HOJA 1 DE EJERCICIOS PROPUESTOS
UNIDAD 1: **MATRICES**

Ejercicio 1: Efectúa el producto $\begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2:

a) ¿Son guales las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$?

b) Halla, si es posible, las matrices $A\cdot B, B\cdot A, A+B, A^t-B$

Ejercicio 3: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que:

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$

b) $(3A)^t = 3\cdot A^t$

Ejercicio 4: Sean A y B dos matrices que verifican $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Halla las matrices $(A+B)\cdot(A-B)$ y A^2-B^2

Ejercicio 5: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Ejercicio 6: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3=-I$.

b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.

c) Calcula razonadamente A^{100}.

Ejercicio 7: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comprueba que $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t$

Ejercicio 8: Halla las matrices X e Y que verifican el sistema $2X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X-Y=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9: Determina los valores de m para los cuales $X=\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifica $X^2-\frac{5}{2}X+I=\theta$

Ejercicio 10: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$.

Ejercicio 11: Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A+I)^2=\theta$ y expresa A^2 como combinación lineal de A e I.

Ejercicio 12:

a) Comprueba que la inversa de A es A^{-1}, siendo $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & 0 \\ \frac{-3}{5} & \frac{6}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que verifica $X \cdot A = B$ siendo A la matriz anterior y $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 13: En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escribe una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.
b) Calcula la matriz que expresa el número de cristales y bisagras de cada tipo de vivienda.

Ejercicio 14: Justifica por qué no es cierta la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ cuando A y B son dos matrices cualesquiera.

Ejercicio 15: Considera $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo $a \in \mathbb{R}$.

Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16: Sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$, determina b para que $A^2 - 2A + I = \theta$

Ejercicio 17: Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $2A - A^2 = I$.
b) Calcula A^{-1}. (Puedes usar la igualdad del apartado anterior)

Ejercicio 18: Dada $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, calcula $B = A^2 - 2A$

Ejercicio 19: Dadas $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A \cdot B)^t$ y $(B \cdot A)^t$

Ejercicio 20: Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Prueba que $A^3 + I = \theta$.
b) Calcula la inversa de A.
c) Calcula A^{257}.