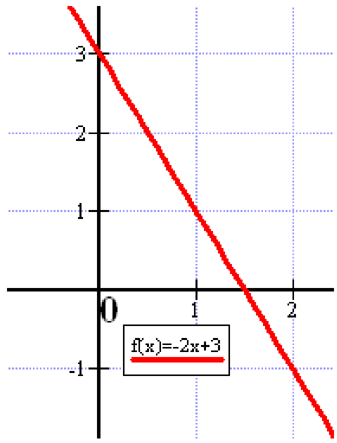
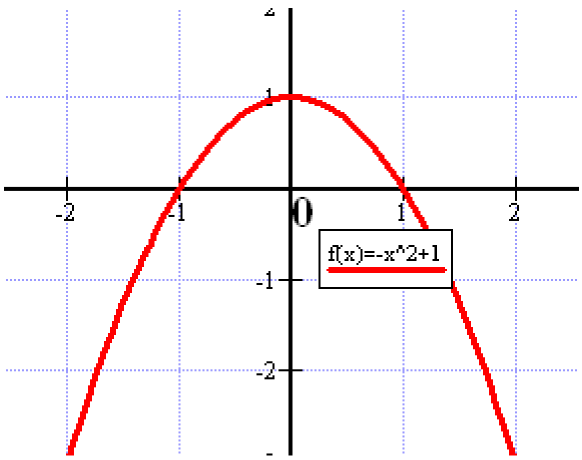
La imagen la miramos en el eje de ordenadas o eje OY (como si comprimiésemos el dibujo de la función sobre el eje OY) y obtenemos: $\operatorname{Im}(f) = [0, +\infty))$

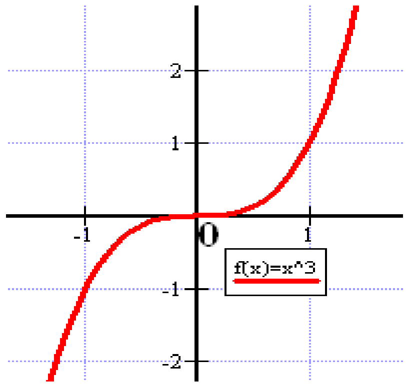
2. FUNCIONES MÁS USUALES

a) Funciones polinómicas

Su criterio o fórmula es un polinomio. Su dominio es todo R

Pueden ser:

TIPO	EJEMPLO	GRÁFICA
Constantes $f(x)=k$ Su gráfica es una recta horizontal	$y=-1$ $Dom(y)=\mathbb{R}$) $Im(y)=\{-1\}$	
Lineales $f(x)=mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas	$f(x)=2x$ $Dom(y)=\mathbb{R}$ $Im(y)=\mathbb{R}$	
Afines $f(x)=mx+n$ Su gráfica es una recta inclinada	$f(x)=-2x+3$ $Dom(y)=\mathbb{R}$ $Im(y)=\mathbb{R}$	
Cuadráticas $f(x)=ax^2+bx+c$ Su gráfica es una parábola	$y=-x^2+1$ $Dom(y)=\mathbb{R}$ $Im(y)=(-\infty,1]$	

Cúbicas $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ Para dibujarla necesitamos más conocimientos de los actuales	Una de las más usadas es $y=x^3$ $Dom(y)=\mathbb{R}$ $Im(y)=\mathbb{R}$	
Todas las demás de grado superior a 3	$f(x)=x^4-x^2$ $Dom(y)=\mathbb{R}$	Sus gráficas serán estudiadas más adelante

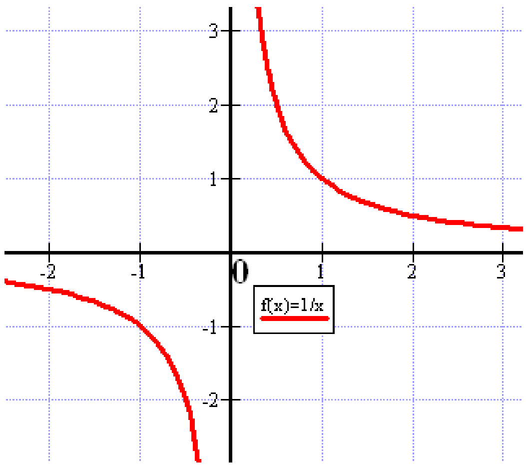
b) Funciones racionales

Son de la forma $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Su dominio son todos aquellos nº reales que no anulan el denominador, Matemáticamente lo expresamos de la siguiente manera: $Dom(y)=\{x\in R\,/\,\mathrm{Q(x)}\neq 0\}$ (esto se lee así, “todos los nº reales tales que el polinomio denominador $Q(x)$ no vale 0”

Sus gráficas las estudiaremos más adelante, pero algunas ya las conocemos, y las vemos en los siguientes ejemplos.

<u>Ejemplo</u>: $y=\dfrac{1}{x}$, que es una hipérbola equilátera. Tenemos que Dom(y) = R\{0}



y por la gráfica podemos sacar su imagen Im(y) = R\{0}

<u>Ejemplo</u>: $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2-3x}$ Vamos a calcular su dominio, $Dom(f)=\{x\in R\ \backslash x^2-3x\neq 0\}$

Vemos dónde se anula el denominador: $x^2-3x=0\rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=3 \end{matrix}$ Por tanto, $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0,\ 3\}$

La gráfica la estudiaremos más adelante

c) Funciones irracionales del tipo $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$

Tenemos que:

- Si el índice del radical es impar (n es impar), entonces el dominio de la función f coincide con el dominio de la función g
- Si el índice del radical es par (n es par), entonces el dominio será el conjunto de los nº reales tales que $g(x)\geq 0$

Veamos ejemplos de lo dicho:

<u>Ejemplo</u>: Calcular el dominio de $y=\sqrt[3]{2x-1}$. Como se trata de una función irracional de índice impar (3), nos fijamos en el radicando, y como se trata de una polinómica de primer grado (afín) su dominio será $\mathbb{R}\Rightarrow Dom(y)=\mathbb{R}$

<u>Ejemplo</u>: Calcular el dominio de $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{2}{x^2-9}}$ Por ser de índice impar (5), nos fijamos en el radicando, que es una fracción algebraica. Debemos descartar para el dominio los valores que anulan el denominador

$$x^2-9=0 \rightarrow \begin{matrix} x=3 \\ x=-3 \end{matrix} \rightarrow Dom(f)=\mathbb{R}-\{3,-3\}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular el dominio de $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$ Por ser de índice par (4), vamos a hacer una tabla de signos para conocer donde el radicando es ≥ 0. Veamos primero donde el numerador y el denominador del radicando se anula.

$$\begin{matrix} x-1=0 \\ x^2-9=0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{matrix}$$ Con estos tres valores dividimos la recta real en 4 intervalos abiertos y construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	-	-	+	+
x^2-9	+	-	-	+
	-	**+**	**-**	**+**

De donde deducimos que $Dom(f)=(-3,1]\cup(3,+\infty)$. Fijaos que el 1 es cerrado pues anula el numerador del radicando y tiene sentido, mientras que –3 y 3 van abiertos pues anulan el denominador y no tienen sentido (dividiríamos por 0)

d) Funciones trigonométricas

Las de tipo $y = sen\left(g(x)\right)$ ó $y = \cos\left(g(x)\right)$ tienen por dominio el dominio de $g(x)$.

Las de tipo $y = tg\left(g(x)\right)$ tienen por dominio: $Dom(tg(g(x))=\left\{x\in R \mid g(x)\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$. Suele ser muy complicado calcular estos dominios para un nivel de Bachillerato.

Ejemplo: Calcular el dominio de $f(x) = sen\left(\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}\right)$ Os dejo la solución y practicad vosotros

$$Dom(f) = (-\infty,-3) \cup [2,+\infty)$$

e) Funciones exponenciales

Las exponenciales $f(x) = a^{g(x)}$ tienen por dominio el mismo que el de la función exponente

Ejemplo: $y = 3^{\frac{2}{2x-1}} \rightarrow Dom(y) = R - \{\frac{1}{2}\}$

Ejemplo: $f(x) = e^{\sqrt{x}} + 2 \rightarrow Dom(f) = [0,+\infty)$

f) Funciones logarítmicas

El dominio de estas funciones, $f(x) = \log_a(g(x))$, son los nº reales tales que hacen $g(x) > 0$

Ejemplo: $f(x) = \ln(1-x^2)$ Matemáticamente tenemos que calcular $Dom(f) = \{x \in R | 1 - x^2 > 0\}$

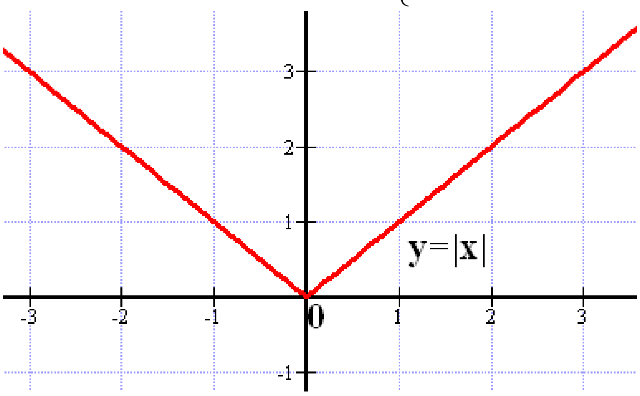
Resolvemos $1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$ y ahora hacemos la tabla de signos

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$1-x^2$	-	+	-

Por tanto, $Dom(f) = (-1,1)$. Observad que 1 y –1 son abiertos pues "$\ln(0)$" no tiene sentido

g) Función valor absoluto, función parte entera y función parte decimal

Función valor absoluto: La función básica es $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ Como vemos su dominio es $\mathbb{R}$ y su representación gráfica es



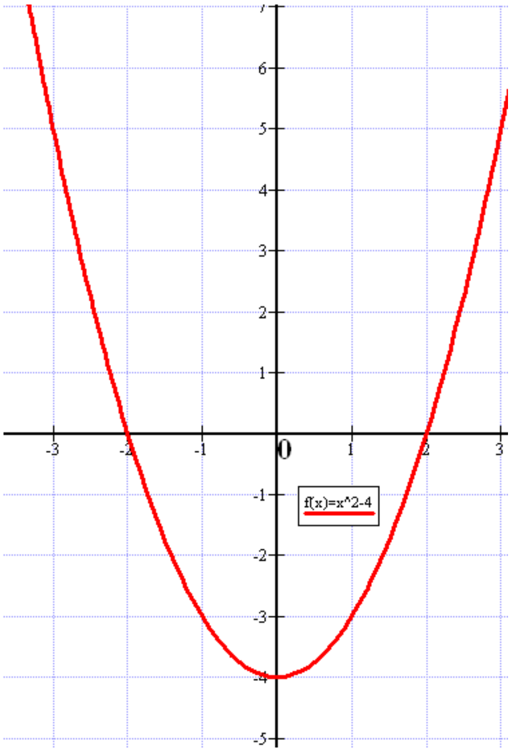
De aquí deducimos que su recorrido o imagen es: $\text{Recorr}(|x|) = [0, +\infty)$

Ejemplo: Dada la función $f(x) = |x^2 - 4|$-3, vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su imagen.

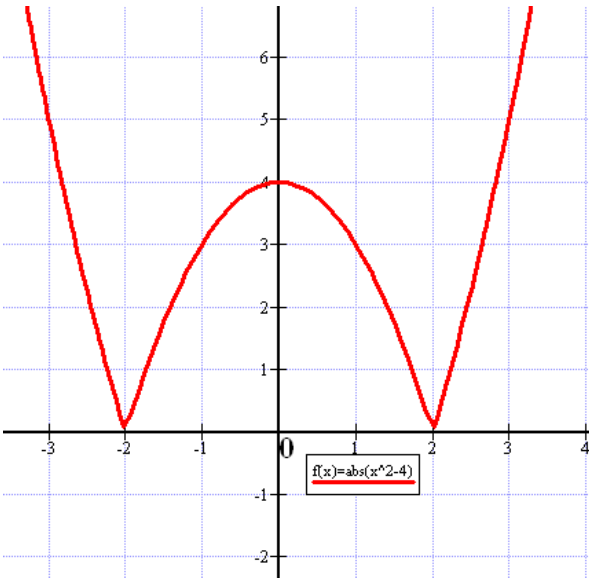
El dominio de $|g(x)|$ es igual al de $g(x)$, por lo que en nuestro caso como tenemos un polinomio cuadrático en el valor absoluto y después restamos 3, podemos concluir que $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Vamos a representarla gráficamente mediante 3 pasos:

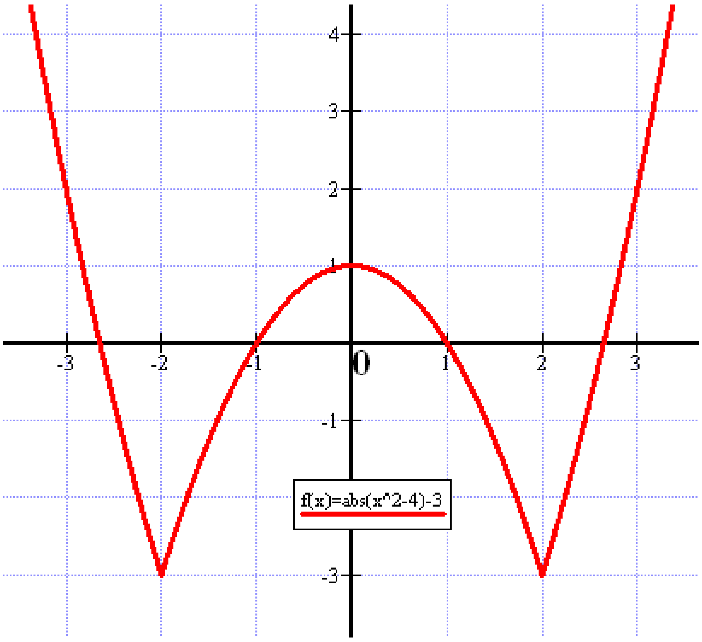
Paso1: Dibujamos la parábola $g(x) = x^2 - 4$, como sabemos desde hace "muuuuchooooo" tiempo



Paso 2: El valor absoluto lo que hace es poner positivo los valores de $x^2 - 1$ que son negativos y los demás los deja igual



Paso 3: Restamos 3 a toda la gráfica, es decir, trasladamos la representación 3 unidades hacia abajo

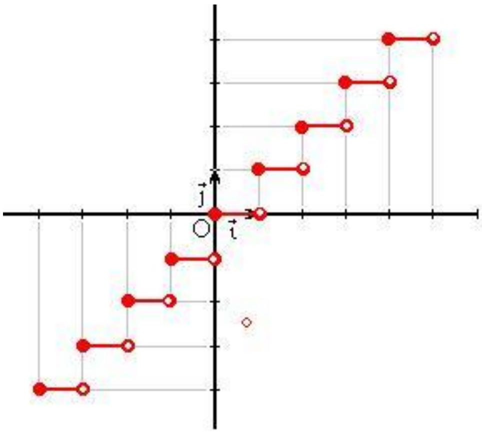


Ya podemos concluir que $\text{Im}(f)=[-3,+\infty)$

Función parte entera: Es la función $f(x)=E(x)=$ mayor de todos los enteros menores o iguales a x. Su dominio es todo $\mathbb{R}$

Así, unos ejemplos de valores, $E(2,3)=2$, $E(0,45)=0$, $E(7)=7$, $E(-1,3)=-2$, $E(-5,2)=-6$, $E(-8)=-8$

Su representación gráfica es parecida a una escalera



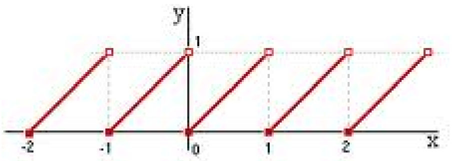
Y tenemos que $\text{Im}(E)=\mathbb{Z}$

Función parte decimal: Se define como $Dec(x)=x-E(x)$.

Algunos ejemplos de valores:

x	2'1	8'234	5	-2	-12'34	-7'8	-9'7
$Dec(x)$	0'1	0'234	0	0	0'66	0'2	0'3

Su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su gráfica es así:



Luego $\mathrm{Im}(Dec) = [0,1)$

h) Funciones definidas a trozos o por partes

Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente "x" pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: Sea $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & si \quad x < 1 \\ 2x - 1 & si \quad 1 \le x < 3 \\ \ln x & si \quad x > 3 \end{cases}$ Vamos a estudiar su dominio, su representación gráfica y su imagen. Esta función también se podía poner así usando intervalos $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & si \quad x \in (-\infty, 1) \\ 2x - 1 & si \quad x \in [1,3) \\ \ln x & si \quad x \in (3 + \infty) \end{cases}$ Podéis usar la que más os guste, es totalmente indiferente.

Como vemos tiene 3 partes:

- Si $x < 1$ (o bien, $x \in (-\infty, 1)$), está definida por un polinomio de grado 2, que siempre tiene sentido, en particular en la restricción $x < 1$. Tendremos un trozo de parábola

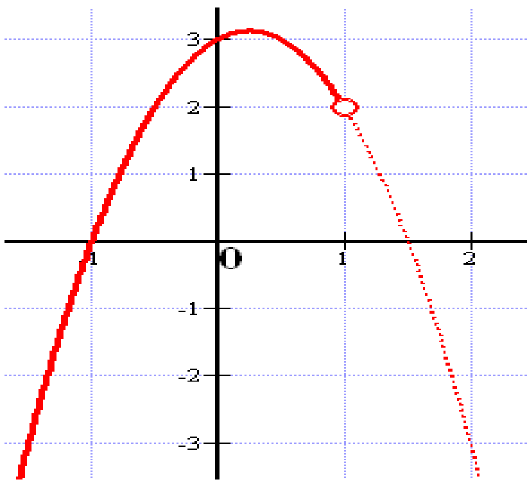
- Si $1 \le x < 3$, está definida por un polinomio de grado 1 (función afín), que siempre tiene sentido, y su gráfica será una recta. Tendremos un trozo de recta (una semirrecta o un segmento, en este caso un segmento)

- Si $x > 3$, está definida por un logaritmo neperiano que tiene sentido siempre que su argumento (en este caso la "x") sea positivo. Como x > 3, no hay problema y tiene sentido.

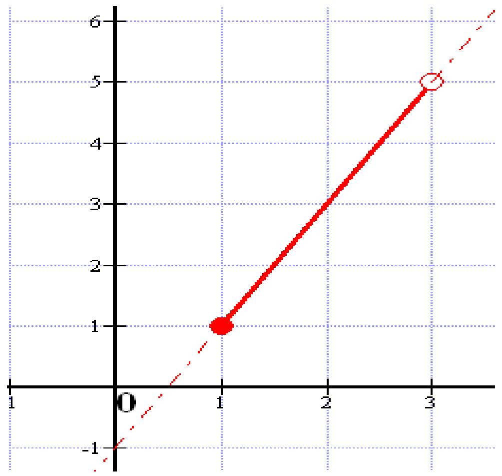
Pero hay un valor dónde la función no está definida, en $x = 3$. Por tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

Pasamos a representarla gráficamente, para ello dibujamos cada parte por separado y en línea discontinua se representa la parte que habrá que borrar en el gráfico final.

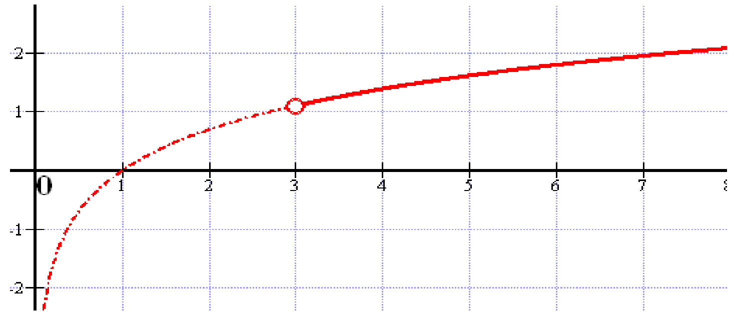
La parábola sería así (vosotros lo hacéis como siempre: vértice, cortes, etc.)



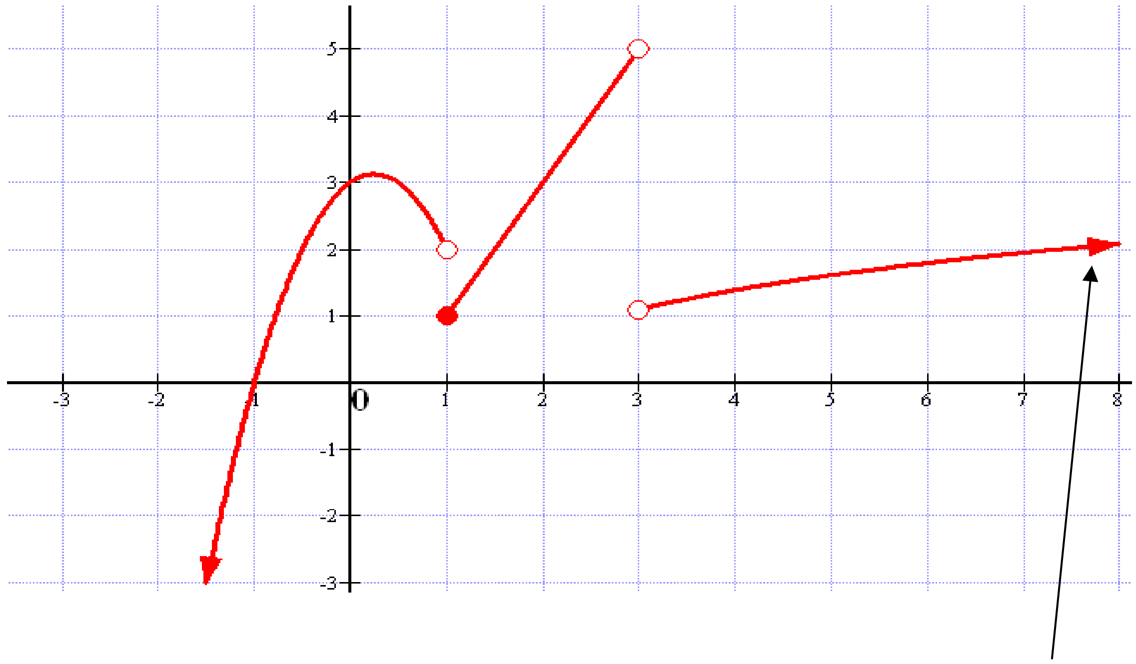
La recta



Y el logaritmo neperiano



Y todo unido y quitando las líneas punteadas, nos queda la gráfica de $f(x)$

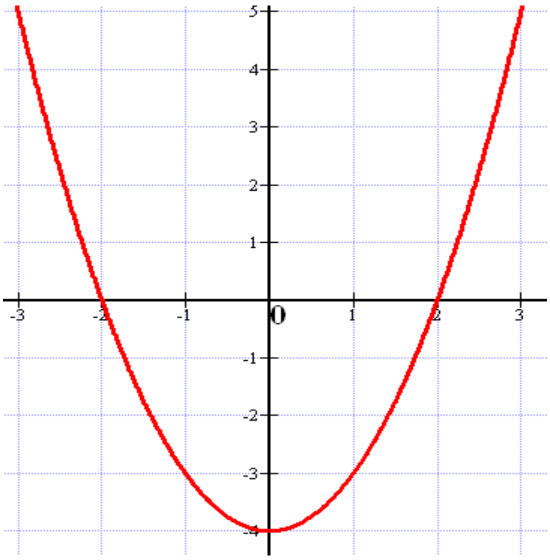


Y tenemos que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$, pues el logaritmo neperiano va creciendo (aunque lentamente) hacia el infinito

3. FUNCIONES SIMÉTRICAS

Definición: Una función $y = f(x)$ se dice **simétrica respecto del eje de ordenadas o eje OY** o que tiene **simetría par** si $f(-x) = f(x)$ para cualquier x del $Dom(f)$

Ejemplo: La función $f(x) = x^2 - 4$ es par como vemos por su representación gráfica.

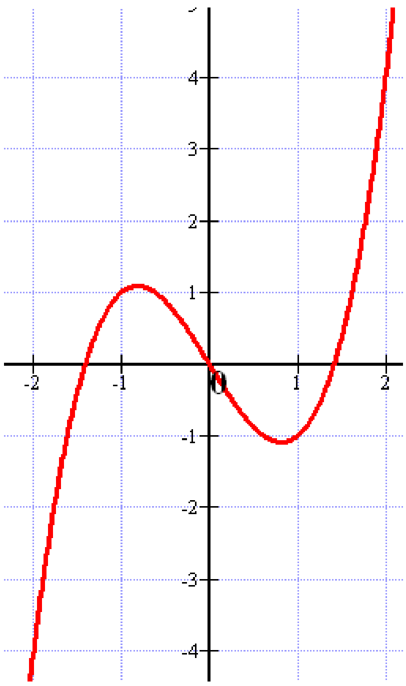


Matemáticamente demostramos que es par haciendo lo siguiente:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$$

Definición: Una función y = f(x) es **simétrica respecto del origen de coordenadas** o que tiene **simetría impar** si f(-x) = -f(x)

Ejemplo: La función $f(x) = x^3 - 2x$ es impar como vemos por su representación gráfica.



Matemáticamente demostramos que es impar haciendo lo siguiente:

$$f(-x) = (-x)^3 - 2\cdot(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$$

Propiedad: Para que una función pueda ser simétrica (par o impar) su dominio ha de ser simétrico respecto al origen de coordenadas

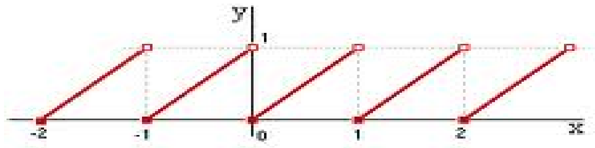
Ejemplo: La función $f(x) = \ln x$ no puede ser simétrica pues su dominio es $(0,+\infty)$

4. FUNCIONES PERIÓDICAS

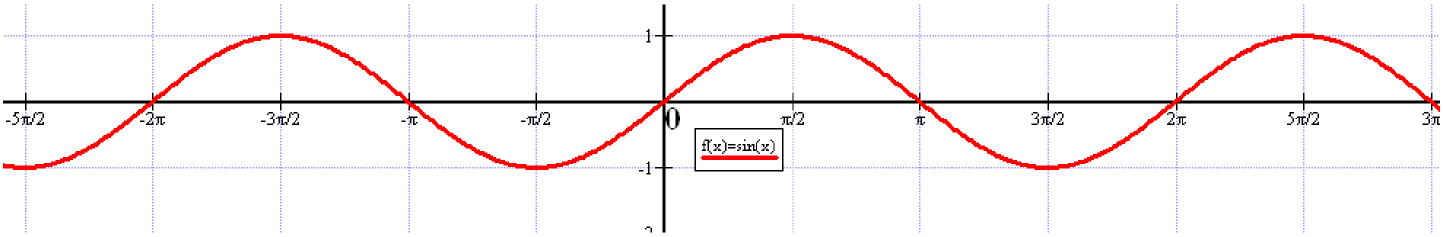
Son funciones que se van repitiendo a lo largo del eje OX

Definición: Una función $y = f(x)$ es **periódica de periodo** T (T positivo), si cumple que $f(x+kT) = f(x)$ para cualquier valor de $x \in Dom(f)$

Ejemplo: La función parte decimal $Dec(x) = x - E(x)$, que ya hemos visto, es periódica de periodo 1



Ejemplo: La función $f(x) = senx$ es periódica de periodo 2π



5. FUNCIONES ACOTADAS. EXTREMOS ABSOLUTOS

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada superiormente por un nº real K si todos los valores que toma la función son menores o iguales que K, es decir, $f(x) \le K \quad \forall x \in Dom(f)$ (NOTA: $\forall$ = para todo)

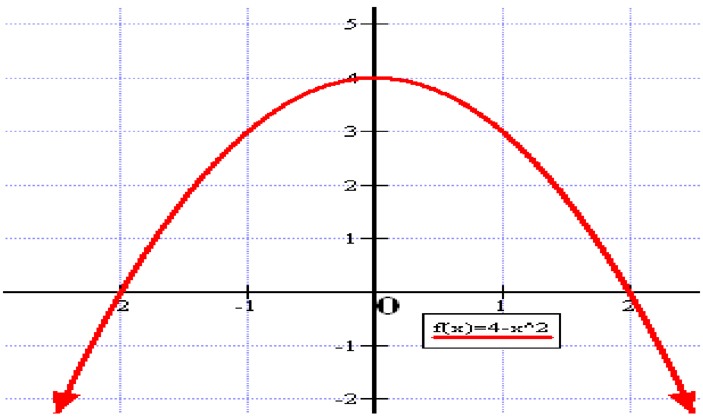
A K se le llama cota superior.

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada inferiormente por un nº real P si todos los valores que toma la función son mayores o iguales que P, es decir, $f(x) \ge P \quad \forall x \in Dom(f)$

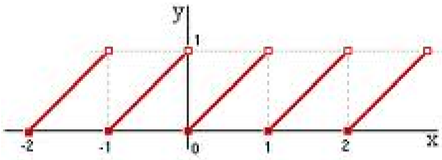
A P se le llama cota inferior.

Definición: Una función $y = f(x)$ está acotada si lo está superior e inferiormente, es decir, $P \le f(x) \le K$ $\forall x \in Dom(f)$

Ejemplo: La función $f(x) = 4 - x^2$ está acotada superiormente por 4 (ó 5 ó 6 ó ...) pero no está acotada inferiormente



Ejemplo: La función parte decimal $Dec(x) = x - E(x)$ que ya hemos visto está acotada. Por ejemplo, tiene como cota superior 1 (o cualquier otro nº mayor que 1) y como una cota inferior 0 (o cualquier otro nº menor que 0)



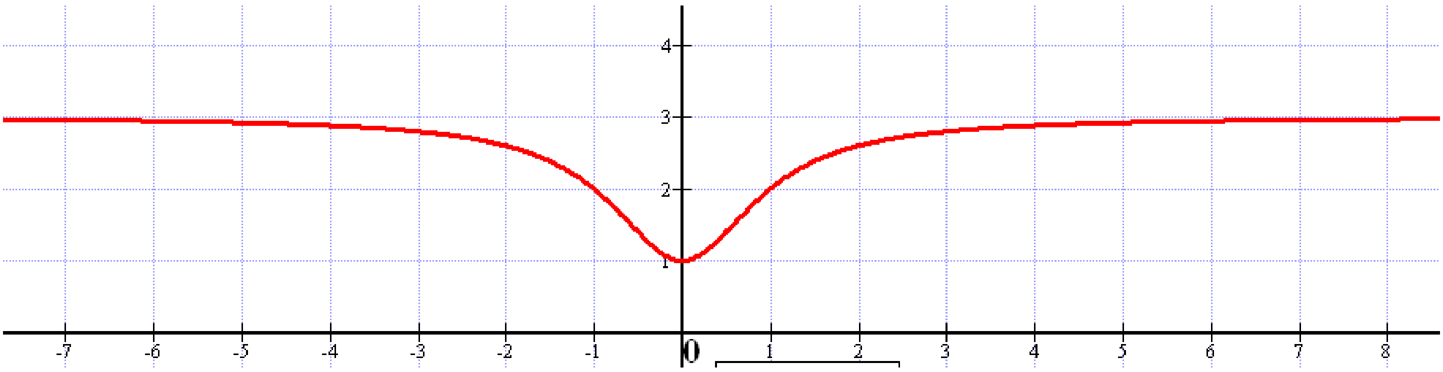
Definición: Se llama **extremo superior o supremo** a la menor de las cotas superiores de una función acotada superiormente

Definición: Se llama **máximo absoluto** de una función acotada superiormente al extremo superior o supremo cuando es alcanzado por la función

Definición: Se llama **extremo inferior o ínfimo** a la mayor de las cotas inferiores de una función acotada inferiormente

Definición: Se llama **mínimo absoluto** de una función acotada inferiormente al extremo inferior o ínfimo cuando es alcanzado por la función

Ejemplo: Dada la siguiente gráfica



Podemos observar que es una función acotada.

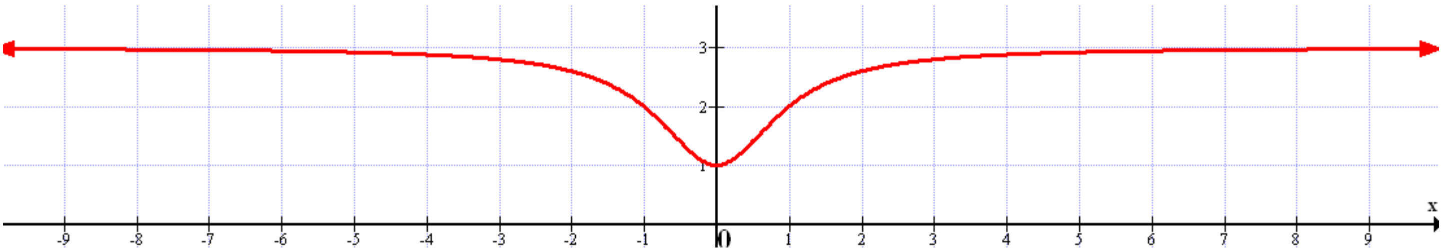
La menor de las cotas superiores es 3 (3 es el extremo superior o supremo) pero la función no lo alcanza, luego no tiene máximo absoluto

La mayor de las cotas inferiores es 1 (1 es el extremo inferior o ínfimo) y además lo alcanza, luego es el mínimo absoluto. Del mínimo absoluto podemos decir que es el punto $(0,1)$, que lo alcanza en $x=0$ x = 0 o bien que es 1.

Nosotros habitualmente usaremos las dos primeras expresiones.

6. MONOTONÍA. EXTREMOS RELATIVOS

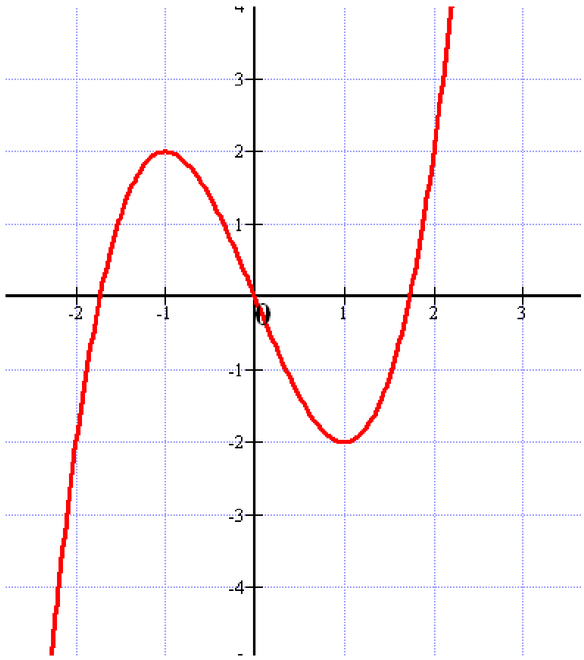
Ejemplo: Supongamos que tenemos una función cuya gráfica es como sigue:



Viendo el dibujo podemos decir que:

- En $(-\infty,0)$, la función es estrictamente decreciente (se puede decir decreciente)
- En $(0.+\infty)$, la función es estrictamente creciente(se puede decir creciente)
- En $x_0 = 0$ (ó en el punto $(0,1)$) , la función presenta un mínimo relativo que además es absoluto pues es la mayor de las cotas inferiores y la función lo alcanza
- No tiene máximos relativos

Ejemplo: Lo mismo para



f es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

f es decreciente en $(-1,1)$

f tiene un máx. relativo en $x_0 = -1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en $(-1,2)$

f tiene un mín. relativo en $x_0 = 1$. También se puede decir que tiene un máximo relativo en $(1,-2)$

Como no está acotada no puede tener extremos absolutos

Es simétrica de simetría impar

No tiene periodicidad

7. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Definición: Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que $\mathrm{Im}(f)\subseteq Dom(g)$, se llama función compuesta de la función f con g (o f compuesta con g) a: $(g\circ f)(x) = g[f(x)]$

Es decir, aplicamos g al resultado de aplicar f a la variable independiente "x"

No es conmutativo, es decir, normalmente $g\circ f \neq f\circ g$

Ejemplo: Sean $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$, entonces

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}-1} = \frac{x}{2\sqrt{x}-1}$$

$$(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x^2}{2x-1}\right] = \sqrt{\frac{x^2}{2x-1}}$$

8. FUNCION INVERSA

Dada una función $y = f(x)$, la función inversa de f es aquella que devuelve cada valor imagen a su original y se nota por $f^{-1}(x)$

Se tiene que cumplir que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Además, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante (recuerdo que esta bisectriz es la recta que tiene por ecuación $y = x$)

<u>Ejemplo</u>: Calcular la inversa de $f(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

Partimos de $y = \dfrac{3x}{2x-1}$ →permutamos la " x " y la " y ", nos queda $x = \dfrac{3y}{2y-1}$ →despejamos " y " → $x\cdot(2y-1) = 3y$ → $2xy - x = 3y$ → $2xy - 3y = x$ →sacamos factor común " y "→ $y\cdot(2x-3) = x$ → $y = \dfrac{x}{2x-3}$. Y ya tenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2x-3}$$

<u>Comprobación</u>: Vamos a calcular $(f \circ f^{-1})(x)$ para ver que nos da la función identidad

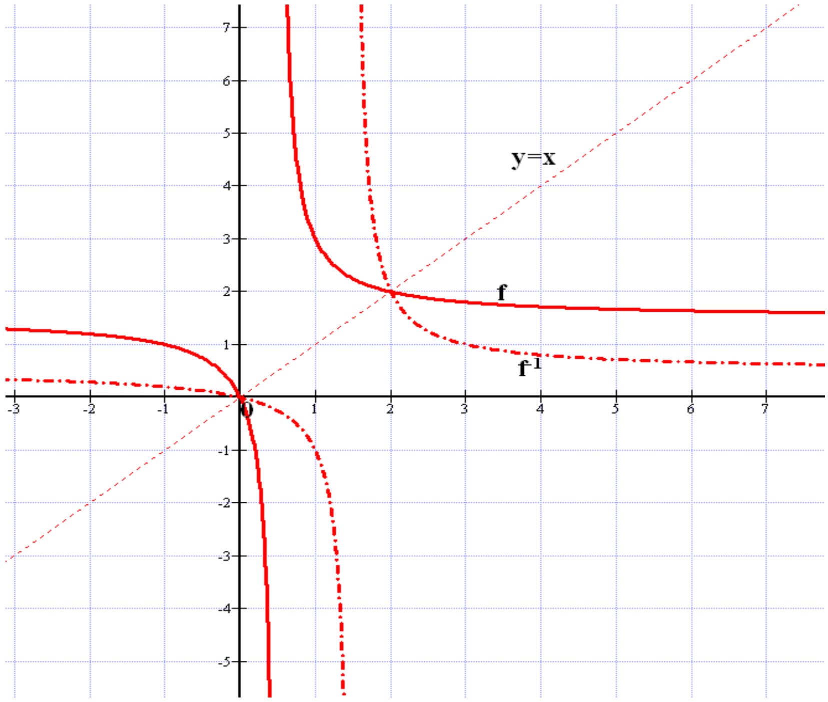
$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = f\left[\frac{x}{2x-3}\right] = \frac{3\dfrac{x}{2x-3}}{2\dfrac{x}{2x-3}-1} = \frac{\dfrac{3x}{2x-3}}{\dfrac{2x-2x+3}{2x-3}} = \frac{\dfrac{3x}{2x-3}}{\dfrac{3}{2x-3}} = \frac{3x}{3} = x$$

Lo mismo se puede hacer con $f^{-1} \circ f$

Gráficamente vemos que son simétricas respecto a la bisectriz de primer y tercer cuadrante.

En trazo continuo la función $f(x) = \dfrac{3x}{2x-1}$

En trazo discontinuo la función $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-3}$



9. LÍMITES. LÍMITES LATERALES

Recordamos del año anterior que una función $y = f(x)$ tiene por límite L cuando la variable independiente x tiende a x_0, y se notaba por $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, cuando al acercarnos todo lo que queramos a x_0, las $f(x)$ se aproximan todo lo que queramos a L. Esta definición es de andar por casa, pero nos sirve para su comprensión. Las definiciones correctas las tenéis en cualquier libro de texto, pero no son necesarias saberlas.

Vamos a calcular de una manera un poco "cutre" $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-1)$ haciendo una tabla de valores:

La expresión $x \to 3$, nos indica que x puede tomar valores infinitamente cercanos a 3. Nos podemos acercar con valores próximos a 3 pero menores que 3 (límite lateral izquierdo) o bien con valores próximos a 3 pero mayores a 3 (límite lateral derecho)

Hacemos la tabla por la izquierda:

$x \to 3^-$	2'5	2'8	2'99	2'9999	=======➔ 3
$f(x) = x^2-1$	5'25	6'84	7'9401	7'99940001	=======➔ 8

Según esta tabla podemos concluir que el límite lateral izquierdo, vale 8. $\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1) = 8$

Análogamente, hacemos la tabla por la derecha

$x \to 3^+$	3'5	3'1	3'01	3'0001	=======➔ 3
$f(x) = x^2-1$	11'25	8'61	8'0601	8'00060001	=======➔ 8

Según esta tabla podemos concluir que el límite lateral derecho, vale 8. $\lim\limits_{x\to 3^+}(x^2-1) = 8$

Si hacemos una tabla con valores próximos a 3 tanto por la izquierda como por la derecha simultáneamente, también tendríamos que la función tiende a 8. Es decir, que tenemos que $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-1) = 8$

Luego concluimos, que para que una función tenga límite ha de tener los límites laterales y estos han de ser iguales. Matemáticamente se expresa de la siguiente forma: (esto es importante)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \end{cases}$$

Los límites laterales se usan sobre todo cuando la función viene definida de manera diferente por la izquierda o por la derecha.

También si nos fijamos, para calcular los límites no hay que hacer aburridas tablas, bastaría con sustituir el valor al que tiende x en la expresión de la función

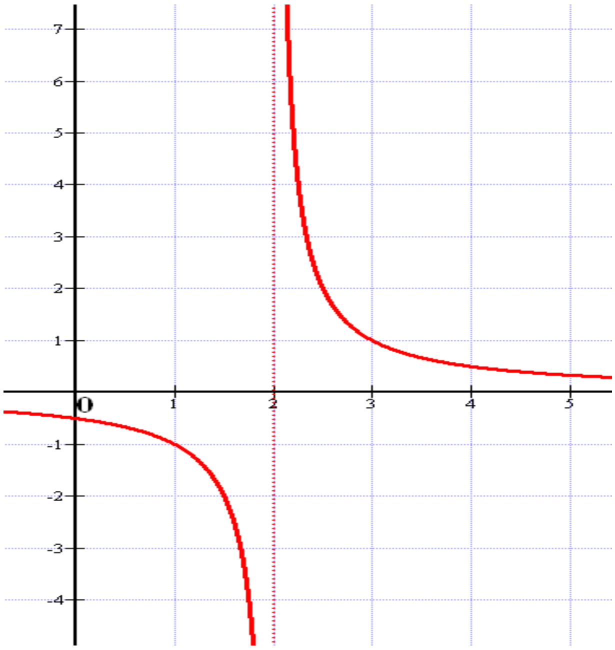
Ejemplo: Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-1)=5\cdot 2-1=9$ b) $\lim\limits_{x\to -5}\left(\frac{2}{x+1}\right)=\frac{2}{-5+1}=\frac{-1}{2}$

En estos dos simples ejemplos, se pueden hacer también los límites laterales y sus resultados son los mismos.

10. LÍMITES INFINITOS CUANDO X TIENDE A Nº REAL

Supongamos una función cuya gráfica es como sigue:



Tenemos que al acercarnos a 2 por la izquierda la función va a $-\infty$, o sea, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

Tenemos que al acercarnos a 2 por la derecha la función va a $+\infty$, o sea, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

Aquí los límites laterales no coinciden, uno va a $-\infty$ y el otro va a $+\infty$. En estos casos diremos que el límite global (acercándonos por los dos lados) es:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ No le ponemos signo al infinito

Estos límites son de la forma $\boxed{\frac{k}{0}\text{, que dan un infinito}}$, y tenemos que estudiar si sale un cero negativo o positivo para conocer el signo del infinito o si no lleva.

Ejemplo: Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{-3}{(x-5)^2}$ Si sustituimos nos queda $\frac{-3}{0^2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$ puesto que el 0 al estar al cuadrado da igual que sea 0^+ ó 0^-, pues siempre saldrá 0^+. No hemos tenido que utilizar los límites laterales.

Por tanto, concluimos que $\lim\limits_{x\to 5}\frac{-3}{(x-5)^2}=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1-x}{x^2+2x}$ Si sustituimos nos queda $\frac{3}{0}$, que dará un infinito. Estudiemos los límites laterales para conocer su signo

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{1-x}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2^-}\frac{1-x}{x\cdot(x+2)}=\frac{3}{(-2)\cdot 0^-}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

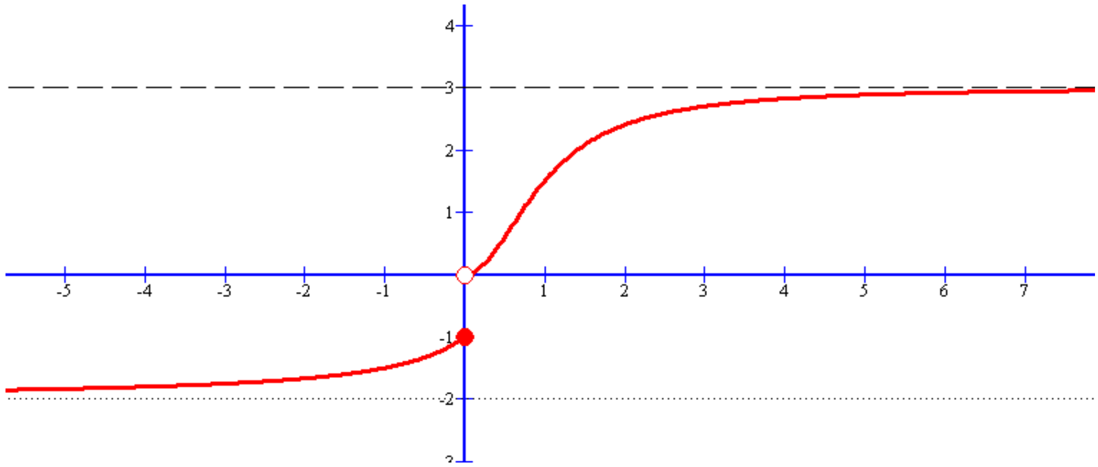
$$\lim_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x\cdot(x+2)}=\frac{3}{(-2)\cdot 0^+}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

Por tanto, concluimos que, $\lim_{x \to -2} \frac{1-x}{x^2+2x} = \infty$

11. LÍMITES FINITOS EN EL INFINITO

Se trata de límites donde la variable independiente "x" tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$, y la función tiende a un nº finito.

Veamos con un ejemplo gráfico a que nos referimos. Sea la gráfica siguiente:



Tenemos que:

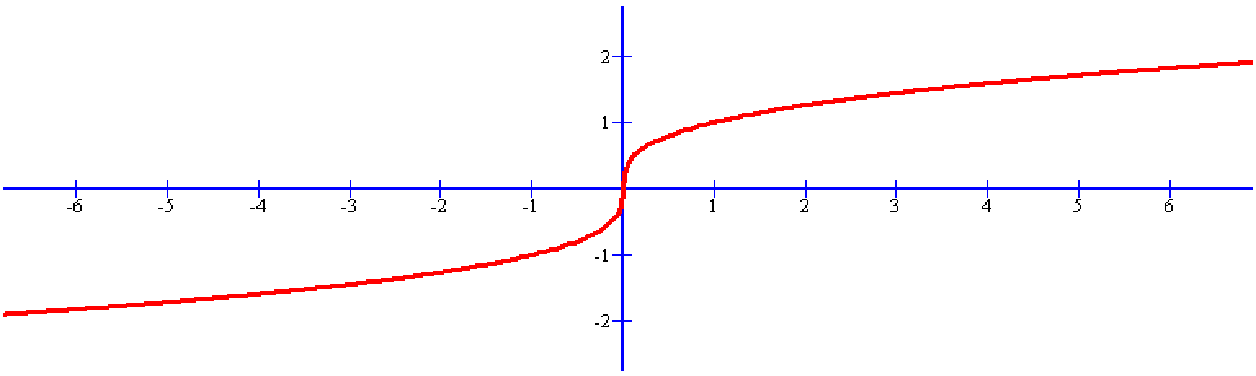
a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$

Y por recordar un poco del punto 9 (límites laterales), ¿qué pasa en $x_0 = 0$? Calculamos los laterales y tenemos que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, que como son distintos nos indican que no existe el límite global en $x_0 = 0$, es decir, $\neg\exists \lim_{x \to 0} f(x)$ (NOTA: $\neg\exists$ significa *no existe*)

12. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO

Es similar al caso anterior, sólo que el valor del límite también es infinito. Veamos un ejemplo gráfico:



Tenemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

13. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

En el cálculo de límites hay una serie de situaciones que se llaman indeterminaciones y que se han de resolver de una manera un poco más complicada, pues el valor del límite no se puede conocer de manera inmediata. Es fundamental hacer ejercicios en abundancia para aprender los métodos.

Las indeterminaciones son:

$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0\cdot\infty$	$\infty-\infty$	0^0	∞^0	1^∞

A veces también se trata como indeterminación $\frac{k}{0}$, pero nosotros no la tratamos como tal, y además ya ha sido estudiada en el punto 10.

a) **<u>Indeterminación</u>** $\frac{\infty}{\infty}$

Normalmente se resuelven tomando el término o términos dominantes del numerador y del denominador. Veamos ejemplos.

<u>Ejemplo</u>: Calcular

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+2x-3}{x^2-1}=$ (tomamos el término de grado 3 en el numerador y el de grado 2 en el denominador, que son los dominantes) = $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3}{x^2}=$ (simplificamos)= $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{1}=-\infty$

NOTA: <u>Si el numerador tiene mayor grado que el denominador el límite es infinito y el signo habrá que estudiarlo</u>

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4+2x-3}{3x^4+8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4}{3x^4}=\frac{7}{3}$

NOTA: <u>Si el numerador tiene igual grado que el denominador el límite es finito y es el cociente de los coeficientes</u>

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x^7-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{x^{7/3}}=$ (operamos) $\lim_{x\to+\infty}3\cdot x^{2-\frac{7}{3}}=\lim_{x\to+\infty}3\cdot x^{-\frac{1}{3}}=$ (como tiene exponente negativo, lo llevamos al denominador) = $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^{1/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\frac{3}{+\infty}=0$

NOTA: <u>Si el numerador tiene menor grado que el denominador el límite es 0</u>

<u>Ejemplo</u>: Calcular $\lim_{t\to+\infty}\frac{2t^2-t^3}{4t^3-\sqrt{t^6+t}}$ =(tomamos los dominantes) $\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^3}{4t^3-\sqrt{t^6}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^3}{4t^3-t^3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-t^3}{3t^3}=\frac{-1}{3}$

b) **<u>Indeterminación</u>** $\frac{0}{0}$

Lo habitual en este tipo de indeterminaciones es descomponer numerador y denominador en factores (sacando factor común, por Ruffini, etc.) para poder simplificar el factor que vale 0 en el límite.

Otras veces si aparecen funciones irracionales (con raíces cuadradas) se multiplica por el conjugado

Veamos ejemplos:

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x-6}{x^2-4}$ = (al sustituir x por 2 resulta $\frac{0}{0}$, aplicamos Ruffini al numerador con el 2 y en el denominador o Ruffini o nos damos cuenta que es una diferencia de cuadrados)= $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{(x-2)(x+2)}$ =

$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+3)}{(x+2)}$ =(ahora sólo queda sustituir) $\frac{11}{4}$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{1-\sqrt{x}}$ = (al sustituir x por 1 resulta $\frac{0}{0}$, multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador)= $\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)}{(1-\sqrt{x})}\cdot\frac{(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-x)\cdot(1+\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2}$ = (sacamos factor común en el primer factor del numerador) = $\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{1-x}$ = (nos damos cuenta que 1-x = -(x-1) para poder simplificar) = $\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)\cdot(1+\sqrt{x})}{-(x-1)}$

= (simplificamos y sustituimos) = $\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(1+\sqrt{x})}{-1}=\frac{1\cdot(1+1)}{-1}=-2$

c) **Indeterminación** $0\cdot\infty$

Estas indeterminaciones se transforman en las del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to -\infty}\frac{-2}{\sqrt{x^6-2}}\cdot(5x+9)$ = (tenemos $\frac{-2}{+\infty}\cdot(-\infty)=0\cdot(-\infty)$, que es una indeterminación) =

$\lim_{x\to -\infty}\frac{-10x-18}{\sqrt{x^6-2}}$ =(con sólo hacer la multiplicación se convierte en $\frac{+\infty}{+\infty}$)= $\lim_{x\to -\infty}\frac{-10x}{\sqrt{x^6}}$ =(tomando términos dominantes y operando) = $\lim_{x\to -\infty}\frac{-10x}{x^3}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-10}{x^2}=\frac{-10}{+\infty}=0$

d) **Indeterminación** $\infty-\infty$

¡Ojo! Hay algunos infinitos – infinitos que no son indeterminaciones, como:

$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$ $(-\infty)-(+\infty)=-\infty$

Suelen aparecer en límites de funciones racionales o irracionales. La forma de resolverlos es multiplicando numerador y denominador por el conjugado y operando convenientemente.

Ejemplo 8: Calcular $\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x^2+3}-(x-3)\right]$= (sale indeterminación $(+\infty)-(+\infty)$, usamos el conjugado) =

$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3}-(x-3))\cdot\frac{(\sqrt{x^2+3}+(x-3))}{(\sqrt{x^2+3}+(x-3))}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3})^2-(x-3)^2}{\sqrt{x^2+3}+(x-3)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3-(x^2-6x+9)}{\sqrt{x^2+3}+(x-3)}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x-6}{\sqrt{x^2+3}+(x-3)}$ = (ahora es una indeterminación $\frac{+\infty}{+\infty}$, y tomamos términos dominantes) = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2}+x}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x}{2x} = 3$

14. CONTINUIDAD

Definición: Una función f es continua en un punto de abscisa x_0 si y sólo si cumple las tres condiciones siguientes:

a) Existe el límite de f cuando x tiende a x_0 (recuerdo que a veces aquí tendremos que calcular los límites laterales en x_0, pues la función puede venir definida de forma diferente por la izquierda de cómo está definida por la derecha). Matemáticamente, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (o si hay que hacer los laterales , éstos existen y son iguales)

b) La función está definida en x_0 (o sea, $x_0 \in Dom(f)$). Matemáticamente, $\exists f(x_0)$

c) Los dos valores anteriores coinciden, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

NOTA: Todas las funciones más normales (polinómicas, racionales, irracionales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas) son continuas en todo los puntos de su dominio. Si el punto es un extremo del dominio se podrá decir que es continua por la derecha o por la izquierda según sea el caso)

Veamos mediante ejemplos cómo se estudia la continuidad.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x \le 2 \\ x-4 & si \quad x > 2 \end{cases}$ Vamos a estudiar la continuidad en $x_0 = 2$

Vemos primero que a la izquierda del 2 (nº menores que 2) la función viene definida de una forma diferente (polinomio cuadrático) a como está definida por la derecha (nº mayores que 2), que es una afín.

Vamos dicho esto con los apartados:

a) Por lo dicho anteriormente, hemos de calcular los límites laterales, pues el global no lo podemos hacer directamente.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-1) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x-4) = -2$$

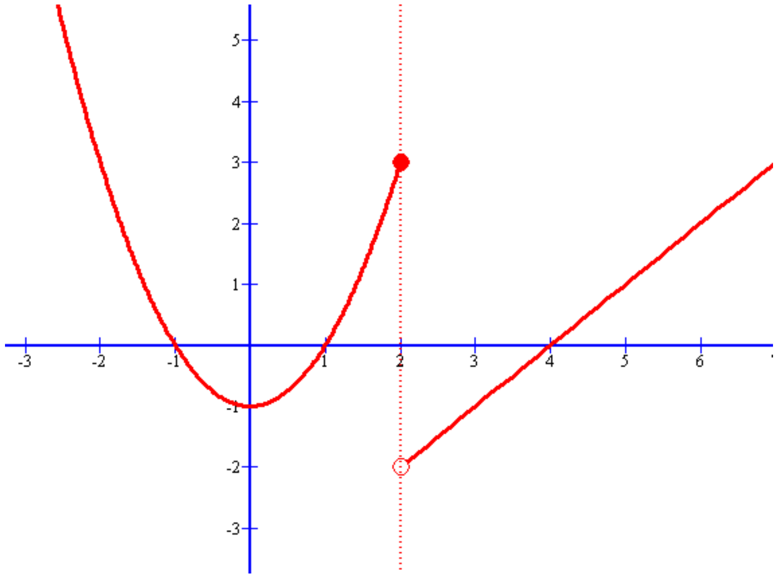
Como vemos no coinciden, por tanto concluimos que no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, por tanto la función no puede ser continua.

Diremos en este caso que *la función en $x_0 = 2$ presenta una discontinuidad de salto finito y amplitud 5* (el 5 se obtiene de restar los límites laterales y calcularle el valor absoluto). Con la gráfica lo veréis mejor

b) La función está definida en $x_0 = 2$, pues $\exists f(2) = 2^2 - 1 = 3$, aunque esto ya no es necesario, pues por el apartado a) sabemos que es discontinua

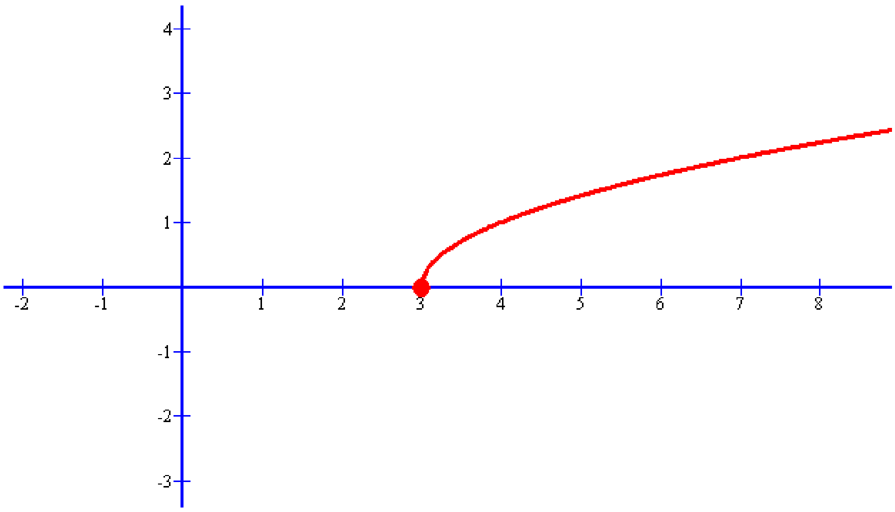
c) Este apartado no es necesario ya

La gráfica de la función era la siguiente y podéis observar la discontinuidad



<u>Ejemplo</u>: Sea ahora la función $f(x) = \sqrt{x-3}$. Lo primero es ver su dominio, que sale $Dom(f) = [3,+\infty)$

¿Qué pasa en $x_0 = 3$? En este caso sólo se puede calcular el límite lateral derecho pues por la izquierda del 3 la función no está definida. Aquí diremos que la función es *<u>continua por la derecha</u>* en $x_0 = 3$, como se ve en la gráfica. Además en todos los demás puntos del dominio la función es continua.



<u>Ejemplo</u>: Estudiar la continuidad de la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - .9}{2x+3} & si \quad x \neq -\dfrac{3}{2} \\ -6 & si \quad x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Si $x \neq -\frac{3}{2}$, vemos que la función viene dada por una expresión racional y no se anula el denominador (sólo de anula en $x = -\frac{3}{2}$, y éste no lo estamos considerando aún), luego podemos afirmar que f es continua en los puntos tales que $x \neq -\frac{3}{2}$ (o lo que es lo mismo en $\Re - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$)

Si $x = -\frac{3}{2}$. En este caso veamos si cumple o no las condiciones de continuidad:

a) Calculamos ahora el límite (no hacen falta calcular los laterales, pues por la izquierda y la derecha la función viene definida igual)

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{(2x+3)\cdot(2x-3))}{2x+3} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} (2x - 3) = -6$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$. Descomponemos en factores el numerador

b) $\exists f(-\frac{3}{2}) = -6$

Como vemos $f(-\frac{3}{2}) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3} = -6$, luego también es continua en $x = -\frac{3}{2}$

Ejemplo: Calcular los valores que deben tomar m y n para que la siguiente función sea continua en $\Re$

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \quad 1 < x < 3 \\ x^2 + mx + n & si \quad x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 3 \end{cases}$$

(NOTA: $\vee$ significa la disyunción ó)

SOLUCIÓN:

Si $x < 1$, la función viene dada por $f(x) = x^2 + mx + n$, que al ser un polinomio de 2º grado, sabemos que es continua.

Si $1 < x < 3$, la función viene dada por $f(x) = x + 1$, que igualmente es continua al ser un polinomio de primer grado.

Si $x > 3$, la función viene dada por $f(x) = x^2 + mx + n$, que al ser un polinomio de 2º grado, sabemos que es continua.

Ninguna de las anteriores conclusiones nos ha aportado nada para calcular m y n. Veamos que ocurre en $x = 1$ y $x = 3$.

En $x = 1$, impongamos la condición de continuidad $f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$f(1) = 1^2 + m \cdot 1 + n = 1 + m + n$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + mx + n = 1 + m + n$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + 1 = 2$$

Igualando, obtenemos una primera ecuación: $1 + m + n = 2$

En $x = 3$, imponemos las condiciones de continuidad:

$$f(3) = 3^2 + m \cdot 3 + n = 9 + 3 \cdot m + n$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x + 1 = 4$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 + mx + n = 9 + 3 \cdot m + n$$

Igualando, obtenemos una segunda ecuación: $9 + 3 \cdot m + n = 4$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones lineal con dos incógnitas, que resolvemos:

$\begin{cases} 1 + m + n = 2 \\ 9 + 3m + n = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 1 \\ 3m + n = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m - n = -1 \\ 3m + n = -5 \end{cases}$ Sumamos las ecuaciones y tenemos:

$2m = -6 \Rightarrow$ $\boxed{m = -3}$

Sustituimos en $m + n = 1 \Rightarrow -3 + n = 1 \Rightarrow$ $\boxed{n = 4}$

<u>Ejemplo</u>: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 3 & si & x < 1 \\ 2x - 1 & si & 1 \le x < 3 \\ \ln x & si & x > 3 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Lo primero que observamos es que $Dom(f) = R - \{3\}$

- Si $x < 1$, f es continua por ser polinómica (es una función cuadrática)
- Si $1 < x < 3$, f es continua por ser polinómica (es una función afín)

- Si $x > 3$, f es continua por ser una función logarítmica y su argumento (la x) ser positivo

Veamos ahora que ocurre en los puntos donde la función cambia de definición:

- En $x = 1$
  - $\exists f(1) = 1$
  - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-2x^2 + x + 3) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 1) = 1$

  Como vemos presenta una discontinuidad de salto finito y amplitud 1

- En $x = 3$
  - No existe $f(3)$, pues no es del dominio. Ya sabemos que no es continua, pero veamos si es evitable.
  - $\lim\limits_{x \to 3^{+-}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^{+-}} \ln x = \ln 3$
  - $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x - 1) = 5$

  Vemos que presenta discontinuidad no evitable de salto finito y amplitud $(5 - \ln 3)$

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & si \quad -5 \le x < -1 \\ 2 & si \quad x = -1 \\ -2x^2 + 2 & si \quad -1 < x < 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \\ x^2 - 4x + 3 & si \quad 1 < x \le 5 \end{cases}$ en los puntos $x = -1$ y $x = 1$

SOLUCIÓN:

- En $x = -1$
  - $\exists f(-1) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 4x + 3) = 0$
  - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^{+-}} (-2x^2 + 2) = 0$

  Presenta una discontinuidad evitable, pues bastaría redefinir $f(-1) = 0$ y ya la función sería continua

- En $x = 1$, es análogo